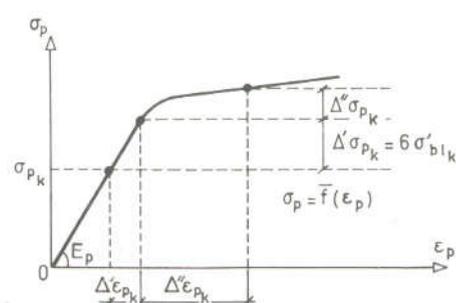
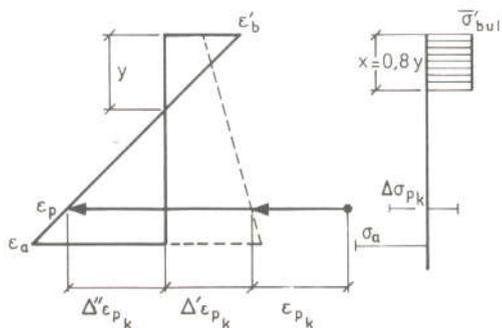
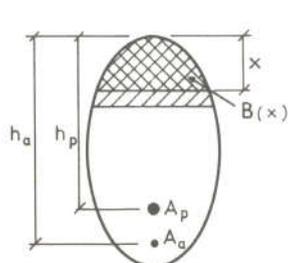
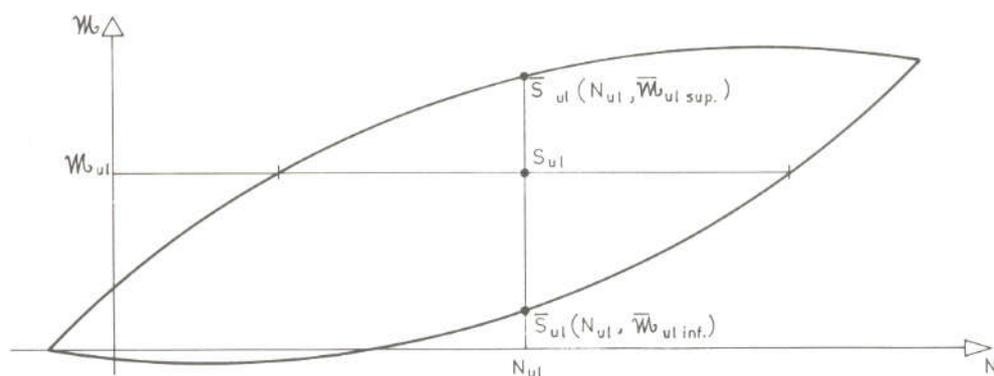
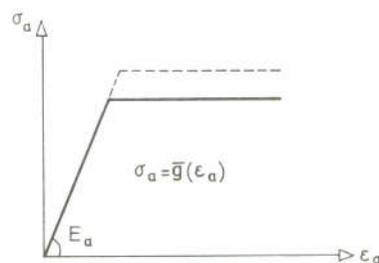
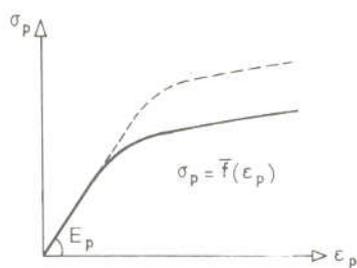
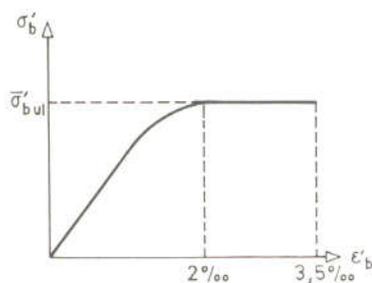
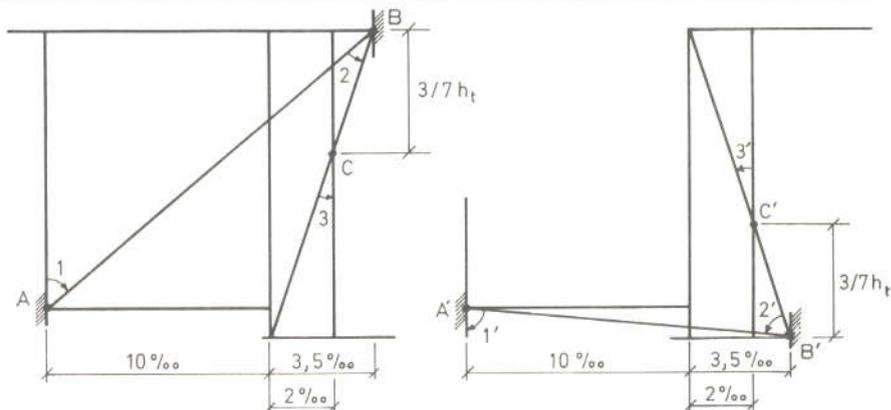


application du nouveau règlement de béton précontraint



MINISTERE DE L'EQUIPEMENT
SERVICE D'ETUDE TECHNIQUE DES ROUTES ET AUTOROUTES
46, AVENUE ARISTIDE-BRIAND – 92223-BAGNEUX – TEL.: 655-42-42

APPLICATION DU NOUVEAU REGLEMENT DE BETON PRECONTRAIT

Bulletin rédigé par MM. CHAUSSIN Ingénieur des Ponts et Chaussées
LEBLANC Ingénieur I.N.S.A. - C.H.E.B.A.P.
MAC FARLANE Ingénieur des T.P.E.
VIADERE Ingénieur stagiaire A.M. - C.H.E.B.A.P.

Juin 1975

SOMMAIRE

	Pages
O – LA NOUVELLE REGLEMENTATION FRANÇAISE DU BETON PRECONTRAIT	7
I – ACTIONS ET SOLLICITATIONS	15
II – PRECONTRAINTE	
1. Principe du calcul de la tension d'un câble	25
2. Premier exemple : câblage d'un hourdis	27
3. Deuxième exemple : câblage d'une travée indépendante	31
III – JUSTIFICATIONS DES CONTRAINTES NORMALES	
1. Généralités	43
2. Premier exemple	54
3. Deuxième exemple : travée indépendante	62
4. Troisième exemple : encorbellement	76
5. Quatrième exemple : genre III	95
IV – JUSTIFICATIONS DES CONTRAINTES TANGENTES	
1. Généralités	107
2. Premier exemple : travée indépendante	110
3. Deuxième exemple : encorbellement	113
V – HOURDIS	
1. Généralités	119
2. Exemple	122
NOTATIONS	131

PREAMBULE

Le présent bulletin technique constitue un manuel donnant des exemples d'application de l'instruction provisoire n° 2 (en date du 13 août 1973) relative à l'emploi du béton précontraint. Il s'adresse aux projeteurs et vise particulièrement les ponts routiers, notamment sur le plan des sollicitations, des genres de calcul et des dispositions constructives.

Nous rappelons que le nouveau règlement de béton précontraint présente un caractère provisoire puisqu'il s'agit d'un texte à l'essai dont il n'est pas prévu dans l'immédiat une utilisation systématique. Il est vraisemblable que pour devenir réellement opérationnel certaines prescriptions devront être ajustées ou (et) simplifiées. Il ne faut donc pas être surpris si certains résultats numériques s'écartent un peu des valeurs les plus habituelles. Il ne faut pas non plus trop s'étonner de la complexité de certains calculs qui, à l'usage, pourront peut-être faire l'objet ultérieurement de simplifications.

Le bulletin technique ainsi diffusé doit donc être considéré comme une première édition mise à l'enquête auprès des spécialistes, toute imperfection devant nous être signalée. Pour l'instant les applications visent essentiellement la justification d'une section de poutre en partie courante, c'est-à-dire le calcul des actions et sollicitations y compris la précontrainte et la justification des sections vis-à-vis des moments fléchissants et des efforts tranchants.

Un dernier chapitre donne des exemples de calcul de hourdis soumis à des charges routières. Des chapitres ultérieurs viendront compléter ce bulletin notamment pour ce qui est des abouts de poutre et de certaines dispositions constructives. Signalons cependant que pour la précontrainte par adhérence il convient de se référer au dossier P R A D.

LA NOUVELLE REGLEMENTATION FRANÇAISE DU BETON PRECONTRAINTE (1)

1 – LA SITUATION ANTERIEURE

La première "Instruction Provisoire" française relative au béton précontraint date de 1953. Elle était basée sur les idées de FREYSSINET et sur l'expérience des ponts construits depuis 1945. Elle a été remplacée en 1965 par une nouvelle "Instruction Provisoire" qui lui apportait quelques compléments et quelques modifications limitées. Les principes fondamentaux restaient les mêmes :

- d'une manière générale, dans les pièces fléchies, le béton devait toujours rester comprimé;
- la tension initiale des armatures de précontrainte n'était pas limitée; en pratique, la contrainte initiale pouvait atteindre la contrainte caractéristique de déformation garantie T_g des fils constitutifs de l'armature;
- les vérifications étaient faites suivant la méthode des contraintes admissibles. En outre, des justifications spéciales de sécurité vis-à-vis de la rupture devaient être présentées pour les ouvrages achevés, dans les conditions de service, dans l'hypothèse où seraient multipliées par 1,8 les charges variables.

Parallèlement, l'Association Scientifique de la Précontrainte publiait en 1965 ses "Recommandations pour le calcul et l'exécution des ouvrages précontraints". Ces Recommandations s'inspiraient largement des idées du C.E.B. et de la F.I.P. Par rapport à l'"Instruction Provisoire", elles introduisaient notamment 3 classes de vérification et donnaient des règles plus précises sur la sécurité à la rupture. Mais elles n'avaient pas de caractère officiel et leur application était limitée aux constructions privées, alors que l'Instruction Provisoire était obligatoire pour les marchés de l'Etat.

D'une manière générale, ces textes visaient essentiellement la précontrainte par post-tension et ne donnaient pas de règles détaillées pour la précontrainte par pré-tension.

2 – L'ELABORATION DES "DIRECTIVES COMMUNES RELATIVES AU CALCUL DES CONSTRUCTIONS" de 1971 et de l'INSTRUCTIONS PROVISOIRE de 1973 SUR LE BETON PRECONTRAINTE.

La nécessité est alors apparue d'élaborer un nouveau texte officiel, qui pourrait s'appliquer à toutes les constructions en béton précontraint (notamment ouvrages d'art et bâtiments) et qui serait basé sur les principes de sécurité déjà adoptés par le C.E.B. et par la F.I.P. Une Commission, composée de représentants de l'Administration et de représentants des constructeurs, des Bureaux d'études et des Bureaux de contrôle privés, fût créée dans ce but en 1967.

Mais il n'était pas concevable que les nouveaux principes de sécurité s'appliquent seulement au béton précontraint. Il fallait envisager de les étendre, à plus ou moins long terme, à toutes les constructions, quel que soit leur matériau constitutif. Il était donc indispensable d'en faire un exposé général, en précisant les termes employés, et de donner des indications sur leur application ainsi que sur les valeurs numériques des principaux coefficients. C'est ce qui a été fait dans un document intitulé "DIRECTIVES COMMUNES RELATIVES AU CALCUL DES CONSTRUCTIONS" qui a été approuvé par circulaire ministérielle du 13 décembre 1971.

(1) - Communication présentée au 7ème Congrès de la Fédération Internationale de la Précontrainte (NEW-YORK - 1974) par M. G. GRATTESAT, Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées au S.E.T.R.A.

Ce document s'inspire très directement des "Principes généraux" faisant l'objet de l'article P.1 des Recommandations Internationales et de la norme ISO 2394. Mais il a été jugé nécessaire de leur apporter des compléments et des précisions, ainsi que quelques modifications sur certains points.

Ces "Directives Communes" ont servi de base à l'élaboration des nouveaux règlements publiés depuis décembre 1971 : règlement relatif aux charges routières (Titre II du Fascicule 61 du C.P.C.); règlement de calcul des ponts et constructions métalliques en acier (Titre V du Fascicule 61 du C.P.C.); règlement de calcul des constructions en béton précontraint (Instruction Provisoire N° 2 du 13 août 1973). Elles seront aussi à la base des futurs règlements en préparation, notamment du règlement de conception et de calcul du béton armé et du règlement relatif aux charges climatiques (neige et vent).

Il s'agit donc d'une transformation profonde de l'ensemble de la réglementation technique française, qui sera complète dans quelques années et qui est déjà largement engagée, tout particulièrement dans le domaine du béton précontraint.

C'est en effet dans ce domaine que les nouveaux principes ont été appliqués de la manière la plus générale et la plus approfondie, dans le nouveau règlement relatif à l'emploi du béton précontraint, qui fait l'objet de l'"Instruction Provisoire N° 2" approuvée par circulaire ministérielle du 13 août 1973.

3 – LES PRINCIPES GENERAUX SUR LESQUELS EST BASEE L' "INSTRUCTION PROVISOIRE N° 2"

L' "Instruction Provisoire N°2" est basée sur les mêmes principes généraux que les Recommandations Internationales : elle prescrit une méthode semi-probabiliste de calcul aux états-limites ; elle distingue et définit les états-limites ultimes et les états-limites d'utilisation ; elle part de "valeurs caractéristiques" pour les actions et pour les résistances des matériaux ; ces valeurs caractéristiques, après multiplication par divers coefficients, permettent de calculer les sollicitations de calcul à comparer aux sollicitations limites dans les différents états-limites à examiner.

Cependant l'application de ces principes généraux a été sur plusieurs points précisée et interprétée d'une manière quelquefois différente de celle des Recommandations Internationales.

Ces différences sont sommairement indiquées ci-après.

4 – LES PRINCIPALES PARTICULARITES DE L' "INSTRUCTION PROVISOIRE N° 2"

4.1. Les valeurs caractéristiques des actions et la formation des combinaisons d'actions.

Conformément aux "Directives Communes", la valeur caractéristique d'une action est celle qui présente une probabilité acceptée a priori d'être atteinte ou dépassée du côté des valeurs les plus défavorables au cours d'une durée définie, dite durée de référence. D'après cette définition, les actions de même origine peuvent donc avoir plusieurs valeurs caractéristiques, suivant les valeurs choisies pour la probabilité et pour la durée de référence.

En particulier, on donne aux actions variables une valeur caractéristique dite "de courte durée" et une valeur caractéristique dite "de longue durée" :

- la valeur caractéristique "de courte durée", ou valeur caractéristique principale, correspond à une faible probabilité d'être atteinte ou dépassée dans le sens défavorable, une fois au cours de la durée de référence. Elle correspond donc à la valeur caractéristique des Recommandations Internationales :
- la valeur caractéristique "de longue durée", ou valeur usuelle, correspond à une probabilité non négligeable d'être atteinte ou dépassée de façon simultanée avec les valeurs de l'action ou des actions "de courte durée" figurant dans la combinaison considérée. Pratiquement, la valeur usuelle d'une action variable correspond à une faible probabilité d'être atteinte ou dépassée fréquemment ou en permanence pendant une fraction assez longue de la durée de référence.

Par rapport aux Recommandations Internationales, ceci revient à attribuer à chacune des actions une valeur caractéristique principale Q_K et une valeur usuelle égale à une valeur forfaitaire du produit $\gamma_{S_2} Q_K$, cette valeur forfaitaire restant la même dans les différentes combinaisons où cette action intervient.

Plusieurs sortes de combinaisons d'actions sont à envisager, suivant les natures et les valeurs des actions qui y figurent.

Les combinaisons fondamentales comprennent :

- soit des actions "de longue durée" seules : c'est le cas notamment des structures en béton précontraint en l'absence de charges d'exploitation;
- soit des actions "de longue durée" avec une seule action "de courte durée" : Ces combinaisons sont formées en considérant successivement chacune des actions variables avec leur valeur caractéristique principale ("de courte durée") et en y ajoutant les autres actions variables susceptibles d'intervenir simultanément avec leurs valeurs usuelles ("de longue durée"), ainsi bien entendu que les charges permanentes qui sont toujours considérées comme "de longue durée".

Les combinaisons supplémentaires comprennent deux (ou exceptionnellement plus de deux) actions "de courte durée" combinées avec des actions "de longue durée". De telles combinaisons ne sont à étudier que lorsque les simplifications indiquées ci-dessus pour les actions "de longue durée" introduites dans les combinaisons fondamentales ne donnent pas une sécurité suffisante.

Enfin, les combinaisons accidentelles comprennent une action accidentelle (choc, séisme, ...) combinée avec des actions "de longue durée".

4.2. Les sollicitations de calcul

4.2.1. Vis-à-vis des états-limites ultimes, les sollicitations de calcul à considérer sont de la forme (article 16,1) :

$$1,2 \left[S(1,1 Q_{L1}) + S(0,9 Q_{L2}) + \begin{cases} S(P_1) \\ \text{ou} \\ S(P_2) \end{cases} + S(\gamma_{Q_c} Q_c) \right]$$

Dans cette formule, $S(Q)$ représente la sollicitation due à l'action Q .

Q_{L1} représente les actions "de longue durée" défavorables.

Q_{L2} représente les actions "de longue durée" favorables.

P_1 représente les actions maximales de la précontrainte.

P_2 représente les actions minimales de la précontrainte.

Q_c représente l'action "de courte durée". La valeur du coefficient γ_{Q_c} est différente suivant l'action considérée.

Elle est égale à 1,25 dans le cas des charges sur les planchers des bâtiments, sur les ponts-rails et des charges climatiques, à 1,33 dans le cas des charges sans caractère particulier sur les ponts-routes, etc...

Le terme $S(\gamma_{Q_c} Q_c)$ disparaît quand on examine les actions de longue durée seules. Il est remplacé par $S(\gamma_{Q_{c1}} Q_{c1}) + S(\gamma_{Q_{c2}} Q_{c2})$ dans les combinaisons supplémentaires, et par $S(Q_{Ac})$ dans les combinaisons accidentelles. Dans ce dernier cas, la valeur caractéristique Q_{Ac} de l'action accidentelle est à fixer pour chaque ouvrage.

Il convient de remarquer :

4.2.1.1. La mise en facteur du coefficient γ_{S3} fixé forfaitairement à 1,2. Cette mise en facteur, conforme à l'article P 22,2 des Recommandations Internationales a pour objet notamment de couvrir les incertitudes qui portent sur l'évaluation de l'ensemble de la sollicitation, de mieux harmoniser la sécurité dans certains cas, et de traiter les problèmes non-linéaires.

Bien entendu, ce coefficient ne couvre pas les fautes de conception, de calcul ou d'exécution.

4.2.1.2. La prise en compte de la précontrainte parmi les actions. Il s'agit seulement des forces de précontrainte, après déduction des pertes instantanées et différées. Les surtensions excédant les valeurs caractéristiques P_1 ou P_2 sont prises en compte comme élément résistant pour évaluer la sollicitation limite ultime.

4.2.1.3. Le coefficient $\gamma_{S3} \times \gamma_{S1} = 1,2 \times 1,1 = 1,32$ applicable aux charges permanentes est inférieur au coefficient 1,5 des Recommandations Internationales.

Plus généralement, ce coefficient 1,32 s'applique à l'ensemble des actions "de longue durée" dont les valeurs caractéristiques (ou valeurs usuelles) sont inférieures aux valeurs caractéristiques principales.

Cette formule est donc nettement moins sévère que celle des Recommandations Internationales (article R 22-211) lorsqu'interviennent simultanément plusieurs actions variables.

4.2.2. Vis-à-vis des états-limites d'utilisation, les coefficients γ sont tous égaux à 1, comme dans les Recommandations Internationales (sauf en ce qui concerne les charges routières où le coefficient γ_{S1} a été fixé à 1,2 pour des raisons particulières liées au règlement correspondant).

Pour les éléments calculés en genre III_a, on ne prend en compte qu'une fraction χ des valeurs caractéristiques des charges d'exploitation.

4.3. Les états-limites

4.3.1. La vérification des sections fléchies à l'état-limite ultime de résistance est très proche de celle des Recommandations Internationales.

Un coefficient supplémentaire K_b a été introduit dans le calcul de la contrainte limite du béton fixée à $0,85 \sigma'_j$ (article 23,4) avec $\gamma_b = 1,5$ dans le cas général :

Ce coefficient K_b a pour objet de tenir compte de la durée probable d'application soutenue de la charge, dont la résistance du béton est fonction décroissante. Il est fixé à 1 lorsque cette durée est supérieure à 24 h., à 0,9 lorsqu'elle est comprise entre 1 h. et 24 h., et à 0,85 lorsqu'elle est inférieure à 1h. Ceci atténue la sévérité des Recommandations Internationales qui prennent en compte une réduction de la résistance du béton, de σ'_j à $0,85 \sigma'_j$, même lorsque la durée d'application de la charge dangereuse est très courte.

Le diagramme contrainte - déformation du béton est le diagramme "parabole - rectangle". Dans certains cas on peut employer un diagramme rectangulaire simplifié.

Les diagrammes de calcul des aciers sont déduits des diagrammes déformations - contraintes en effectuant une affinité parallèlement à la tangente à l'origine, dans le rapport $1/\gamma_m$; γ_m est égal à 1,25 pour les armatures de précontrainte et à 1,1 pour les armatures passives.

4.3.2. Pour la vérification des sections fléchies aux états-limites d'utilisation, on distingue, comme dans les Recommandations Internationales, trois "genres" de précontrainte.

Cependant, les définitions de chacun de ces genres sont quelque peu différentes de celles des Recommandations Internationales. Un certain nombre d'adaptations ont été faites, les unes pour atténuer quelques exigences de ces Recommandations, les autres pour limiter et préciser le domaine des genres II et III qui ont été scindés chacun en deux sous-genres II_a et II_b, III_a et III_b.

La contrainte de compression du béton est limitée à σ'_j/γ_b , avec $\gamma_b = 1,5$ en construction et $\gamma_b = 1,8$ en service (et $\gamma_b = 1,6$ dans certains cas - article 21.3.1).

Les contraintes de traction ne doivent pas dépasser les valeurs indiquées dans l'article 21.3.2 de l'Instruction. Ces valeurs sont différentes suivant les genres et les sous-genres, suivant les cas de charge et suivant qu'on se trouve dans la section d'enrobage ou en dehors de la section d'enrobage. La "section d'enrobage" est la partie de la section qui entoure les armatures de précontrainte traversant la section ; la "zone d'enrobage", qui est à considérer dans certains cas, est la partie de la section qui entoure l'ensemble des armatures de précontrainte situées dans la section, quelle que soit leur direction.

En genre I, la section doit rester entièrement comprimée.

Le genre II correspond à un état-limite de formation des fissures.

En genre II_a, la résistance à la traction σ_j ne doit être dépassée en aucun point de la section. En genre II_b, la contrainte de traction peut atteindre 1,3 à 1,8 σ_j suivant les cas de charge.

Le genre III correspond à un état-limite d'ouverture des fissures. La contrainte de traction peut atteindre 2 σ_j en genre III_a et 2,5 σ_j en genre III_b.

En outre des règles détaillées sont données dans les articles suivants (21.4 et 21.5) sur les pourcentages minimaux d'armatures passives (qui sont plus importants que ceux qui résultent des Recommandations Internationales dont la variation est continue, sans discontinuité lorsqu'on passe d'un genre à l'autre), sur leur contrainte maximale de traction, sur la surtension maximale des armatures de précontrainte et sur les conditions à respecter dans les sections de joints ou de reprise.

Des indications sont données dans la circulaire de présentation de l'Instruction sur le choix du genre et du sous-genre, suivant la nature de la construction et l'atmosphère plus ou moins agressive à laquelle elle sera exposée.

4.4. Justification vis-à-vis des sollicitations tangentés.

En ce qui concerne les sollicitations tangentés, des justifications sont demandées à la fois vis-à-vis de l'état-limite d'utilisation et de l'état-limite ultime.

La justification vis-à-vis de l'état-limite d'utilisation a pour effet de déterminer les épaisseurs d'âme. Elle consiste à vérifier que la contrainte de cisaillement et les contraintes normales satisfont à l'inégalité (article 28) :

$$\tau^2 \leq (0,25)^2 \left(1 + \frac{\sigma'_x + \sigma'_y}{\sigma'_j}\right)^2 \left(\frac{\sigma'_j}{\gamma_b} - \sigma'_x - \sigma'_y\right) (k_{\sigma_j} + \sigma'_x + \sigma'_y) + \sigma'_x \sigma'_y$$

Les justifications vis-à-vis de l'état-limite ultime comportent une vérification des armatures d'âme transversales et une vérification de la résistance du béton de l'âme (article 29).

La distinction faite dans les Recommandations Internationales entre les trois zones A, B et C qui se trouvent à rupture dans un état différent a été envisagée et prise en considération pour l'établissement des formules à employer. Mais elle n'a pas été reprise dans l'Instruction, afin de ne pas compliquer les calculs, compte tenu du fait que les résultats obtenus pour les deux méthodes sont peu différents en général.

Cependant, des précautions particulières devront être prises et des règles complémentaires seront données pour la justification de certaines sections.

5 – AUTRES REMARQUES CONCERNANT L'INSTRUCTION PROVISOIRE N° 2

L'Instruction Provisoire N° 2 comporte de très nombreuses règles de détail qu'il n'est pas possible de résumer ni même d'énumérer. Quelques-unes d'entre elles méritent néanmoins d'être signalées :

5.1. La définition de la résistance du béton (article 4).

Les bétons sont définis par leur résistance caractéristique à la compression à l'âge de 28 jours. La valeur choisie répond à la condition suivante : la probabilité p que la résistance, mesurée sur une éprouvette dans des conditions spécifiées, n'atteigne pas cette valeur est égale à 0,10.

Etant donné qu'il n'est pas possible de faire un très grand nombre d'essais pour évaluer la probabilité p , il convient de préciser les conditions dans lesquelles un béton peut être considéré comme ayant la résistance exigée.

Des indications détaillées sont données à ce sujet dans l'annexe B à la circulaire qui présente l'Instruction Provisoire N° 2 (elles seront reprises ultérieurement dans le fascicule qui traitera plus complètement de l'exécution du béton précontraint).

Il a été admis qu'une série d'essais serait réputée satisfaisante si la fréquence qui en résulte permet avec un seuil de probabilité d'erreur de 10 % d'estimer que la valeur de la probabilité p est au moins égale à 10 %.

Ceci conduit, selon les renseignements dont on dispose, à admettre comme résistance caractéristique :

- soit une valeur égale à $k M_n$, M_n étant la moyenne des résistances mesurées sur n éprouvettes et k variant de 0,7 à 0,85 suivant les cas ;
- soit une valeur égale à $M_n - k_n s_n$, s_n étant l'écart-type des résultats obtenus, k_n ayant des valeurs différentes suivant le nombre n d'éprouvettes. La valeur de k_n est généralement donnée par la formule :

$$k_n = 1,28 + \frac{3,87}{(n-1)^{2/3}}$$

(établie par M. PELTIER et présentée au Congrès de PRAGUE de 1970).

Dans les cas douteux, les résultats sont plafonnés.

5.2. La valeur maximale de la tension à l'origine des aciers de précontrainte (article 12.1.2)

Les valeurs limites fixées pour la tension à l'origine (85 % de la résistance et 95 % de la limite conventionnelle d'élasticité à 0,1 %) sont les mêmes que celles des Recommandations Internationales.

Il convient de noter que ces valeurs sont inférieures à celles qui étaient pratiquées antérieurement en France.

5.3. Les pertes de tension différées (article 12).

Les formules donnant les valeurs maximale et minimale de la précontrainte en tenant compte des pertes instantanées et différées sont les mêmes que celles des Recommandations Internationales (article R 21.32).

Une modification a été introduite pour le calcul de la relaxation (article 9.2) ainsi que pour le calcul des pertes de tension différées (article 12.3.1.). Ces pertes sont données par la formule :

$$\Delta\sigma_d = \Delta\sigma_r + \Delta\sigma_{f1} + \Delta\sigma_\rho - \frac{\Delta\sigma_\rho (\Delta\sigma_r + \Delta\sigma_{f1})}{\sigma_{pi}(x) - 0,55R_g}$$

si $\Delta\sigma_r + \Delta\sigma_{f1} < \sigma_{pi} - 0,55 R_g$ (dans le cas contraire, $\Delta\sigma_d = \Delta\sigma_r + \Delta\sigma_{f1}$)

Dans cette formule, $\Delta\sigma_r$, $\Delta\sigma_{fl}$, $\Delta\sigma_\rho$ sont les pertes dues respectivement au retrait, au fluage et à la relaxation.

$\sigma_{pi}(x)$ est la tension initiale à l'abscisse x (tension à l'origine diminuée des pertes instantanées).

R_g est la contrainte de rupture garantie de l'acier.

Le terme soustractif a pour objet de tenir compte de l'influence réciproque des différentes pertes, d'où il résulte que la perte totale est inférieure au total des pertes par retrait, fluage et relaxation considérées individuellement.

5.4. Stabilité de forme et fatigue

S'il y a lieu des justifications sont à produire vis-à-vis des états-limites de stabilité de forme (article 24) et des états-limites de fatigue (article 25). L'Instruction Provisoire ne donne sur les valeurs numériques à utiliser que des indications générales qui seront précisées ultérieurement.

5.5. Redistribution des efforts dans les systèmes hyperstatiques.

L'article 26 de l'Instruction Provisoire introduit la possibilité de prendre en compte la redistribution des efforts due aux déformations inélastiques et non linéaires des matériaux dans les structures hyperstatiques. Cette possibilité n'est ouverte que pour les sollicitations de flexion.

Lors de l'état qui précède immédiatement la ruine, des limitations sont fixées pour les flèches, qui sont calculées dans l'hypothèse de l'élasticité linéaire en dehors des sections plastifiées.

Vis-à-vis des états-limites d'utilisation, il peut être fait usage de la théorie de l'adaptation. Dans ce cas, des limitations sont fixées pour les contraintes dans le béton.

Il est noté que la théorie de l'adaptation, qui n'a pas encore la sanction de l'expérience, doit être appliquée avec la plus grande prudence dès que l'on s'éloigne des cas usuels.

Bien entendu, ces redistributions d'efforts ne doivent pas être confondues avec celles qui se produisent sous l'effet des déformations différées du béton, notamment dans les ouvrages construits par phases successives et dont le schéma statique se modifie en cours d'exécution. Ces dernières doivent être prises en compte dans tous les cas (article 15,3).

5.6. Autres règles de conception et de calcul.

Les trois derniers chapitres et plusieurs annexes de l'Instruction Provisoire sont consacrés aux zones d'about ou d'appui (chapitre VII), aux dalles (chapitre VIII) et aux dispositions constructives (chapitre IX). Ces chapitres donnent de nombreuses règles de détail dont le but est de préciser les dispositions à adopter dans des éléments difficilement accessibles au calcul, et d'assurer la durabilité des ouvrages.

On y trouve en particulier, ainsi que dans l'Annexe IV des indications importantes sur l'introduction et la diffusion des forces de précontrainte.

6 – CONDITIONS D'APPLICATION DU NOUVEAU REGLEMENT.

Compte tenu des modifications profondes introduites par le nouveau règlement dans le mode de calcul des ouvrages et dans les habitudes des projeteurs, il a été décidé de le mettre en application de manière progressive.

Pendant une période de quelques années, l'Instruction Provisoire de 1965, dite Instruction Provisoire N° 1, restera donc en vigueur. Le nouveau règlement, dit Instruction Provisoire N° 2, ne sera utilisé que pour certaines constructions, après accord des services techniques officiels; les projets correspondants seront contrôlés de près de manière à déceler soit les erreurs d'interprétation, soit les insuffisances éventuelles du règlement lui-même.

Cette période d'expérimentation permettra de mettre à l'épreuve ce nouveau règlement, d'en apprécier les résultats et d'en modifier s'il y a lieu certaines formulations et certaines valeurs numériques. En effet, malgré les tests préalables auquel il a été soumis, il est possible que l'expérience des projets réels fasse apparaître la nécessité de quelques corrections ; il est probable ainsi que certaines simplifications pourront être apportées au texte actuel, notamment dans le domaine des dalles du bâtiment, qui feront l'objet de l'Annexe VII qui n'a pas encore été rédigée.

Elle permettra en même temps de former les ingénieurs et les projeteurs qui auront tous à utiliser le nouveau règlement lorsqu'il sera généralisé. Malgré le nombre des sessions organisées dans ce but, il est certain que ce "recyclage" nécessaire demandera un assez long délai.

Mais il ne fait aucun doute que l'évolution commencée depuis quelques années est irréversible et que dans un avenir plus ou moins proche les nouvelles méthodes de justification de la sécurité seront seules utilisées pour toutes les constructions.

Dans l'immédiat, il ne faut pas en attendre un bouleversement des dispositions constructives car les nouvelles règles, dans leur état actuel, conduisent à des dimensionnements peu différents des précédents. Néanmoins elles ont l'avantage d'assurer une meilleure homogénéité de la sécurité et d'obtenir, dans certains cas, des économies non négligeables.

Mais c'est surtout dans l'avenir qu'apparaîtra l'intérêt de ces nouvelles méthodes, lorsque les études et les recherches qu'elles auront suscitées permettront d'appréhender la réalité de manière plus scientifique et plus exacte.

CHAPITRE I

ACTIONS ET SOLLICITATIONS

1 – RAPPEL DES PRINCIPES GENERAUX

La terminologie et les principes de base sont empruntés aux Directives Communes relatives au calcul des constructions en date du 13 décembre 1971 auxquelles le lecteur pourra se reporter pour plus ample information. On désigne par :

- **actions** - les forces et les déformations imposées à la construction
- **sollicitations** - les efforts et moments internes qui en résultent et que l'on évalue par la résistance des matériaux

1.1. Classification des actions - Valeurs caractéristiques

L'évaluation des actions repose sur la notion théorique d'**action caractéristique**, ce qui se traduit dans la pratique par la prise en compte de deux valeurs, l'une maximale, l'autre minimale que l'on introduit dans les calculs en prenant dans chaque cas particulier la plus défavorable. Pour certaines actions l'une des valeurs caractéristiques est nulle, par exemple pour les charges d'exploitation qui peuvent varier entre zéro et une valeur nominale (réputée caractéristique) fixée par le C.P.C. ou le C.P.S.

Une autre notion importante est celle d'**actions de courte ou longue durée** étant sous-entendu que ces appellations se réfèrent à la durée d'application de l'action en cause, compte tenu de la durée de vie admise pour l'ouvrage considéré. On distingue donc schématiquement :

- Les actions de courte durée se produisant avec des amplitudes peu fréquentes et relativement peu probables.
- Les actions de longue durée (encore désignées par usuelles) qui se produisent de façon suffisamment courante pour que leur concomitance puisse être considérée comme très probable.

Les actions de longue durée comportent pratiquement :

- les charges permanentes telles que le poids propre des structures, celui des équipements, la précontrainte; observons que ces charges sont constantes ou lentement variables (effets de la relaxation et du fluage).
- certaines charges variables (essentiellement la température) pour lesquelles on a adopté des valeurs "usuelles" (correspondant à une grande fréquence d'apparition).

Les actions de courte durée (toujours variables par définition) comportent :

- des actions intermittentes telles que les charges routières ou climatiques.
- des actions cycliques (essentiellement la température) pour lesquelles on adopte des valeurs correspondant à une faible fréquence d'apparition.

Il résulte de tout ceci qu'une même action (par exemple la température) peut avoir des valeurs différentes suivant qu'elle est considérée comme de courte ou longue durée.

Signalons enfin une dernière catégorie, celle des actions accidentelles, telles que séismes, chocs, provenant de phénomènes se produisant rarement.

1.2. Valeurs caractéristiques des principales actions à prendre en compte sur les ouvrages routiers.

1.2.1. Les actions permanentes

– Poids propre.

La charge probable g (1) de poids propre à prendre en compte est évaluée à partir des dessins de coffrage de l'ouvrage et d'une masse volumique habituellement estimée à $2,5 \text{ t/m}^3$ pour le matériau "béton précontraint";

Sauf cas particulier, les valeurs caractéristiques maximale g_1 et minimale g_2 sont calculées à partir de g en ajoutant et retranchant des fractions forfaitaires, généralement $+ 6 \%$ et $- 4 \%$.

$$\text{Ainsi : } \quad g_1 = 1,06 \text{ g} \qquad g_2 = 0,96 \text{ g}$$

Dans le cas de pièces préfabriquées avec soin, on peut réduire la fourchette et prendre :

$$g_1 = 1,03 \text{ g} \qquad g_2 = 0,98 \text{ g}$$

Lorsqu'on a affaire à des pièces minces en béton (moins de 15 cm) il vaut mieux pour se fixer g_1 et g_2 , estimer directement les erreurs absolues possibles.

– Equipements fixes

Là encore, on se fixe généralement des fractions forfaitaires à ajouter et à retrancher à la charge probable g' (1).

En ce qui concerne les chapes et revêtements, notamment, on admet conformément à l'article 4.12 des Directives communes :

$$g'_1 = 1,20 \text{ g} \qquad g'_2 = 0,80 \text{ g}$$

Mais il peut être prudent de prévoir la présence de renforts destinés à reprendre des irrégularités de profil et d'envisager la possibilité de rechargements ultérieurs.

– Précontrainte

Comme on le verra en détail dans le chapitre suivant, on définit pour la précontrainte deux valeurs caractéristiques, l'une maximale P_1 , l'autre minimale P_2 .

Ces deux valeurs sont centrées sur la valeur probable P :

$$P = \frac{P_1 + P_2}{2} \text{ de sorte que l'on peut poser } \begin{aligned} P_1 &= (1 + \lambda) P \\ P_2 &= (1 - \lambda) P \end{aligned}$$

λ étant l'amplitude relative de la fourchette de précontrainte.

1.2.2. Les actions variables.

a – Charges d'exploitation.

Le fascicule 61 titre II du C.P.C. définit des valeurs nominales qui sont à considérer comme valeurs caractéristiques de courte durée.

(1) Dans les applications relatives aux poutres g et g' désignent des charges par mètre linéaire de poutre.

b – Vent

Le même fascicule 61, titre II du C.P.C. définit des valeurs à prendre en compte sur les ouvrages pour la pression du vent. Ces valeurs sont à considérer comme valeurs caractéristiques de courte durée et ne sont jamais cumulables avec les charges d'exploitation sur les ponts routes.

c – Température

Les Directives Communes définissent en commentaire des Art. 4.2.1. et 4.2.2. les écarts de température par rapport à la température de construction; les valeurs caractéristiques sont résumées dans le tableau suivant :

	$\delta \theta$ max	$\delta \theta$ mini
courte durée	+ 30°	- 40°
longue durée	+ 20°	- 25°

La température a ainsi la particularité d'avoir 4 valeurs caractéristiques.

Si l'on admet que la température initiale de l'ouvrage est généralement comprise entre 8° C et 14° C, les valeurs caractéristiques de "courte durée" tiennent compte de températures pouvant aller au moins de: + 14 - 40 = - 26° C à + 8 + 30 = 38° C, c'est-à-dire de températures ayant une faible probabilité d'être dépassées; les valeurs caractéristiques de "longue durée" tiennent compte de températures allant de + 14 - 23 = - 11° C à + 8 + 20 = + 28° C, c'est-à-dire de températures qui sont plus fréquemment atteintes mais qui restent supérieures (ou inférieures) aux températures moyennes maximales (ou minimales).

Ces variations de température engendrent des sollicitations non négligeables dans les structures non librement dilatables. Il peut y avoir lieu d'envisager d'autres phénomènes liés à la température. Ainsi le gradient thermique qui s'établit entre l'intrados et l'extrados d'un tablier hyperstatique provoque l'apparition d'efforts importants. Des indications sur ce point sont données en 2.2.3.

1.2.3. Les actions accidentelles.

Elles sont précisées par le C.P.S. Seuls les chocs de bateaux ont fait l'objet d'une définition réglementaire dans la circulaire N° 71-155 du 29 décembre 71 relative au titre II du fascicule 61 du C.P.C.

Sur les voies à grand gabarit, on prend : 8 000 KN pour les chocs frontaux
1 600 KN pour les chocs latéraux

et sur les voies à petit gabarit : 1 000 KN pour les chocs frontaux
200 KN pour les chocs latéraux

Ces actions ne sont à considérer que vis-à-vis des états-limites ultimes.

1.3. Sollicitations de calcul

En pratique, il est rare d'avoir à considérer des actions isolées. Ce sont, en général des ensembles d'actions simultanées qu'il faut prendre en compte dans les calculs. La formation des combinaisons correspondantes est basée sur le classement précédemment évoqué en "actions de longue durée" et "actions de courte durée".

Les sollicitations de calcul sont alors de la forme :

$$\gamma_{S3} \left[\sum_i S(\gamma_{Qi} Q_i) \right]$$

avec $\gamma_{Qi} = \gamma_{S1i} \times \gamma_{S2i}$

$\gamma_{S_{1i}} \geq 1$ a pour objet de couvrir un dépassement éventuel de la valeur caractéristique Q_i .

$\gamma_{S_{2i}} \leq 1$ est là pour tenir compte de la probabilité réduite de simultanéité de plusieurs actions de courte durée; dans la plupart des cas, où on considère une seule action de courte durée, le coefficient $\gamma_{S_{2i}}$ devient sans objet.

$\gamma_{S_{3i}} \geq 1$ englobe les incertitudes sur les sollicitations provenant de la simplification des schémas de calcul ou de phénomènes négligés.

On distingue, selon le nombre d'actions de courte durée ou d'actions accidentelles entrant dans la combinaison :

- des combinaisons fondamentales (0 ou 1 seule action de courte durée).
- des combinaisons supplémentaires (2 actions de courte durée)
- des combinaisons accidentelles (1 seule action accidentelle).

A ces actions, soit de courte durée, soit accidentelle, s'ajoutent en règle générale, les valeurs caractéristiques de longue durée des autres actions qui peuvent être simultanées avec les précédentes.

Vis-à-vis des états-limites ultimes de résistance, les combinaisons à considérer sont :

- fondamentale (art. 16,1) : $1,2 \left[S(1,1 Q_{L1}) + S(0,9 Q_{L2}) + \left\{ \begin{array}{l} S(P_1) \\ \text{ou} \\ S(P_2) \end{array} + S(\gamma_{Qc} Q_c) \right\} \right]$
- supplémentaire (art. 16,2) : $1,2 \left[S(1,1 Q_{L1}) + S(0,9 Q_{L2}) + \left\{ \begin{array}{l} S(P_1) \\ \text{ou} \\ S(P_2) \end{array} + S(\gamma_{Qc1} Q_{c1}) + S(\gamma_{Qc2} Q_{c2}) \right\} \right]$
- accidentelle (art. 16,3) : $1,2 \left[S(1,1 Q_{L1}) + S(0,9 Q_{L2}) + \left\{ \begin{array}{l} S(P_1) \\ \text{ou} \\ S(P_2) \end{array} + S(Q_{Ac}) \right\} \right]$

Vis à vis des états limites d'utilisation :

- fondamentale (art. 17,1) : $S(Q_{L1}) + S(Q_{L2}) + \left\{ \begin{array}{l} S(P_1) \\ \text{ou} \\ S(P_2) \end{array} + S(\gamma_{Qc} Q_c) \right\}$
- supplémentaire (art. 17,2) : $S(Q_{L1}) + S(Q_{L2}) + \left\{ \begin{array}{l} S(P_1) \\ \text{ou} \\ S(P_2) \end{array} + S(\gamma_{Qc1} Q_{c1}) + S(\gamma_{Qc2} Q_{c2}) \right\}$

Dans ces formules, Q_{L1} représente l'ensemble des actions de longue durée agissant dans le même sens que les actions de courte durée ; Q_{L2} l'ensemble des actions de longue durée agissant en sens inverse ; Q_{ci} les actions de courte durée ; Q_{Ac} une action accidentelle. Les exemples donnés plus loin permettent de préciser ce qu'il faut entendre par Q_{L1} et Q_{L2} . Les γ_{Qc} afférents aux charges réglementaires des ponts-routes en service sont résumés ci-dessous :

Charges	Etat-limite ultime	Etat-limite d'utilisation
1. Charges sur chaussées		
A et B (B_c, B_t, B_r)	1,33	1,2
M et E	1,1	1
Forces centrifuges	1,33	1,2
Efforts de freinage	1,33	1,2
Charges sur remblais	1,33	1,2

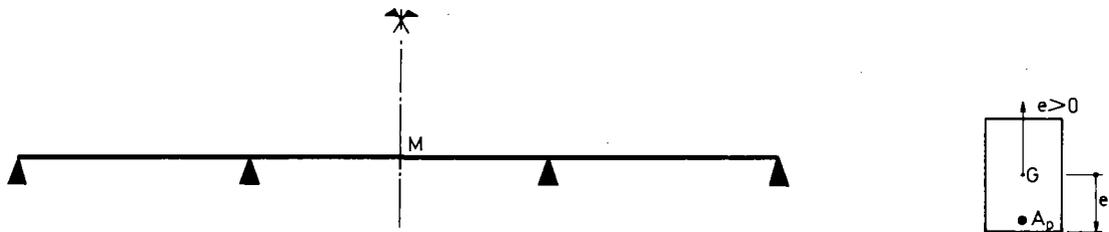
Charges	Etat-limite ultime	Etat-limite d'utilisation
2. Charges sur trottoirs		
Générale (150 kg/m ²)	1,33	1
Locale : - (450 kg/m ²)	1,33	1
- roue de 6 t	1,33	0
3. Effets du vent	1,25	1
4. Charges accidentelles		
Chocs de bateaux	1	0
Séismes	1	0

Pour les ponts en cours d'exécution, le règlement, le règlement définit les γ_{Qc} relatifs aux charges de chantier (art. 16.1 et 16.2).

On doit considérer les charges de chantier (appliquées en cours d'exécution), soit appliquées seules (avec un coefficient $\gamma_{Qc} = 1,4$), soit appliquées en même temps que le vent (valeurs de l'article 14.2 du titre II du fascicule 61). Dans ce dernier cas les coefficients γ_{Qc} valent 1,33 pour les charges de chantier et 1,25 pour le vent concomitant.

2 – EXEMPLES

2.1. Proposons-nous de définir les combinaisons qu'il y a lieu de prendre en compte pour justifier à la flexion, aux états limites d'utilisation, la section médiane d'un ouvrage à trois travées.

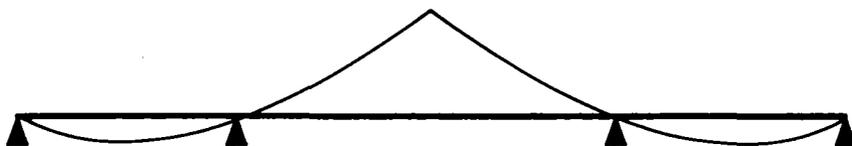


Supposons cet ouvrage coulé sur cintre, la précontrainte filante et $M_G > 0$ dans la section considérée, M_G désignant le moment fléchissant dû aux charges permanentes moyennes (ou probables).

En général, les seules actions à considérer sont :

- la charge permanente (densité g)
- les charges d'exploitation
- la précontrainte.

2.1.1. Combinaisons donnant le moment maximum



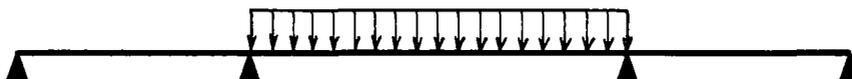
La ligne d'influence du moment fléchissant ayant l'allure indiquée ci-dessus, on pourrait songer à donner à g sa valeur caractéristique maximale g_1 sur la travée centrale et sa valeur caractéristique minimale g_2 sur les travées de rive

Cette hypothèse, extrêmement pessimiste puisque sa probabilité est pratiquement nulle aurait l'inconvénient de compliquer très sensiblement les calculs puisque l'on serait conduit à envisager des distributions de charge permanente différentes pour chaque section de calcul.

En fait, on doit admettre que l'on a tout au long de l'ouvrage ou bien g_1 ou bien g_2 (comme on l'a vu : $g_1 = 1,06 g$, $g_2 = 0,96 g$)

Ici, comme on a supposé $M_G > 0$ dans la section considérée, on prendra $M_{G1} = 1,06 M_G$ pour avoir le maximum.

On appliquera d'autre part les charges d'exploitation sur la travée centrale, de façon à obtenir $M_R \max$, moment du à celles-ci. Pour simplifier on suppose qu'il s'agit uniquement de charges de chaussée (A ou B).



Pour ce qui est de la précontrainte, il est à peu près évident que c'est la valeur caractéristique minimale $P_2 = (1 - \lambda) P$ (P représentant la valeur probable de la précontrainte) qu'il faudra associer aux sollicitations précédentes puisque le risque correspondant est celui d'une compression excessive sur la fibre supérieure ou d'une traction excessive sur la fibre inférieure

Le moment hyperstatique M_H , à priori positif accentue encore le risque précédent, mais on ne saurait raisonnablement admettre que sa valeur caractéristique maximale M_{H1} aille de pair avec P_2 puisque M_H est proportionnel à P . On retiendra donc $M_{H2} = (1 - \lambda) M_H$.

La combinaison fondamentale :

$$S(Q_{L1}) + S(Q_{L2}) + \begin{cases} S(P_1) \\ \text{ou} \\ S(P_2) \end{cases} + S(\gamma_{Qc} Q_c)$$

aura ainsi pour composantes :

$$S_{Q_L \quad Q_c \max} \begin{cases} N = P_2 \\ M = M_{G1} + 1,2 M_{R \max} + P_2 \cdot e_p + M_{H2} \end{cases}$$

2.1.2. Combinaison donnant le moment minimum.

On fera intervenir, cette fois-ci $M_{G2} = 0,96 M_G$, $M_{R \min}$ (correspondant à une disposition des charges routières d'exploitation sur les travées de rive), $P_1 = (1 + \lambda) P$ et $M_{H1} = (1 + \lambda) M_H$

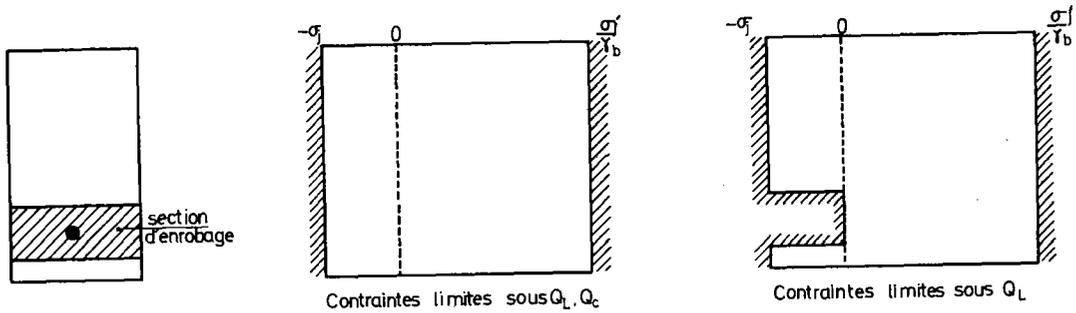
D'où :

$$S_{Q_L \quad Q_c \min} \begin{cases} N = P_1 \\ M = M_{G2} + 1,2 M_{R \min} + P_1 \cdot e_p + M_{H1} \end{cases}$$

2.1.3. Combinaison la plus favorable sous l'effet des seules actions de longue durée.

On se montre souvent plus exigeant, du côté des tractions, pour les actions de longue durée seules que pour les combinaisons faisant intervenir des actions de courte durée.

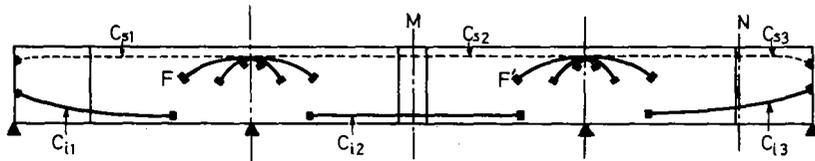
En genre IIa. on exige ainsi (cf.III.1.) que la section d'enrobage (section entourant les armatures de précontrainte) reste entièrement comprimée sous l'effet des actions de longue durée seules, alors qu'on y tolère des tractions atteignant σ_j sous les autres cas de charge.



Le cas le plus défavorable est évidemment celui qui correspond à g_1 et à P_2 soit :

$$S_{QL \max} \begin{cases} N = P_2 \\ M = M_{G1} + P_2 \cdot e_p + M_{H2} \end{cases}$$

2.2. Reprenons l'ouvrage précédent à 3 travées mais supposons le construit par encorbellements successifs à partir des piles.



Plusieurs familles de câbles apparaissent :

- les câbles de fléau, F et F'
- les câbles de continuité inférieurs C_{i1} , C_{i2} et C_{i3}
- les câbles de continuité supérieurs C_{s1} , C_{s2} et C_{s3}

Nous admettons que la construction s'achève par le clavage de la travée centrale et que seuls, les câbles de continuité C_{i2} et C_{s2} engendrent des moments hyperstatiques de précontrainte (positifs pour C_{i2} , négatifs pour C_{s2}).

2.2.1. Valeurs caractéristiques de la précontrainte.

Il n'est pas absurde d'admettre que certaines familles de câbles sont tendues à leur valeur caractéristique maximale, d'autres à leur valeur caractéristique minimale.

Pour étudier, par exemple, les contraintes dans la section N sous moment maximum (risques de tractions excessives sur la fibre inférieure ou de compressions excessives sur la fibre supérieure), on peut envisager le cas où :

- les câbles traversant la section ont les valeurs caractéristiques les plus défavorables soit :
 - câbles C_{i3} tendus à P_2 (valeur caractéristique minimale)
 - câbles C_{s3} tendus à P_1 (valeur caractéristique maximale)
- le moment hyperstatique de précontrainte est maximal, ce qui revient à supposer que :
 - les câbles C_{i2} sont tendus à P_1
 - les câbles C_{s2} sont tendus à P_2

Une telle hypothèse est évidemment particulièrement défavorable et hautement improbable car les diverses causes d'erreur font en général que les écarts par rapport à la valeur probable n'ont pas toujours lieu dans le même sens.

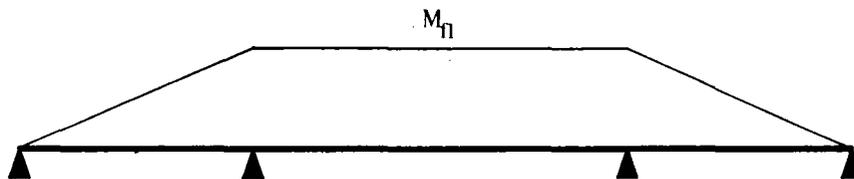
D'un autre côté, la prise en compte de ces combinaisons multiplierait de façon prohibitive le nombre de calculs.

On se contentera donc, en général de supposer que la précontrainte a, **tout au long de l'ouvrage**, ou bien sa valeur caractéristique maximale, ou bien sa valeur caractéristique minimale.

2.2.2. Adaptation par fluage.

Lorsqu'une structure (comme c'est le cas ici) est construite selon un schéma statique différent de son schéma statique final, le fluage du béton entraîne une modification progressive des efforts dans le temps.

Dans notre exemple, si l'on suppose que la construction s'est effectuée de façon rigoureusement symétrique, les deux fléaux ayant exactement le même âge, il se développe un moment d'adaptation M_{fl} dont l'allure est la suivante :



La valeur de M_{fl} dépend, entre autres choses, du calendrier de construction, de P et de M_G en chaque section. Il est légitime, compte tenu de la précision que l'on peut attendre des calculs, de raisonner sur les valeurs probables P et M_G pour évaluer M_{fl} .

Comme l'ouvrage doit pouvoir résister aussi bien le jour de l'inauguration, alors que l'adaptation ne s'est pas encore produite, que quelques dizaines d'années plus tard, il est raisonnable de prendre comme valeurs caractéristiques maximale et minimale :

$$M_{fl1} = M_{fl}$$

et

$$M_{fl2} = 0$$

2.2.3. Gradient thermique

L'ensoleillement du tablier (généralement revêtu d'un produit noir) provoque une différence de température entre la fibre supérieure et la fibre inférieure. Cette différence de température, mesurée sur un certain nombre d'ouvrages, atteint couramment une dizaine de degrés dans la journée pour s'annuler pratiquement pendant la nuit.

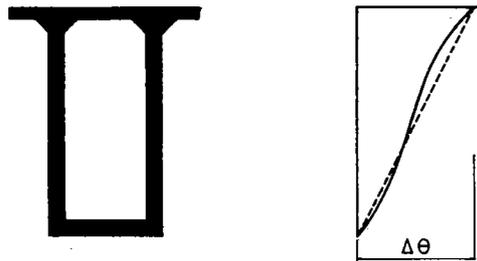
Une bonne partie de cette différence de température est reprise dans l'épaisseur du hourdis supérieur où le gradient thermique vertical présente donc une valeur nettement plus forte que sur le reste de la hauteur de la poutre. Il en résulte un état complexe de contraintes, difficile à appréhender par le calcul.

On schématisera à l'extrême en supposant le gradient thermique **uniforme** sur toute la hauteur de la poutre.

Compte tenu du caractère défavorable de cette hypothèse pour l'évaluation des moments engendrés par le gradient thermique dans une structure hyperstatique, on admettra comme valeur courante de la différence de température entre hourdis supérieur et hourdis inférieur.

$$\Delta \theta = + 5^{\circ} \text{ C}$$

Cette valeur caractéristique de **longue durée** est cumulable avec le poids propre, les charges permanentes et les charges d'exploitation.



On peut en outre considérer une valeur caractéristique de **courte durée**, pour couvrir les valeurs exceptionnelles du gradient thermique:

$$\Delta \theta = +10^{\circ} \text{ C}$$

Les efforts correspondants ne se cumulent pas avec ceux qui proviennent des charges d'exploitation.

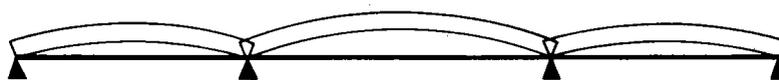
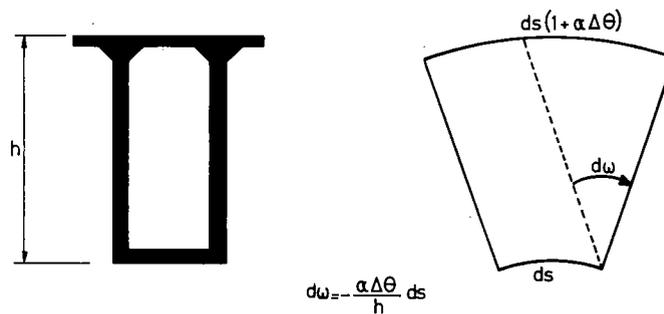
Qu'il s'agisse de la valeur caractéristique de longue durée ou de la valeur caractéristique de courte durée, les efforts qui en résultent doivent être calculés à partir du **module instantané** du béton, puisqu'ils correspondent à un phénomène de périodicité journalière.

Ce phénomène de différence de température entre les fibres extrêmes, jusqu'à présent négligé, doit systématiquement être considéré dans les ouvrages construits par encorbellements successifs, car il joue, sur ce type de structure, dans le même sens que les redistributions d'efforts dues au fluage. Il faut donc considérer dans ce cas que la dernière phrase de l'Art. 8 du règlement n'est pas valable.

En se limitant aux valeurs de longue durée (cumulables avec les charges d'exploitation), on doit ainsi prendre en compte les deux valeurs caractéristiques extrêmes :

$$M_{\Delta\theta_1} = M_{50}$$

$$\text{et } M_{\Delta\theta_2} = 0$$



Déformations dues à $\Delta\theta$ du tablier rendu isostatique .

Pour justifier la section médiane M de l'ouvrage précédemment défini, on doit donc considérer, aux états limites d'utilisation :

$$S_{QL \quad Q_c \quad \max} \left\{ \begin{array}{l} N = P_2 \\ M_{\max} = M_{G1} + 1,2 M_{R \max} + P_2 e_p + M_{H2} + M_{f11} + M_{\Delta\theta_1} \end{array} \right.$$

$$S_{QL \quad Q_c \quad \min} \left\{ \begin{array}{l} N = P_1 \\ M_{\min} = M_{G2} + 1,2 M_{R \min} + P_1 e_p + M_{H1} \end{array} \right.$$

$$S_{QL \quad \max} \left\{ \begin{array}{l} N = P_2 \\ M = M_{G1} + P_2 e_p + M_{H2} + M_{f11} + M_{\Delta\theta_1} \end{array} \right.$$

$$S_{QL \quad \min} \left\{ \begin{array}{l} N = P_1 \\ M = M_{G2} + P_1 e_p + M_{H1} \end{array} \right.$$

CHAPITRE II PRECONTRAINTE

I – PRINCIPE DU CALCUL DE LA TENSION D'UN CABLE (article 12)

Une des principales innovations du Nouveau Règlement consiste à introduire dans les calculs 2 valeurs caractéristiques de la tension :

$$\sigma_{P_1} = 1,02 \sigma_{P_0} - 0,80 \Delta \sigma_P$$

$$\sigma_{P_2} = 0,98 \sigma_{P_0} - 1,20 \Delta \sigma_P$$

au lieu de la valeur probable unique :

$$\sigma_P = \sigma_{P_0} - \Delta \sigma_P$$

Dans ces expressions σ_{P_0} représente la contrainte à la mise en tension immédiatement derrière l'ancrage, $\Delta \sigma_P$ la perte de tension.

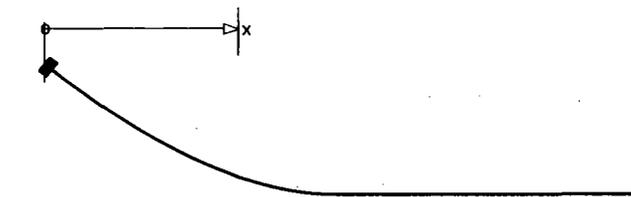
On remarque que $\sigma_P = \frac{\sigma_{P_1} + \sigma_{P_2}}{2}$

σ_{P_0} est limité à :

0,85 R_g
0,95 T_g si on peut remplacer un fil rompu
0,90 T_g dans le cas contraire.
la valeur fixée dans l'agrément du procédé.

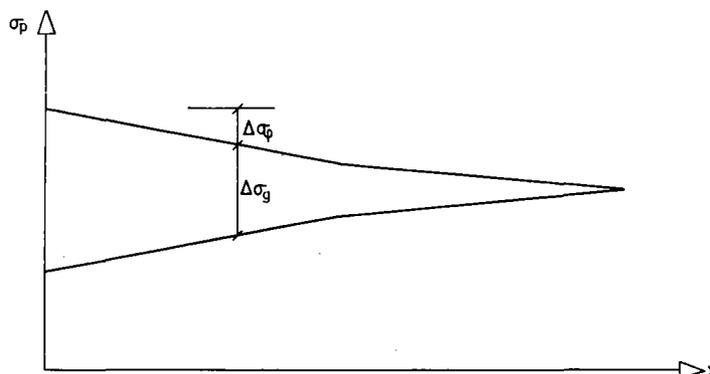
Dans les cas les plus simples, le calcul des pertes est extrêmement voisin de celui préconisé par l'Instruction provisoire du 12 août 1965 :

1.1. Pertes instantanées



Elles ont pour expression :

$$\Delta \sigma_i = \Delta \sigma_\varphi + \Delta \sigma_g + \Delta \sigma_e$$



avec : $\Delta\sigma_\varphi =$ perte par frottement = $\sigma_{Po} \left[1 - e^{-(\alpha+\varphi)x} \right]$

$\Delta\sigma_g =$ perte de tension à l'ancrage (perte par rentrée de cône)

$\Delta\sigma_e =$ perte par déformation instantanée du béton (résultant de l'échelonnement des mises en tension des différents câbles).

$\Delta\sigma_e \# \frac{1}{2} \frac{\sigma'_{bj}}{E_{ij}} E_p$, σ'_{bj} étant la contrainte probable du béton au niveau des câbles au moment où sont faites ces mises en tension (béton âgé de j jours) et E_p le module élastique des aciers de précontrainte.

La tension obtenue, une fois effectuées ces pertes instantanées, est dénommée tension initiale :

$$\sigma_{Pi} = \sigma_{Po} - \Delta\sigma_i$$

1.2. Pertes différées

Elles sont données par :

$$\Delta\sigma_d = \Delta\sigma_r + \Delta\sigma_{fl} + \Delta\sigma_\rho - \frac{\Delta\sigma_\rho (\Delta\sigma_r + \Delta\sigma_{fl})}{\sigma_{Pi} - 0,55 R_g} \quad \text{si } \Delta\sigma_r + \Delta\sigma_{fl} < \sigma_{Pi} - 0,55 R_g$$

$$\Delta\sigma_d = \Delta\sigma_r + \Delta\sigma_{fl} \quad \text{dans le cas contraire}$$

On ne cumule donc plus brutalement retrait, fluage et relaxation, mais on a introduit un terme soustractif pour tenir compte de leur action simultanée.

Dans ces formules :

$$\Delta\sigma_r = \text{perte par retrait} = E_p \epsilon_r \left[1 - r(t_0) \right]$$

$$\Delta\sigma_{fl} = \text{perte par fluage} = \frac{K_{fl}}{E_{ij}} \sigma'_b E_p \quad (\sigma'_b = \text{contrainte finale probable du béton au niveau des câbles ; } K_{fl} \# 2)$$

$$\Delta\sigma_\rho = \text{perte par relaxation} = \sup. \begin{cases} 9,6 \rho 1000 (\sigma_{Pi}/R_g - 0,55) \sigma_{Pi} \\ 4 (\rho 3000 + \frac{2,5}{100}) (\sigma_{Pi}/R_g - 0,55) \sigma_{Pi} \end{cases}$$

Toutefois, si l'on applique le règlement à la lettre, le calcul précédent n'est valable que lorsque σ'_{bj} (contrainte probable du béton au niveau des câbles) varie peu au cours du temps.

Si cette contrainte varie tout en restant constamment inférieure à $1,2 \sigma'_b$, on peut continuer à appliquer le schéma de calcul précédent tout en tenant compte d'une perte complémentaire :

$$\text{Art. 12,32} \quad \Delta\sigma_c = k_j (\sigma'_{bj} - \sigma'_b) \quad \text{avec : } k_j = \frac{140 - 5j}{j + 12} \quad (\text{formule valable pour } 2 \leq j \leq 28)$$

Enfin, dans le cas fréquent où $\sigma'_{bj} > 1,2 \sigma'_b$, il faut recourir à des calculs plus complexes, s'appuyant sur la théorie des déformations du béton.

$$\text{En particulier, la déformation de fluage du béton est de la forme : } \epsilon_{fl} = \frac{\sigma'_b}{E_{ij}} r(t)$$

K_{fl} pouvant s'écrire d'après l'annexe I : $K_{fl} = k_b k_c k_d k_{e2}$

k_b représente l'influence de la composition du béton.

k_c dépend des conditions climatiques, k_d de l'âge du béton à la mise en charge, enfin k_{e2} des dimensions transversales de la pièce.

La perte par fluage vaut donc d'après l'annexe I :

$$E_p \epsilon_{fl} = E_p k_b k_c k_{e2} \left[\frac{\sigma'_{bj}}{E_j} k_{dj} r (t - j) + \sum_i \frac{\Delta\sigma'_{bi}}{E_i} k_{di} r (t - i) \right]$$

Cette formule permet de rendre compte, de façon satisfaisante de l'extrême déformabilité du béton jeune.

On pourrait également faire intervenir des formules du même type pour l'étude du retrait (un calcul détaillé est fourni en 3.2.2. du présent chapitre).

L'attention est cependant attirée sur les risques considérables d'erreur que l'on pourrait commettre en multipliant de façon inconsidérée des coefficients dont chacun n'est connu qu'avec une assez large incertitude. Dans ces conditions il est vivement conseillé d'adopter pour le produit $k_b k_c k_{e2}$ une valeur voisine de 2.

2 – PREMIER EXEMPLE (Câblage d'un hourdis)

2.1. Données Générales :

Il s'agit de calculer la tension d'un câble de hourdis de pont à poutres multiples sous chaussée. La dalle, large de 13,20 m est précontrainte transversalement par des câbles 12 \varnothing 8 du Système Freyssinet, tendus par une seule extrémité, alternativement du côté amont et du côté aval, de façon à obtenir une précontrainte quasi-uniforme.

Tracé des câbles : ils suivent l'extrados du hourdis et présentent une déviation angulaire totale de 0,08 radian pour une longueur de 12,80 m.

Nature des fils : ce sont des \varnothing 8 de classe III et de sous-classe TBR.

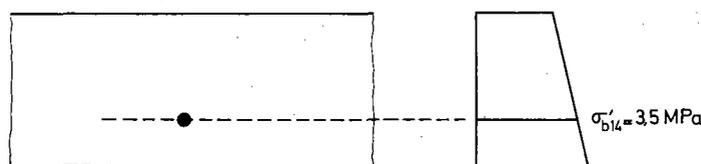
Qualité du béton : Résistance caractéristique : $\sigma'_{28} = 30$ MPa

Les valeurs numériques indispensables au calcul de la tension sont résumées ci-après.

$T_g = 1471$ MPa	$A = 603$ mm ²	$f = 0,20$
$R_g = 1658$ MPa	$\rho_{1000} = 2$ %	$\varphi = 2,2 \times 10^{-3}$
$T_o = 1301$ MPa	$\rho_{3000} = 2,5$ %	$g = 6$ mm (rentrée de cône).

T_o est la contrainte maximale sous l'ancrage, à la mise en tension, fixée dans la circulaire d'agrément du procédé.

On admettra qu'au moment où on met en tension, le béton du hourdis est âgé de 14 j et que sa contrainte probable, au niveau du centre de gravité des armatures de précontrainte vaut : $\sigma'_{b14} = 3,5$ MPa.



2.2. Calcul des pertes

2.2.1. Contrainte maximale à l'origine : $\sigma_{P_0} \leq \min(T_0; 0,85 R_g; 0,95 T_g)$ soit $\min(1301; 1409; 1397)$ c'est-à-dire $\sigma_{P_0} = 1301$ MPa

2.2.2. Pertes de tension instantanée

a) pertes par frottement

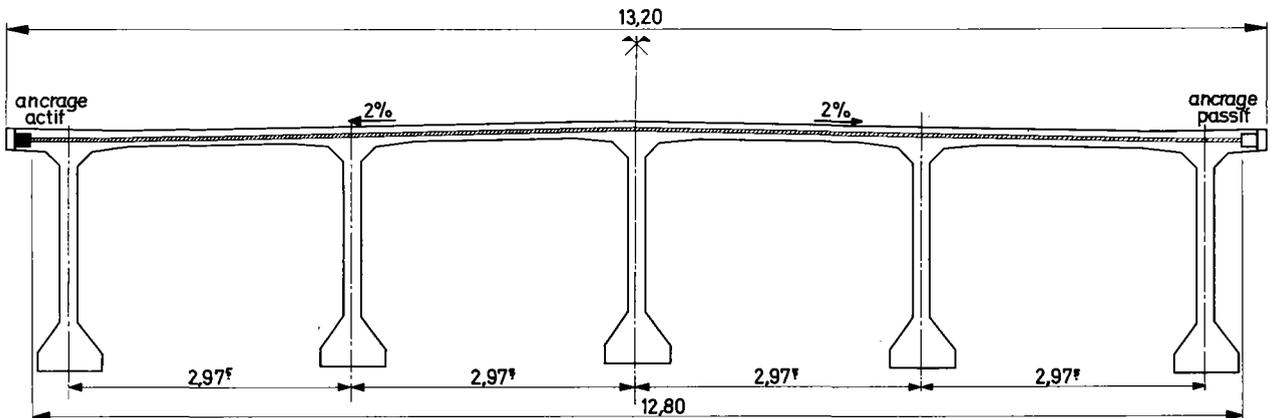
La contrainte initiale en un point du câble, situé à une distance de l'origine, est donnée par l'expression

$$\sigma_{P_0}(x) = \sigma_{P_0} e^{-f\alpha - \varphi x}$$

avec f : coefficient de frottement de l'armature contre sa gaine ($f = 0,2$)

φ : coefficient de perte relative de tension par unité de longueur ($\varphi = 2,2 \cdot 10^{-3}$)

Dans notre exemple : $L = 12,8$ m (câbles tendus par une seule extrémité)
 $\alpha = 0,08$ radian

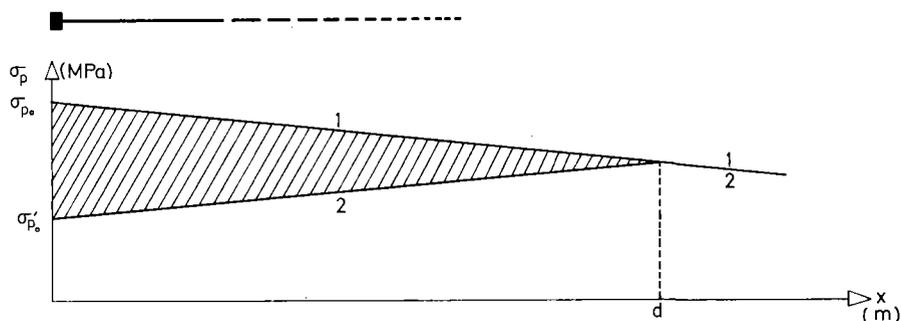


Donc avant blocage du cône actif, la valeur de la précontrainte à l'ancrage passif est :

$$\begin{aligned} \sigma_{PL} &= \sigma_{P_0} e^{-(0,2 \times 0,08 + 12,8 \times 2,2 \cdot 10^{-3})} \\ &= 1301 e^{-0,044} \quad \text{c'est-à-dire : } \sigma_{PL} = 1244 \text{ MPa} \end{aligned}$$

b) Pertes par rentrée du cône mâle, à l'ancrage actif

Nous allons calculer la longueur d de la zone où se fait sentir l'effet de la rentrée du cône ($g = 6$ mm)



La pente de la droite $\sigma_{P_0}(x)$ est $\frac{1301 - 1244}{12,8} = 4,45 \text{ MPa/m}$

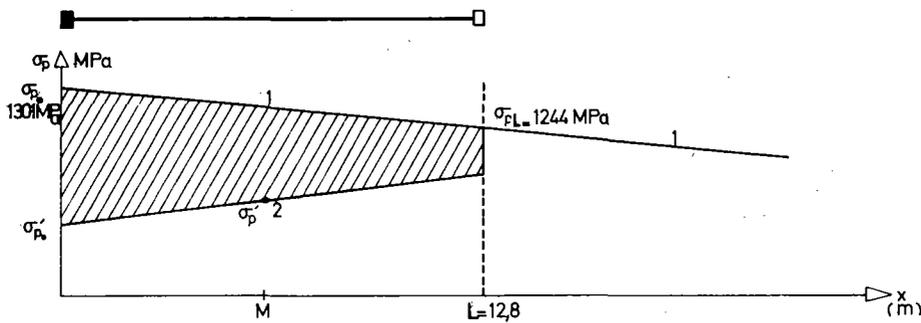
La rentrée du cône s'évalue comme suit : $g = \int_0^d \frac{\Delta\sigma_p(x)}{E_p} dx = \frac{1}{E_p} \frac{\sigma_{P_0} - \sigma'_{P_0}}{2} d$

or $\sigma'_{P_0} = \sigma_{P_0} - 2 d \times 4,45$ d'où : $2 g E_p = (\sigma_{P_0} - \sigma'_{P_0}) d = 8,9 d^2$

d vaut donc : $\sqrt{\frac{2g E_p}{8,9}} = 16,4 \text{ m}$ avec $E_p = 200\,000 \text{ MPa}$

L'effet de la rentrée du cône se fait sentir sur toute la longueur de l'ouvrage.

On a en réalité le diagramme suivant :



donc : $g = \frac{1}{E_p} \cdot \frac{(\sigma_{P_0} - \sigma'_{P_0}) + (\sigma_{PL} - \sigma'_{PL})}{2} \times 12,8$ d'où $\frac{2g E_p}{12,8} = (\sigma_{P_0} - \sigma'_{P_0}) + (\sigma_{PL} - \sigma'_{PL})$

c'est-à-dire : $\sigma'_{P_0} + \sigma'_{PL} = \sigma_{P_0} + \sigma_{PL} - \frac{2g E_p}{12,8}$ or $\sigma'_{P_0} + \sigma'_{PL} = 2 \sigma'_P$ avec σ'_P : précontrainte dans l'axe du pont, en M, après blocage.

d'où : $\sigma'_P = \frac{1}{2} (1301 + 1244 - \frac{2 \times 6.10^{-3} \times 200\,000}{12,8})$

soit $\sigma'_P = 1178 \text{ MPa}$

c) Pertes par raccourcissement instantané du béton

Elles sont évaluées par la formule $\Delta\sigma_e = \frac{1}{2} \frac{\sigma'_{bj}}{E_{ij}} E_p$

avec : σ'_{bj} , contrainte probable du béton au niveau du centre de gravité des armatures de précontrainte à j jours.

E_{ij} : module d'élasticité instantané du béton au même moment.

Ici $j = 14$ d'où $\sigma'_j = 0,685 \cdot \sigma'_{28} \cdot \log(j + 1) = 24,2 \text{ MPa}$

$\log(j + 1)$: logarithme décimal

d'où $E_{ij} = 7590 \sqrt{24,2} = 37\,300 \text{ MPa}$

On a donc $\Delta\sigma_e = \frac{3,5}{2} \times \frac{200\,000}{37\,300} = 9 \text{ MPa}$

d'où la valeur de la précontrainte au milieu du tablier, toutes pertes instantanées comprises :

$$\sigma_{Pi} = 1178 - 9 = 1169 \text{ MPa}$$

et les pertes instantanées représentent : $1301 - 1169 = 132 \text{ MPa}$

2.2.3. Pertes de tension différées (avec les valeurs simplifiées de l'art. 6 pour le retrait et le fluage).

$$\text{Elles ont pour expression } \Delta\sigma_d = \Delta\sigma_r + \Delta\sigma_{fl} + \Delta\sigma_\rho - \frac{\Delta\sigma_\rho (\Delta\sigma_r + \Delta\sigma_{fl})}{\sigma_{Pi} - 0,55 R_g}$$

avec $\Delta\sigma_r$: perte finale de tension due au retrait du béton supposé agir seul. (voir nota page 31)

$\Delta\sigma_{fl}$: perte finale de tension due au fluage du béton sous une contrainte constante.

$\Delta\sigma_\rho$: perte finale de tension due à la relaxation de l'armature soumise à $\sigma_{Pi} = 1169 \text{ MPa}$

$$\Delta\sigma_r = \epsilon_r \cdot E_p = 4 \cdot 10^{-4} \times 200\,000 = 80 \text{ MPa} \quad (1/4 \text{ Sud-Est de la France})$$

$$\Delta\sigma_{fl} = E_p \times \frac{\sigma'_b}{E_{ij}} \times 2$$

avec σ'_b contrainte finale probable du béton au centre de gravité des armatures.

$$= 200\,000 \times \frac{3,5}{37\,300} \times 2 = 37 \text{ MPa}$$

On prendra $\sigma'_b \# \sigma'_{b14} = 3,5 \text{ MPa}$

$$\Delta\sigma_\rho = \max \left[2,4 \frac{\rho \, 1000}{100} \left(\frac{\sigma_{Pi} - 0,55 R_g}{0,25 R_g} \right) \sigma_{Pi} ; \frac{\rho \, 3000 + 2,5}{100} \left(\frac{\sigma_{Pi} - 0,55 R_g}{0,25 R_g} \right) \sigma_{Pi} \right]$$

$$= \frac{2,5 + 2,5}{100} \times \frac{1169 - 912}{414,5} \times 1169 = 36 \text{ MPa}$$

- d'où finalement :

$$\Delta\sigma_d = 80 + 37 + 36 - \frac{36(37 + 80)}{1169 - 912}$$

$$\Delta\sigma_d = 137 \text{ MPa}$$

donc à $t = \infty$, on aura la contrainte probable dans le câble au milieu du tablier :

$$\sigma_p = 1169 - 137 = 1032 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma_p = 1301 - 1032 = 269 \text{ MPa} = \Delta\sigma_i + \Delta\sigma_d$$

on peut donc calculer les 2 valeurs caractéristiques maximale et minimale correspondantes :

$$\sigma_{P1} = 1,02 \sigma_{P0} - 0,8 \Delta\sigma_p = 1112 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{P2} = 0,98 \sigma_{P0} - 1,2 \Delta\sigma_p = 952 \text{ MPa}$$

Soit pour un $12 \text{ } \Phi \text{ } 8$ ($A = 603 \text{ mm}^2$) des forces caractéristiques de :

$$P_1 = 603 \cdot 10^{-6} \times 1112 = 0,670 \text{ MN}$$

$$P_2 = 603 \cdot 10^{-6} \times 952 = 0,574 \text{ MN}$$

et une force probable de :

$$P = 603.10^{-6} \times 1032 = 0,622 \text{ MN}$$

NOTA - La perte par retrait a été surestimée dans cet exemple puisque l'on a négligé la part de retrait qui s'est effectuée avant la mise en tension. Cette part de retrait déjà acquise est du reste variable le long du câble puisque la table supérieure des poutres préfabriquées est constituée d'un béton assez âgé alors que le hourdis coulé en place est très jeune (quelques jours) au moment de la mise en tension.

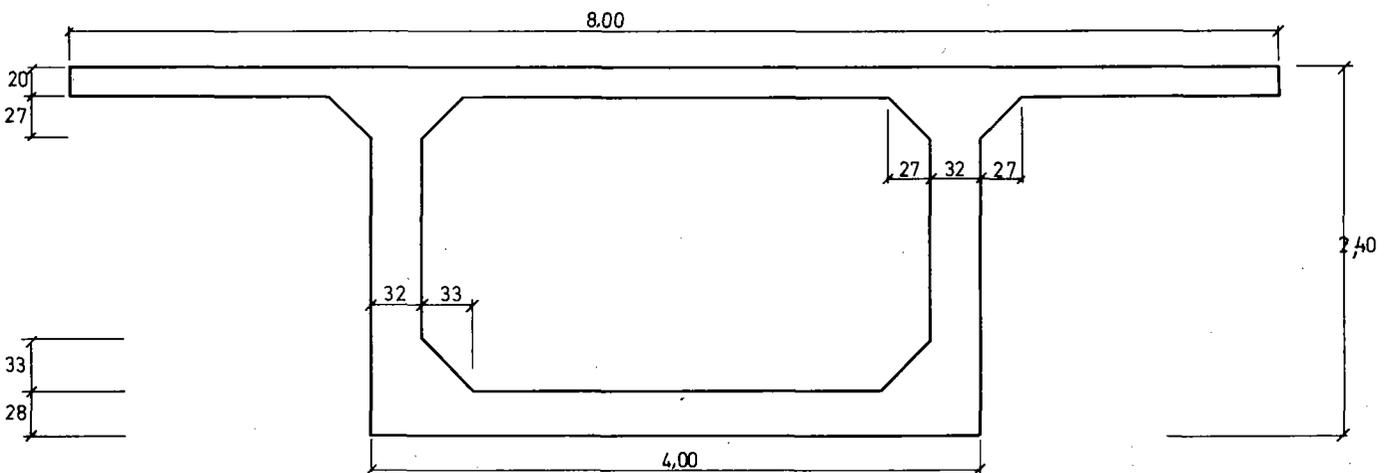
En pratique, l'incidence de cette approximation est négligeable sur la tension finale.

3 – DEUXIEME EXEMPLE

3.1. Données générales

3.1.1. Description

Il s'agit d'un pont route droit, constitué d'une succession de travées indépendantes de 48,50 m de portée livrant passage à une chaussée de 6 m et deux trottoirs de 1 m de largeur chacun. La section en caisson de hauteur constante et égale à 2,40 m est coulée sur cintre et précontrainte au moyen de 26 câbles 12 T 13 du système Freyssinet. Les 14 câbles filants sont tendus en même temps que 4 câbles relevés, lorsque le béton a atteint 14 jours d'âge, les 8 derniers câbles relevés n'étant tendus qu'à 28 jours. Les mises en tension ne sont faites que d'un seul côté, car l'extrémité de la travée contigue à la travée précédente est inaccessible aux vérins.



3.1.2. Matériaux utilisés

– Béton : $\sigma'_{28} = 30 \text{ MPa}$

d'après la relation de l'art. 4.3.

$$\sigma'_j = 0,685 \sigma'_{28} \log_{10} (j + 1)$$

$$\sigma'_{14} = 24,2 \text{ MPa}$$

comme $\sigma_j = 0,6 + 0,06 \sigma'_j$, on a finalement (art. 4.4.) :

$$\sigma_{28} = 30 \text{ MPa} \qquad \sigma_{28} = 2,4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{14} = 24,2 \text{ MPa} \qquad \sigma_{14} = 2,1 \text{ MPa}$$

– Procédé de précontrainte Freyssinet – 12 T 13 ; cône 3 pièces.

– Caractéristiques d'un toron de 12,7 mm de diamètre, classe III, TBR (très basse relaxation).

$$\begin{array}{ll} A & = 94 \text{ mm}^2 \\ F_{Tg} & = 154 \text{ KN} \\ F_{Rg} & = 173,6 \text{ KN} \\ \rho_{1000} & = 2,5 \% \end{array} \qquad \begin{array}{ll} T_g & = 1638 \text{ MPa} \\ R_g & = 1847 \text{ MPa} \\ \rho_{3000} & = 3 \% \end{array}$$

– Pour 1 câble 12 T 13 :

$$\begin{array}{llll} A & = 1130 \text{ mm}^2 & & \\ T_g & = 1638 \text{ MPa} & F_{Tg} & = 1848 \text{ KN} & 0,95 F_{Tg} & = 1756 \text{ KN} \\ R_g & = 1847 \text{ MPa} & F_{Rg} & = 2083 \text{ KN} & 0,85 F_{Rg} & = 1771 \text{ KN} \\ T_o & = 1510 \text{ MPa} & & & F_{T_o} & = 1710 \text{ KN} \\ E_p & = 190\,000 \text{ MPa} & & & & \end{array}$$

– Coefficient de frottement

$$f = 0,19 \qquad \varphi = 1,8 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

– Rentrée de cône :

$$g = 12 \text{ mm}$$

– Gaine : $\varnothing_g = 64 \text{ mm}$

$$\omega_g = 3220 \text{ mm}^2$$

3.1.3. Câbles étudiés

Nous étudierons successivement un câble filant moyen et un câble relevé moyen. Pour le câble filant, tendu à 14 jours d'âge du béton, nous calculerons dans la section médiane outre la tension initiale et la tension en service au bout d'un temps très long, la tension à 28 j (donc 14 j après la mise en tension) de façon à permettre la vérification des contraintes au moment où on tend les 8 derniers câbles relevés.

Le calcul développé ci-dessous est un calcul détaillé dans lequel on a tenu compte notamment d'une "anti-perte" due à l'application d'un supplément de poids mort (les superstructures), 90 jours après le coulage du béton. Cette "anti-perte" a été comptée avec les pertes différées pour la commodité des calculs.

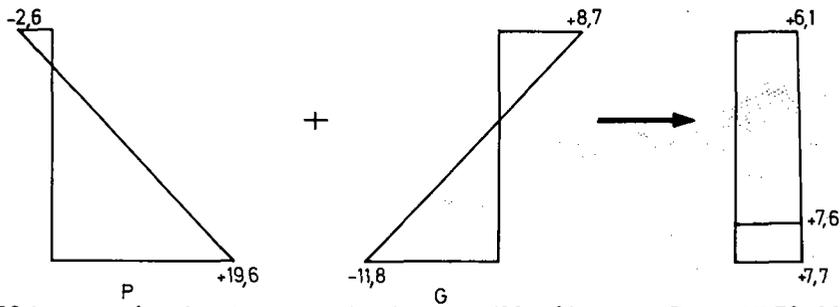
L'évolution des pertes différées a été évaluée par l'intermédiaire de la fonction $r(t)$ définie dans l'annexe I pour ce qui est du fluage.

La loi de relaxation est celle indiquée à l'Art. 9.3. :

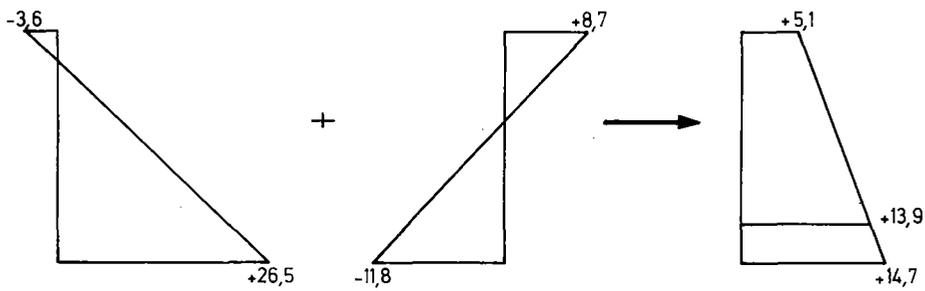
$$\Delta\sigma_{\rho h} = \Delta\sigma_{\rho} \left(\frac{h}{100\,000} \right)^{0,19} \qquad (\text{h en heures})$$

Le calcul complet des pertes exige la connaissance des contraintes du béton au niveau des câbles, au cours de la construction de l'ouvrage. Nous admettrons dans la section médiane, les répartitions de contraintes probables suivantes (cf. 3ème paragraphe du chapitre III).

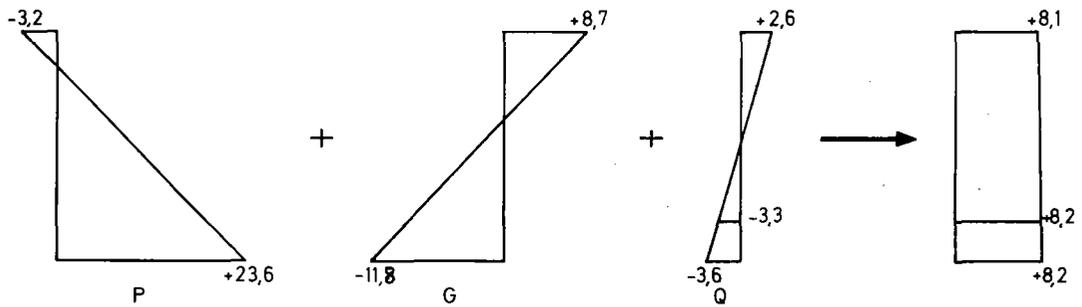
A 14 jours $P = 27,72 \text{ MN}$



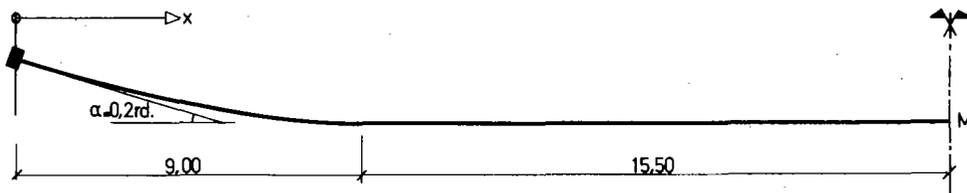
A 28 jours, après mise en tension des derniers câbles filants $P = 37,78 \text{ MN}$



En service : $P = 33,62 \text{ MN}$



3.2. Calcul de la tension du câble filant moyen



$$\sigma_{Po} = \inf. \left\{ T_o ; 0,95 T_g ; 0,85 R_g \right\} = T_o = 1510 \text{ MPa}$$

3.2.1. Pertes instantanées

a) Pertes par frottements

$$\sigma_p(x) = \sigma_{p0} e^{-f\alpha - \varphi x}$$

$$\sigma_p(9\text{m}) = 1510 e^{-(0,19 \times 0,2 + 1,8 \cdot 10^{-3} \times 9)} = 1431 \text{ MPa}$$

$$\sigma_p(24,50 \text{ m}) = 1510 e^{-(0,19 \times 0,2 + 1,8 \cdot 10^{-3} \times 24,50)} = 1391 \text{ MPa}$$

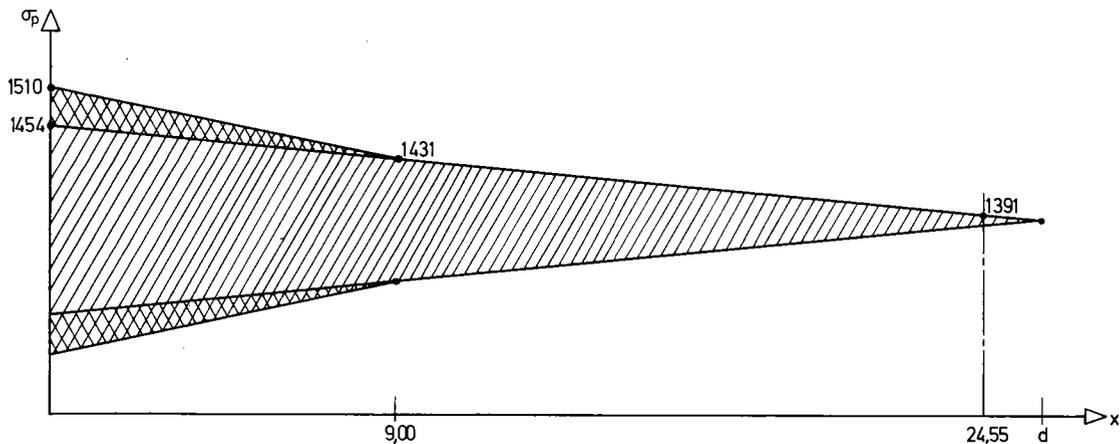
Par conséquent, en M, $\Delta\sigma_\varphi = 1510 - 1391 = 119 \text{ MPa}$

b) Perte par rentrée d'ancrage

$$g = 12 \text{ mm}$$

Pour calculer la distance d jusqu'à laquelle se fait sentir la rentrée de cône il suffit d'écrire que la surface hachurée est égale à :

$$gE_p = 12 \cdot 10^{-3} \times 190\,000 = 2280 \text{ MN/m}$$



Or la surface des 2 triangles doublement hachurée vaut : $(1510 - 1454) \times 9 = 504 \text{ MN/m}$

$$\text{Par suite : } \frac{(1431 - 1391)}{15,50} \times d^2 = 2280 - 504$$

d'où : $d \approx 26,25 \text{ m}$

$$\text{Par suite, dans la section médiane : } \Delta\sigma_g = 2(26,25 - 24,50) \times \frac{1431 - 1391}{15,50} = 9 \text{ MPa}$$

c) Pertes par raccourcissement élastique

Du fait de l'échelonnement des mises en tension des 18 premiers câbles, ceux-ci subissent, en moyenne, une perte de tension :

$$\Delta\sigma_e = \frac{1}{2} \frac{\sigma'_{b14}}{E_{i14}} \times E_p$$

avec : $\sigma'_{b14} = 7,6 \text{ MPa}$ (cf. 3.1.3.)

$$\text{et} : E_{i14} = 7\,590 \sqrt{\sigma'_{14}} = 7\,590 \sqrt{24,2} = 37\,300 \text{ MPa}$$

$$\text{d'où} : \Delta\sigma_e = \frac{1}{2} \times \frac{7,6}{37\,300} \times 190\,000 = 20 \text{ MPa}$$

Les pertes instantanées valent ainsi :

$$\Delta\sigma_i = 119 + 9 + 20 = 148 \text{ MPa}$$

et :

$$\sigma_i = \sigma_{Po} - \Delta\sigma_i = 1510 - 148 = 1,362 \text{ MPa}$$

3.2.2. Pertes différées à 28 j – ϵ (avant mise en tension de la 2ème série de câbles).

a) Perte par retrait

En application de l'annexe I, cette perte nous est donnée par :

$$\Delta\sigma_r = E_p \epsilon_r \left[r(28_f) - r(14_f) \right]$$

$$\text{avec} : \epsilon_r = k_b \epsilon_c k_{e1} k_p$$

k_b traduit l'influence de la composition du béton – Sa valeur est fournie par une courbe en fonction du rapport E/C. Pour E/C = 0,44, $k_b = 1$.

ϵ_c dépend des conditions climatiques et plus spécialement de l'humidité relative de l'air. Pour une humidité de 70 %, $\epsilon_c = 2,75 \cdot 10^{-4}$.

k_{e1} est fonction de l'épaisseur moyenne $e_m = \frac{2B}{p}$ de la pièce.

$$\text{Ici } e_m = \frac{2 \times 4,204}{30,34} = 0,28 \text{ m et } k_{e1} = 0,68$$

$$\text{enfin, } k_p \text{ représente l'influence des armatures : } k_p = \frac{1}{1 + n\omega} \text{ avec } \omega = \frac{A_p + A_a}{B} = \frac{293,8 + 42}{4,204} = 0,80 \%$$

Par conséquent : $k_p = 0,86$

Le temps à introduire dans la fonction r n'est pas le temps t réel, mais un temps fictif :

$$t_f = t \sqrt{\frac{10}{e_m}} = t \sqrt{\frac{10}{28}} = 0,6 t$$

$$\text{Ainsi : } 28_f = 0,6 \times 28 = 16,8 \text{ j}$$

$$14_f = 0,6 \times 14 = 8,4 \text{ j}$$

$$\text{et} : r(28_f) = 0,35$$

$$r(14_f) = 0,22$$

$$\text{d'où} : \Delta\sigma_r(28) = 190\,000 \times 1,60 \cdot 10^{-4} (0,35 - 0,22) = 4 \text{ MPa}$$

b) Perte par fluage

$$\text{Perte par fluage du béton } \Delta\sigma_{fl}(28) = E_p \times \frac{\sigma'_{b14}}{E_{i14}} K_{fl}(14) \cdot r(28-14)$$

avec : $\sigma'_{b14} = 7,6 \text{ MPa}$

$$E_{i14} = 37\,300 \text{ MPa}$$

et : $K_{fl} = k_b k_c k_d k_{e2}$

– k_b a la même valeur que précédemment : $k_b = 1$

– k_c traduit l'influence des conditions climatiques et, pour une humidité relative de 70 % vaut : 2,3

– k_d dépend de l'âge du béton au moment de sa mise en charge : $k_d(14) = 1,2$

– enfin k_{e2} est fonction de l'épaisseur moyenne : $k_{e2}(0,28) = 0,77$

d'où : $K_{fl} = (k_b k_c k_{e2}) k_d = 1,8 \times 1,2 = 2,2$

par suite avec $r(14) = 0,31$

$$\Delta\sigma_{fl}(28) = 190\,000 \times \frac{7,6}{37\,300} \times 2,2 \times 0,31 = 27 \text{ MPa}$$

c) Pertes par relaxation

La perte finale par relaxation est donnée par :
$$\Delta\sigma_{\rho} = \sup. \left\{ \frac{2,4 \rho 1000}{100} \right\} \left(\frac{\sigma_{Pi}}{R_g} - 0,55 \right) \times \frac{\sigma_{Pi}}{0,25}$$

et la perte au bout de h heures par :
$$\Delta\sigma_{\rho h} = \Delta\sigma_{\rho} \left(\frac{h}{100\,000} \right)^{0,19}$$

ici : $h = 14 \text{ j} = 336 \text{ h}$ et :

$$\Delta\sigma_{\rho} = \frac{2,4 \times 2,5}{100} \left(\frac{1362}{1847} - 0,55 \right) \times \frac{1362}{0,25} = 61 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma_{\rho h} = 61 \left(\frac{336}{100\,000} \right)^{0,19} = 21 \text{ MPa}$$

Les pertes différées, à 28 j – ϵ s'élèvent donc à : $\Delta\sigma_d(28 \text{ j} - \epsilon) = 4 + 27 + 21 = 52 \text{ MPa}$

3.2.3. Pertes différées à 28 j + ϵ

Il suffit d'ajouter aux pertes précédemment calculées, la perte par raccourcissement élastique due à la mise en tension des 8 derniers câbles relevés.

$$\Delta\sigma_e = \frac{\Delta\sigma'_{b28}}{E_{i28}} E_p$$

avec : $\Delta\sigma'_{b28} = 13,9 - 7,6 = 6,3 \text{ MPa}$

$$E_{i28} = 7\,590\sqrt{30} = 41\,600 \text{ Mpa}$$

d'où : $\Delta'\sigma_e = \frac{6,3}{41\,600} \times 190\,000 = 28 \text{ MPa}$

Les pertes différées à 28 j + ϵ valent ainsi : $\Delta\sigma_d (28 \text{ j} + \epsilon) = 52 + 28 = 80 \text{ MPa}$

3.2.4. Pertes différées finales

a) Perte par raccourcissement élastique due à la mise en tension des 8 derniers câbles (cf. 3.2.3.)

$$\Delta'\sigma_e = 28 \text{ MPa}$$

b) "Antiperte" par allongement élastique consécutive à la pose des superstructures (à 90 j)

$$\Delta''\sigma_e = \frac{\Delta\sigma'_{b90}}{E_{i90}} E_p$$

avec : $\Delta\sigma'_{b90} = -3,3 \text{ MPa}$ (cf. 3.1.3.)

et : $E_{i90} = 41\,600 \text{ MPa}$ (= E_{i28})

d'où : $\Delta''\sigma_e = -\frac{3,3}{41\,600} \times 190\,000 = -15 \text{ MPa}$

c) Perte par retrait (cf. paragraphe 3.2.2.a)

$$\Delta\sigma_r = E_p \epsilon_r \left[1 - r(14_f) \right] = 190\,000 \times 1,60 \cdot 10^{-4} (1 - 0,22)$$

$$\Delta\sigma_r = 24 \text{ MPa}$$

d) Pertes par fluage.

– fluage consécutif aux charges appliquées à 14 j :

$$\Delta\sigma_{fl} = \frac{E_p}{E_{i14}} \sigma'_{b14} K_{fl} (14) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K_{fl} (14) = 1,8 \times 1,2 = 2,2 \\ E_{i14} = 37\,300 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\Delta\sigma_{fl} = \frac{190\,000}{37\,300} \times 7,6 \times 2,2 = 87 \text{ MPa}$$

– fluage consécutif au supplément de charges apporté à 28 j :

$$\Delta'\sigma_{fl} = \frac{E_p}{E_{i28}} \Delta'\sigma_{b28} K_{fl} (28) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K_{fl} (28) = 1,8 \times 1 = 1,8 \\ E_{i28} = 41\,600 \end{cases}$$

$$\Delta'\sigma_{fl} = \frac{190\,000}{41\,600} \times 6,3 \times 1,8 = 51 \text{ MPa}$$

- fluage correspondant au supplément d'efforts apporté à 90 j :

$$\Delta''\sigma_{fl} = \frac{E_p}{E_{i90}} \Delta\sigma'_{b90} K_{fl}(90) \quad \text{avec : } \begin{cases} K_{fl}(90) = 1,8 \times 0,75 = 1,35 \\ E_{i90} = 41\,600 \end{cases}$$

$$\Delta''\sigma_{fl} = -\frac{190\,000}{41\,600} \times 3,3 \times 1,35 = -20 \text{ MPa}$$

e) Perte par relaxation (cf. 3.2.2. c)

comme vu précédemment : $\Delta\sigma_\rho = 61 \text{ MPa}$

Les pertes différées définitives s'élèvent donc à $\Delta\sigma_d = 28 - 15 + 24 + 87 + 51 - 20 + 61 = 216 \text{ MPa}$

Les différentes pertes sont résumées dans le tableau ci-dessous.

	14 j	28 j - ε	28 j + ε	∞
- frottement	119	119	119	119
- rentrée de cône	9	9	9	9
- mise en tension successive	20	20	20	20
Pertes instantanées	148	148	148	148
- mise en tension des 8 derniers câbles	-	-	28	28
- pose des superstructures	-	-	-	- 15
- retrait	-	4	4	24
- fluage	-	27	27	118
- relaxation	-	21	21	61
Pertes différées	0	52	80	216
Pertes totales	148	200	228	364

On peut donc calculer sans difficulté σ_P , σ_{P_1} et σ_{P_2} ou, pour 1 câble 12 T 13, P, P₁ et P₂ aux différentes étapes de la vie de l'ouvrage.

σ_P (MPa)	1 362	1 310	1 282	1 146
σ_{P_1} (MPa)	1 422	1 380	1 358	1 249
σ_{P_2} (MPa)	1 302	1 240	1 206	1 043
P ₂ (MN)	1,54	1,48	1,45	1,29
P ₁ (MN)	1,60	1,56	1,53	1,41
P ₂ (MN)	1,47	1,40	1,36	1,18

REMARQUE :

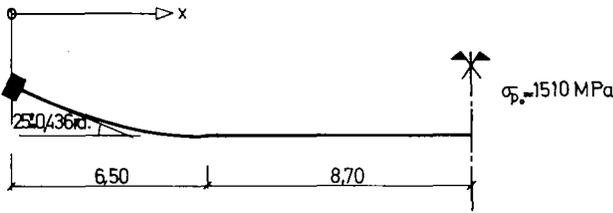
Le terme "pertes instantanées" est ambigu. En effet, on peut qualifier d'instantanées soit les pertes qui se traduisent par une chute brutale de la tension des câbles (par opposition aux pertes évolutives) soit les pertes qui se manifestent immédiatement après la mise en tension des câbles. Alors que le règlement suggère la première interprétation, nous nous sommes délibérément ralliés à la seconde pour la raison suivante :

La perte par relaxation se calcule à partir de la tension initiale $\sigma_{Pi} = \sigma_{Po} - \Delta \sigma_i$, $\Delta \sigma_i$ représentant les pertes instantanées. Il serait absurde pour calculer la perte par relaxation à 28 j de faire intervenir des pertes présumées instantanées selon l'interprétation réglementaire, alors qu'elles se produisent postérieurement à la date (28 j) à laquelle on veut évaluer la relaxation.

C'est pourquoi nous avons inclus dans les pertes différées la perte élastique par mise en tension de la 2ème famille de câbles ainsi que l'antiperte due à la pose des superstructures.

En tout état de cause, il est pratiquement indifférent, sur le plan pratique, de rattacher ces pertes "instantanées non immédiates" aux pertes instantanées ou aux pertes différées.

3.3. Calcul de la tension du câble relevé moyen



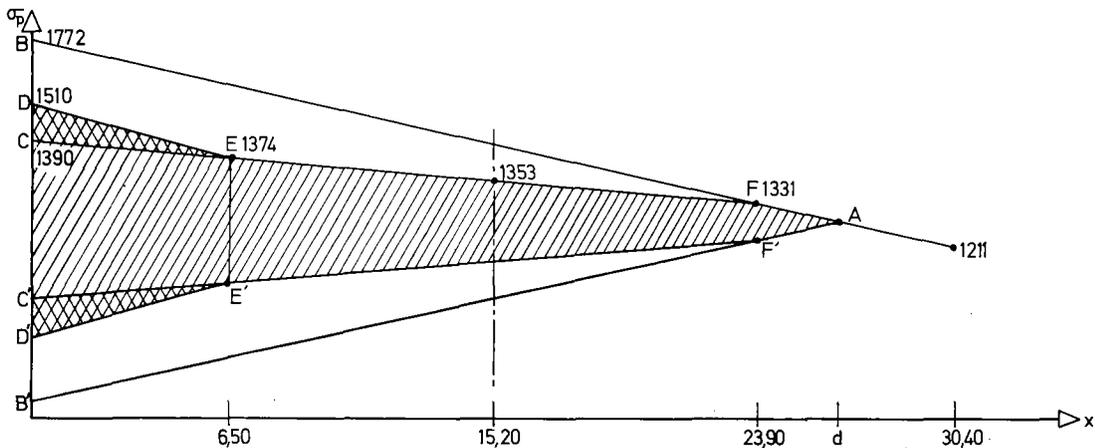
3.3.1. Pertes instantanées

a) Pertes par frottements

on obtient facilement : $\sigma_p(6,50 \text{ m}) = 1374 \text{ MPa}$ $\sigma_p(15,20 \text{ m}) = 1353 \text{ MPa}$
 $\sigma_p(23,90 \text{ m}) = 1331 \text{ MPa}$ $\sigma_p(30,40 \text{ m}) = 1211 \text{ MPa}$

Au milieu : $\Delta \sigma_\varphi = 1510 - 1353 = 157 \text{ MPa}$

b) Pertes par rentrée du cône



Pour calculer d, il faut écrire que la surface hachurée est égale à : $E_p g = 2\,280 \text{ MN/m}$

Soit : $E_p g = S(BAB') - 2 S(BFC) + 2 S(DEC)$

$$2\,280 = \frac{(1331 - 1211)}{6,50} d^2 - (1772 - 1390) \times 23,90 + (1510 - 1390) \times 6,50 \text{ soit : } d = 24,0 \text{ m}$$

La perte par rentrée de cône vaut donc approximativement, dans la section médiane :

$$\Delta\sigma_g = (1353 - 1331) \times 2 + \frac{(1331 - 1211)}{6,50} \times 0,20 = 48 \text{ MPa}$$

c) Perte par déformation instantanée du béton :

$$\Delta\sigma_e = \frac{1}{2} \frac{E_p}{E_{i28}} \quad \Delta\sigma'_{b28} = \frac{1}{2} \frac{190\,000}{41\,600} (13,9 - 7,6) = 14 \text{ MPa}$$

Les pertes instantanées s'élèvent donc à : $\Delta\sigma_i = 157 + 48 + 14 = 219 \text{ MPa}$
 et : $\sigma_i = 1510 - 219 = 1291 \text{ MPa}$

3.3.2. Pertes différées

a - "Antiperte" consécutive à la pose des superstructures (90 j)

$$\Delta\sigma_e = \frac{E_p}{E_{i90}} \quad \Delta\sigma'_{b90} = -\frac{190\,000}{41\,600} \times 3,3 = -15 \text{ MPa}$$

b - Perte par retrait (cf. 2.b.1.)

$$\Delta\sigma_r = E_p \epsilon_r \left[1 - r(28_f) \right] = 190\,000 \times 1,60 \cdot 10^{-4} (1 - 0,35) = 20 \text{ MPa}$$

c - Perte par fluage

Les pertes dues au fluage sont les mêmes que pour la 1ère série de câbles à ceci près que les câbles relevés n'ont pas à subir les conséquences des déformations qui se produisent entre 14 j et 28 j.

D'où (cf. 3.2.2.b et 3.2.4.d)

$$\Delta\sigma_{fl} = 87 + 51 - 20 - 27 = 91 \text{ MPa}$$

d - Perte par relaxation

$$\Delta\sigma_\rho = \frac{2,4 \times 2,5}{100} \left(\frac{1291}{1847} - 0,55 \right) \times \frac{1291}{0,25} = 46 \text{ MPa}$$

en résumé :

$$\Delta\sigma_d = -15 + 20 + 91 + 46 = 142 \text{ MPa}$$

On peut ainsi dresser, pour les câbles tendus en 2ème phase, le tableau suivant (où P représente la force de précontrainte pour 1 câble 12 T 13) :

MPa / MN	28 j + ϵ	∞
σ_p	1291	1149
σ_{p1}	1365	1251
σ_{p2}	1217	1047
P^2	1,46	1,30
P_1	1,54	1,41
P_2	1,38	1,18

4 – VALEUR DE LA FORCE DE PRECONTRAINTE AUX DIFFERENTES ETAPES DE LA VIE DE L'OUVRAGE

	14 j	28 j – ε	28 j + ε	∞
P	27,72	26,64	37,78	33,62
P ₁	28,80	28,08	39,86	36,66
P ₂	26,46	25,20	35,52	30,68

5 – REMARQUE

Nous avons négligé, dans ces calculs, la diminution de perte différée due à la concomitance des effets du retrait, du fluage et de la relaxation.

Si l'on voulait prendre en compte ce phénomène, on aurait :

a) Pour les câbles de 1ère phase :

– à 18 j – ε (Cf. 3.2.2. c)

$$\Delta\sigma_d(28j - \epsilon) = (4 + 27) + 21 - \frac{(4 \times 27) \times 21}{1362 - 0,55 \times 1847} = 50 \text{ MPa} \quad (\text{au lieu de } 52 \text{ MPa})$$

– à t ∞ (Cf. 3.2.4.e)

$$\Delta\sigma_d = 28 - 15 + (24 + 87 + 51 - 20) + 61 - \frac{142 \times 61}{1362 - 0,55 \times 1847} = 191 \text{ MPa} \quad (\text{au lieu de } 216 \text{ MPa})$$

On aurait donc comme tension finale :

$$\begin{array}{ll} \sigma_P = 1171 \text{ MPa} & \text{au lieu de} & \sigma_P = 1146 \text{ MPa} \\ \sigma_{P_1} = 1269 \text{ MPa} & & \sigma_{P_1} = 1249 \text{ MPa} \\ \sigma_{P_2} = 1073 \text{ MPa} & & \sigma_{P_2} = 1043 \text{ MPa} \end{array}$$

b) Pour les câbles de 2ème phase (câbles relevés) (Cf. 3.3.2. d.)

$$\Delta\sigma_d = -15 + (20 + 91) + 46 - \frac{(20 + 91) \times 46}{1291 - 0,55 \times 1847} = 123 \text{ MPa}$$

D'où pour la tension finale :

$$\begin{array}{ll} \sigma_P = 1168 \text{ MPa} & \text{au lieu de} & \sigma_P = 1149 \text{ MPa} \\ \sigma_{P_1} = 1267 \text{ MPa} & & \sigma_{P_1} = 1251 \text{ MPa} \\ \sigma_{P_2} = 1069 \text{ MPa} & & \sigma_{P_2} = 1047 \text{ MPa} \end{array}$$

On voit donc que l'erreur commise demeure toujours inférieure à 3 %.

CHAPITRE III

JUSTIFICATIONS DES CONTRAINTES NORMALES

1 – GENERALITES

Il y a lieu de faire des justifications aux états limites d'utilisation et aux états limites ultimes.

Les vérifications aux états limites ultimes permettent de s'assurer de la résistance d'une structure alors que les vérifications aux états limites d'utilisation visent à lui garantir une certaine durabilité.

Alors qu'aux états limites d'utilisation on suppose un comportement élastique des matériaux, on est obligé aux états limites ultimes, d'admettre la plastification des sections et l'on est amené à utiliser des modèles de comportement aussi proches que possible de la réalité.

1.1. Justification aux états limites d'utilisation (Art. 17 et 21)

Les matériaux étant censés se comporter élastiquement, il suffit de calculer les contraintes que l'on obtient dans la section sous les sollicitations de calcul et de vérifier qu'elles ne dépassent pas les contraintes limites d'utilisation.

Les sollicitations de calcul à considérer vis à vis des états limites d'utilisation sont définies par la formule :

$$S(Q_{L1}) + S(Q_{L2}) + \begin{cases} S(P_1) \\ \text{ou} \\ S(P_2) \end{cases} + S(\gamma_{Qc} Q_c)$$

avec $\gamma_{Qc} = 1,2$ pour les charges d'exploitation des ponts routes. D'autres combinaisons dites supplémentaires peuvent être à considérer dans certains cas.

Selon les exigences sur les contraintes limites, les sections sont classées en 3 genres I,II (IIa et IIb) et III (IIIa et IIIb).

1.1.1. Genres I et II

En genre I et II, les calculs se conduisent de la façon habituelle, les contraintes limites d'utilisation étant résumées dans le tableau suivant :

On remarque sur ces tableaux que les contraintes limites sont plus sévères au voisinage des armatures de précontrainte dans ce qu'on appelle la section d'enrobage (art. 18.5) hachurée sur les schémas ci-après.

En règle générale, les ponts routiers se calculeront en genre II, ce qui conduit à des dimensionnements comparables à ceux résultant de l'ancien règlement.

En contrepartie des tractions que l'on admet en genre II, on doit placer, au voisinage de la fibre tendue (art. 21.4.2) une section d'aciers passifs au moins égale à la formule conventionnelle :

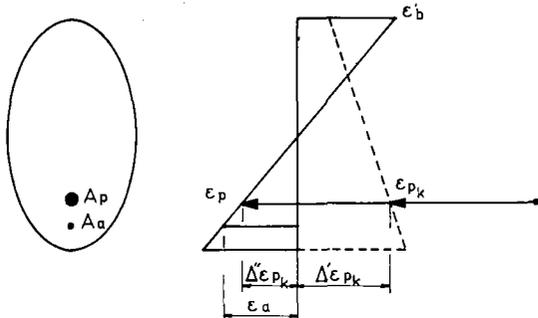
$$A_a = \frac{B_t}{1000} + \frac{N_{Bt}}{\sigma_e}$$

B_t représentant l'aire du béton tendu et N_{Bt} la résultante des contraintes de traction sur cette même aire.

	Construction	Actions de longue durée	Autres cas
I			
II _a			
II _b			

1.1.2. Genre III

En genre III, on doit faire des vérifications non seulement sur la section entière (avec des tractions plus élevées qu'en genre II) mais encore sur la section réduite, le béton tendu n'étant plus compté dans la résistance. Les contraintes de traction à vérifier sont données dans l'art. 21.3.2.3. et concernent uniquement la section d'enrobage. Lorsqu'on néglige le béton tendu, on se ramène à un calcul de béton armé par le raisonnement suivant :



ϵ_{p_k} = allongement des aciers de précontrainte tendus à leur contrainte caractéristique.

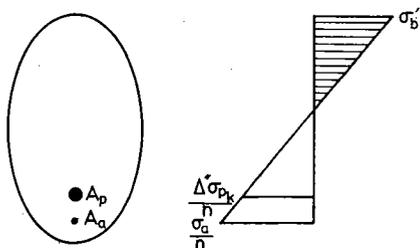
$\Delta' \epsilon_{p_k}$ = complément d'allongement accompagnant le retour à 0 de la contrainte du béton.

$\Delta'' \epsilon_{p_k}$ = complément d'allongement au-delà de la dé-compression.

en pointillés : déformations sous l'effet des seules actions de longue durée.

Le diagramme des déformations ($\epsilon'_b, \Delta^n \epsilon_{p_k}, \epsilon_a$) est linéaire, compte tenu des hypothèses de conservation des sections planes et de non glissement relatif des aciers et du béton.

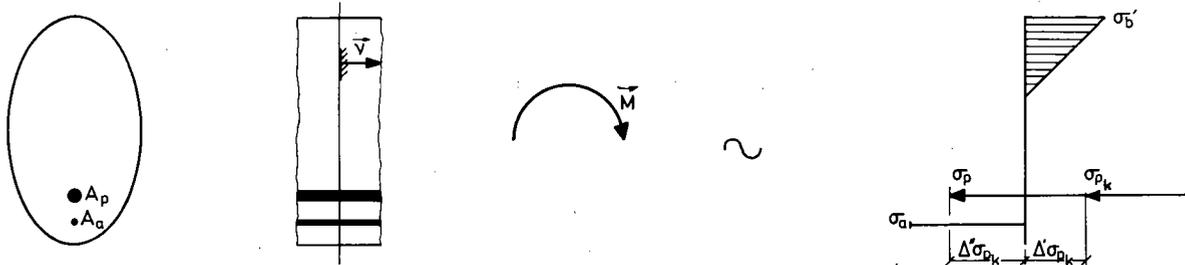
Si l'on admet l'élasticité des matériaux, le diagramme de contraintes, schématisé ci-dessous est, lui aussi, linéaire.



$n =$ coefficient d'équivalence acier-béton.

C'est un diagramme classique en béton armé et le seul problème consiste à trouver les efforts qu'il équilibre.

Ecrivons que les forces élémentaires dans la section ($\sigma'_b dB\vec{v}, -A_p \sigma_p \vec{v}, -A_a \sigma_a \vec{v}$) où \vec{v} désigne le vecteur normal unité dans la section - forment un système de forces équivalent à la sollicitation \vec{M} due aux charges extérieures.

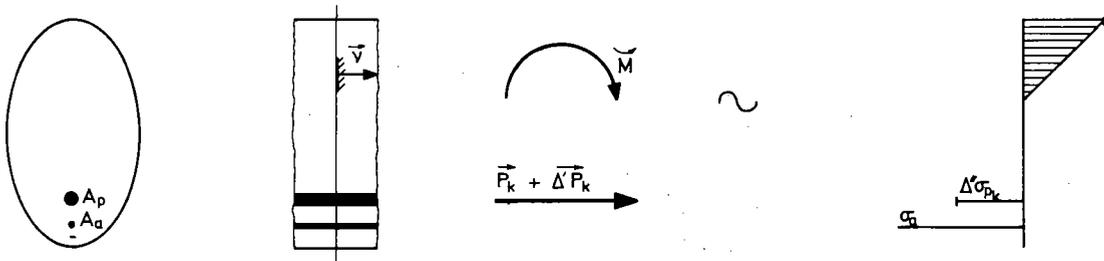


$$\text{Syst. } \left\{ \vec{M} \right\} \sim \text{Syst. } \left\{ \sigma'_b dB\vec{v}, -A_p (\sigma_{p_k} + \Delta' \sigma_{p_k} + \Delta'' \sigma_{p_k}) \vec{v}, -A_a \sigma_a \vec{v} \right\}$$

Cette relation d'équivalence peut encore s'écrire :

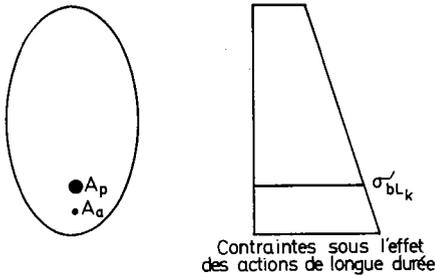
$$\text{Syst. } \left\{ \vec{M}, + A_p (\sigma_{p_k} + \Delta' \sigma_{p_k}) \vec{v} \right\} \sim \text{Syst. } \left\{ \sigma'_b dB\vec{v}, -A_p \Delta' \sigma_{p_k} \vec{v}, -A_a \sigma_a \vec{v} \right\}$$

$$\text{ou : Syst. } \left\{ \vec{M}, (P_k + \Delta' P_k) \vec{v} \right\} \sim \text{Syst. } \left\{ \sigma'_b dB\vec{v}, -A_p \Delta' \sigma_{p_k} \vec{v}, -A_a \sigma_a \vec{v} \right\}$$



Ainsi donc, le diagramme ($\sigma'_b, \Delta^n \sigma_{p_k}, \sigma_a$) équilibre la sollicitation de flexion composée constituée par le moment extérieur \vec{M} d'une part et la force $\vec{P}_k + \Delta' \vec{P}_k$, appliquée au niveau des aciers de précontrainte d'autre part. Le calcul de $\sigma'_b, \Delta^n \sigma_{p_k}, \sigma_a$ se ramène de la sorte à un calcul classique de flexion composée en béton armé (résolution d'une équation du 3ème degré pour une section composée de rectangles).

La première partie de la surtension des aciers de précontrainte vaut $\Delta^1 \sigma_{P_k} = 6 \sigma'_{bL_k}$; c'est celle qui accompagne le retour à 0 de la contrainte du béton au niveau des aciers de précontrainte.



σ'_{bL_k} représente la contrainte de compression du béton au niveau des aciers de précontrainte sous l'effet des actions de longue durée et l'on voit ainsi que $\Delta^1 \sigma_{P_k}$ se calcule avec le coefficient d'équivalence $n = 6$ (art. 21.2.V.).

La deuxième partie de la surtension des aciers de précontrainte $\Delta^2 \sigma_{P_k}$ (au-delà de la compression du béton), ainsi que la tension des aciers passifs sont, par contre, évaluées à partir du coefficient d'équivalence $n = 10$ (art. 21.2.V) qu'il faut donc introduire dans les calculs de type béton armé.

Règlementairement, en genre IIIa, et pour la post-tension, deux types de vérification sont demandés (art. 21.4.3.).

- Ⓐ Une première vérification dans laquelle on tient compte de toute la surtension des armatures de précontrainte $\Delta \sigma_{P_k} = \Delta^1 \sigma_{P_k} + \Delta^2 \sigma_{P_k}$ selon la théorie précédente.

Si l'on pose : $\bar{\sigma}_p = \inf(0,85 R_g ; 0,95 T_g)$, cette surtension est limitée à : $\overline{\Delta \sigma}_p = \bar{\sigma}_p - \sigma_{P_k}$ si armatures et gaines présentent une adhérence de forme suffisante (ce qui est réalisé en pratique pour les torons et les fils tels $\eta \geq 1,4$)

$$\overline{\Delta \sigma}_p = \frac{2}{3} (\bar{\sigma}_p - \sigma_{P_k}) \text{ s'il n'y a pas adhérence de forme.}$$

La tension des aciers passifs est limitée à :

$$\bar{\sigma}_a = \inf. \left\{ \begin{array}{l} 200 \text{ MPa} \\ 800 \text{ MPa} \\ \frac{\sqrt{\phi}}{3} \sigma_e \end{array} \right. (\phi \text{ en mm})$$

- Ⓑ Une deuxième vérification dans laquelle on néglige la surtension des armatures de précontrainte au-delà de la décompression du béton, (on suppose alors $\Delta^2 \sigma_{P_k} = 0$). Dans le calcul de béton armé à la flexion composée, ceci revient à ne plus prendre en compte la section A_p des aciers de précontrainte.

Alors, la tension des aciers passifs est limitée à $\bar{\sigma}_a = \sigma_e$ et la compression dans le béton n'est plus limitée.

Dans le cas de la **prétension**, et toujours en genre IIIa, on ne fait que l'une de ces vérifications, soit une vérification du type Ⓐ si $\eta \geq 1,4$ soit une vérification du type Ⓑ si $\eta < 1,4$.

Dans le cas Ⓐ, on doit respecter la condition supplémentaire $\Delta^2 \sigma_{P_k} \leq \overline{\Delta^2 \sigma}_p = 160 \eta \text{ MPa}$.

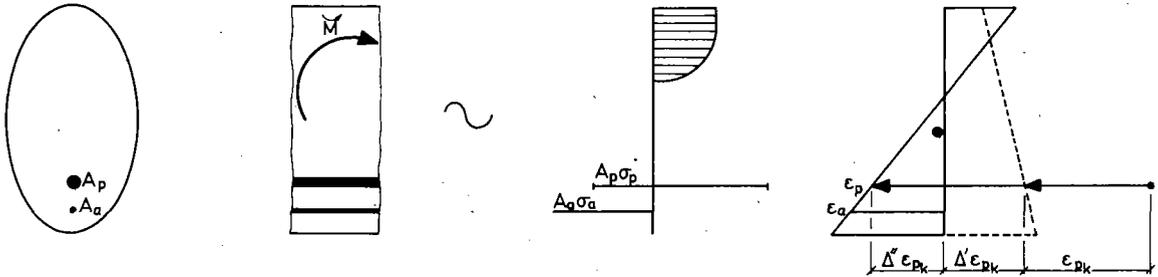
Dans le cas Ⓑ, on prend $\bar{\sigma}_a = \frac{2}{3} \sigma_e$

1.2. Justifications aux états limites ultimes (Art. 16 et 23)

1.2.1. Comportement d'une section à la rupture

L'expérience montre que le principe de conservation des sections planes reste valable jusqu'à rupture et que le béton tendu n'intervient pas.

Si l'on prend l'exemple d'une section simplement fléchie, cette section résiste par son béton comprimé sur une hauteur y et par ses aciers tendus à σ_p pour ce qui est des armatures de précontrainte et à σ_a pour les armatures passives.



Ces contraintes équilibrent le moment extérieur \check{M} . Avec des notations analogues à celle utilisées en 1.1.2. :

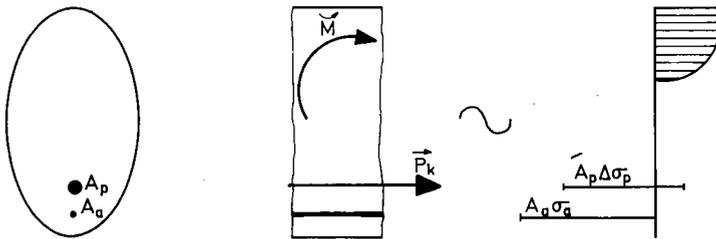
$$\text{Syst. } \left\{ \check{M} \right\} \sim \text{Syst. } \left\{ \sigma'_b \, dB \vec{\nu}, - A_p (\sigma_{p_k} + \Delta' \sigma_{p_k} + \Delta'' \sigma_{p_k}) \vec{\nu}, - A_a \sigma_a \vec{\nu} \right\}$$

On peut encore écrire cette relation d'équivalence :

$$\text{Syst. } \left\{ \check{M}, A_p \sigma_{p_k} \vec{\nu} \right\} \sim \text{Syst. } \left\{ \sigma'_b \, dB \vec{\nu}, - A_p (\Delta' \sigma_{p_k} + \Delta'' \sigma_{p_k}) \vec{\nu}, - A_a \sigma_a \vec{\nu} \right\}$$

$$\text{ou Syst. } \left\{ \check{M}, \vec{P}_k \right\} \sim \text{Syst. } \left\{ \sigma'_b \, dB \vec{\nu}, - A_p (\Delta' \sigma_{p_k} + \Delta'' \sigma_{p_k}) \vec{\nu}, - A_a \sigma_a \vec{\nu} \right\}$$

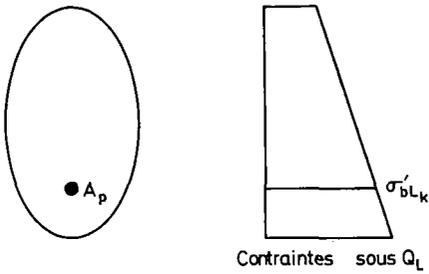
ce qui revient à faire passer la sollicitation due à la précontrainte caractéristique P_k du côté des sollicitations extérieures, les aciers de précontrainte n'intervenant plus que par leur surtension $\Delta \sigma_{p_k} = \Delta' \sigma_{p_k} + \Delta'' \sigma_{p_k}$ dans la résistance de la section.



C'est cette optique que nous adopterons, car la précontrainte caractéristique P_k étant considérée comme une action par le règlement la sollicitation correspondante doit être frappée du coefficient de majoration γ_{S3} .

Une partie de la précontrainte se trouve ainsi du côté sollicitant ($P_k = A_p \sigma_{p_k}$) la deuxième partie seule étant comptée du côté résistant ($\Delta \sigma_{p_k} = \Delta' \sigma_{p_k} + \Delta'' \sigma_{p_k}$).

$\Delta' \sigma_{p_k}$ est la surtension qui accompagne le retour à 0 de la déformation du béton au niveau des aciers de précontrainte.



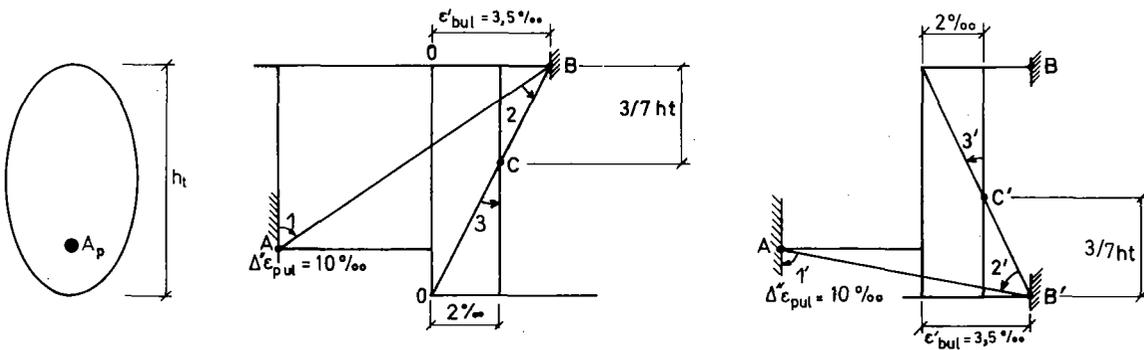
σ'_{bL_k} désignant la contrainte du béton due aux seules actions de longue durée au niveau des armatures de précontrainte.

on admet (art. 23.5) : $\Delta' \sigma_{P_k} = 6 \sigma'_{bL_k}$

ou ce qui revient au même : $\Delta' \epsilon_{P_k} = \frac{6 \sigma'_{bL_k}}{E_p}$ (E_p = module des aciers de précontrainte).

1.2.2. Définition d'un état limite ultime.

On peut dire, en première approximation qu'un état limite ultime est caractérisé par le fait que l'un au moins des matériaux constitutifs de la section atteint sa déformation ultime. De façon plus précise, on obtient un état limite ultime dans une section lorsque le diagramme des déformations appartient à l'un des domaines 1, 2 ou 3 (ou encore 1', 2' ou 3') définis ci-dessous (et passe donc par l'un des points A, B ou C (ou encore B' ou C')).



$\epsilon'_{bul} = 3,5\text{‰}$ (raccourcissement du béton)

$\Delta' \epsilon_{pul} = 10\text{‰}$ (allongement des aciers actifs au-delà de la décompression du béton)

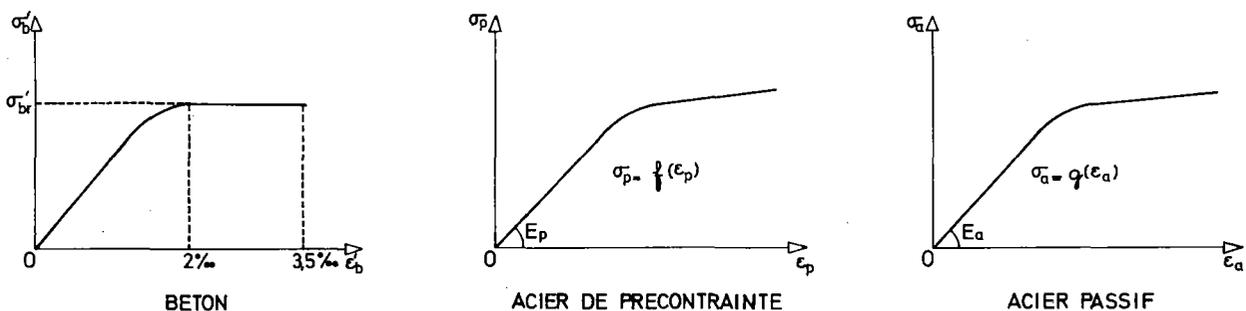
$\epsilon_{aul} = 10\text{‰}$ (allongement des aciers passifs).

Les pivots B' et C' correspondent à l'état limite ultime de compression du béton sur la fibre inférieure.

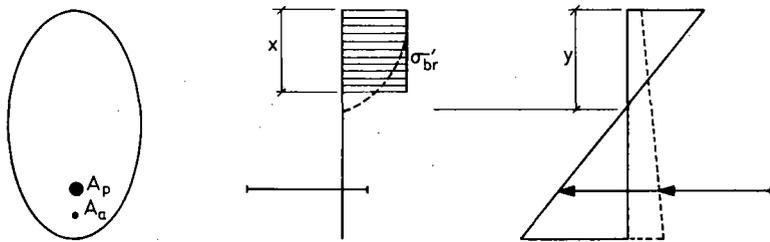
1.2.3. Comportement des matériaux. Diagrammes contraintes-déformations

A chacun des diagrammes de déformation précédents correspond un état de contraintes que l'on peut facilement calculer par l'intermédiaire des diagrammes contraintes-déformations des matériaux.

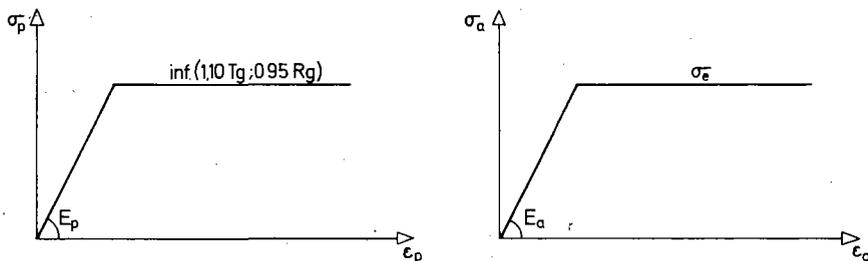
Le comportement du béton est bien représenté par le diagramme parabole rectangle défini ci-dessous. Pour les aciers, l'annexe I propose différentes courbes.



Toutefois, dans les sections fléchies, il est admis, lorsque le diagramme des déformations appartient à l'un des domaines ① ou ② de remplacer la distribution réelle des contraintes de compression sur la hauteur y par une distribution rectangulaire simplifiée dans laquelle $\sigma'_b = \sigma'_{br}$ sur une hauteur $x = 0,8 y$.



De même, pour les aciers, on peut prendre un diagramme élasto-plastique parfait.



1.2.4. Principe de justifications

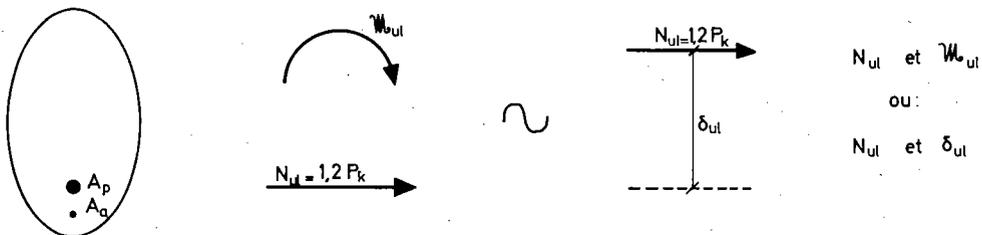
Il s'agit de s'assurer que la sollicitation réglementaire de calcul, que nous désignerons par S_{ul} n'entraîne pas l'apparition d'un état limite ultime dans la section.

a) Sollicitation de calcul

Elle est définie par : $S_{ul} = 1,2 \left[S(1,1 Q_{L1}) + S(0,9 Q_{L2}) + \begin{cases} S(P_1) \\ \text{ou} \\ S(P_2) \end{cases} + S(\gamma_{Qc} Q_c) \right]$

avec $\gamma_{Qc} = 1,33$ pour les charges d'exploitation sur les ponts-routes.

C'est donc du fait qu'on y a incorporé P_k ($k = 1$ ou 2) une sollicitation de flexion composée que l'on peut caractériser par 2 variables, par exemple :



M_{ul} est le moment par rapport aux aciers de précontrainte, égal, en fait, au moment fléchissant engendré par les actions extérieures (Q_{Li} et Q_c) dans la mesure où cette sollicitation extérieure se réduit à une flexion simple.

En réalité, pour la justification d'une section, on a toujours deux sollicitations extrêmes de ce type à considérer. Ainsi pour la justification de la section médiane d'une travée indépendante, doit-on prendre en compte :

$$S_{ul} \text{ maxi} \quad \begin{cases} N_{ul} = 1,2 P_2 \\ \mathcal{M}_{ul} = 1,2 \left[1,1 (M_{G_1} + M_{G'_1}) + 1,33 M_R \right] \end{cases}$$

$$S_{ul} \text{ mini} \quad \begin{cases} N_{ul} = 1,2 P_1 \\ \mathcal{M}_{ul} = 1,2 \left[0,9 (M_{G_2} + M_{G'_2}) \right] \end{cases}$$

Les indices G, G' et R désignent respectivement le poids propre, les superstructures et les charges d'exploitation.

Schématiquement, S_{ul} maxi comprime le haut de la section, alors que S_{ul} mini provoque des compressions sur les fibres inférieures.

En pratique, dans ce cas particulier de la travée indépendante on peut remarquer qu'il est inutile de considérer S_{ul} mini si l'on a pris soin de faire la vérification à la construction, au moment où les risques de rupture par compression excessive des fibres inférieures sont les plus grands, la sollicitation de calcul étant alors définie par :

$$\begin{aligned} N_{ul} &= 1,2 P_{1i} \\ \mathcal{M}_{ul} &= 1,2 (0,9 M_{G_2}) \end{aligned}$$

b) Résistance de la section

Elle est évaluée à partir non pas des résistances caractéristiques des matériaux, mais de leurs résistances de calcul, obtenues en divisant les premières par des coefficients γ_m appropriés.

Ainsi pour le béton, le diagramme de calcul s'obtient-il à partir du diagramme précédemment défini en remplaçant σ'_{br} par :

$$\overline{\sigma'_{bul}} = \frac{0,85 \sigma'_j}{k_b \gamma_b}$$

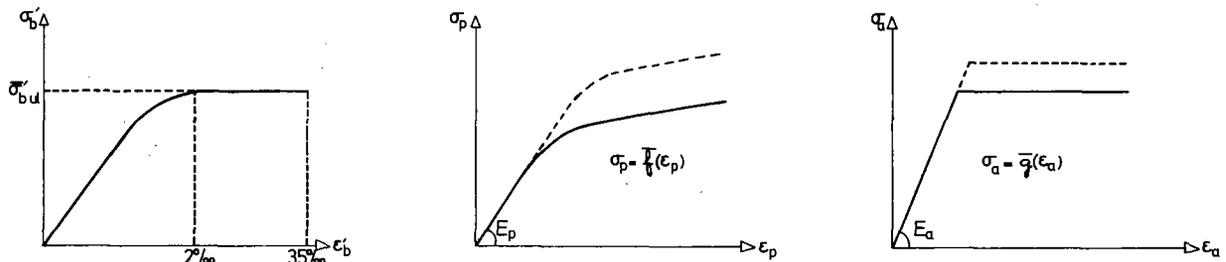
γ_b vaut 1,5 en service et 1,4 en construction.

k_b tient compte de la diminution de la résistance du béton avec la durée d'application de la sollicitation.

$$\begin{cases} k_b = 1 & \text{si cette durée est supérieure à 24 h.} \\ k_b = 0,9 & \text{si elle est comprise entre 1 h et 24 h.} \\ k_b = 0,85 & \text{si elle est inférieure à 1 h, ce qui est notamment le cas des charges d'exploitation routières.} \end{cases}$$

Les diagrammes de calcul des aciers, \bar{f} et \bar{g} se déduisent de même des diagrammes caractéristiques f et g par des affinités parallèles à la droite de Hooke (pour ne point modifier la pente de cette droite) et de rapports respectifs :

$$\frac{1}{\gamma_p} = \frac{1}{1,25} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\gamma_a} = \frac{1}{1,10}$$



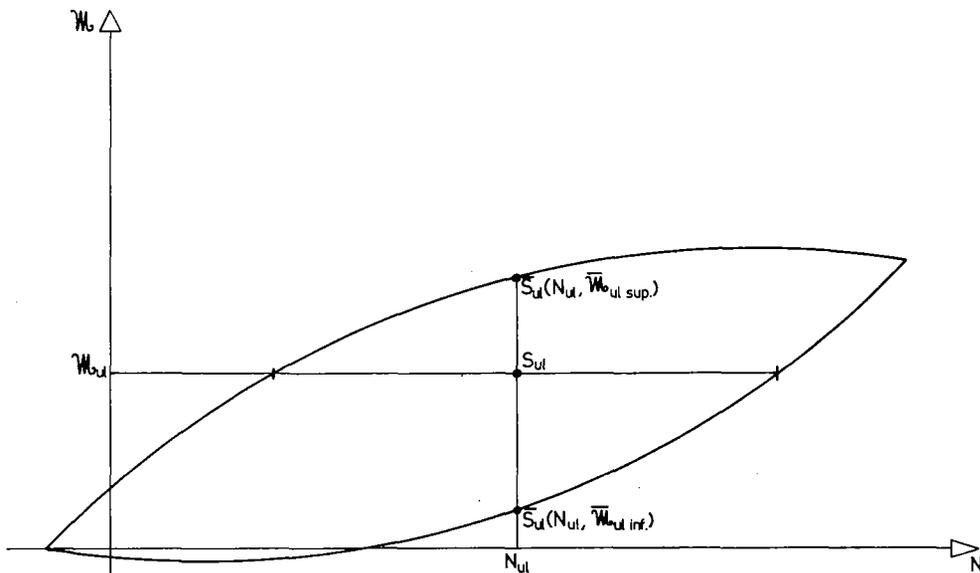
Diagrammes contraintes-déformations de calcul.

c) Conduite des justifications

Pour mener à bien la justification d'une section aux états ultimes, il n'est guère envisageable de calculer directement les déformations et les contraintes car ce calcul devient extrêmement complexe dès qu'on s'écarte comme ici du comportement élastique des matériaux.

Il n'y a par contre aucune difficulté à calculer autant de sollicitations de flexion composée \overline{S}_{ul} (entraînant l'apparition d'un état limite ultime dans la section) qu'on le désire. Il suffit pour cela de partir d'un diagramme de déformations appartenant à l'un des domaines ① ② ③ ④ ⑤ ou ⑥ définis plus haut, de passer aux contraintes par les diagrammes contraintes-déformations de calcul, et de déterminer les efforts qu'équilibrent ces contraintes.

Si l'on définit ces sollicitations de flexion composée par leur effort normal N et par leur moment par rapport aux aciers de précontrainte \mathcal{M} et si l'on se place dans un plan (N, \mathcal{M}) , l'ensemble des sollicitations \overline{S}_{ul} ($\overline{N}_{ul}, \overline{\mathcal{M}}_{ul}$) dont chacune est représentable par un point de ce plan définit une courbe fermée appelée courbe d'interaction.



Cette courbe délimite le domaine de résistance de la section et il suffit de s'assurer que le point représentatif de S_{ul} (N_{ul}, \mathcal{M}_{ul}) est bien à l'intérieur de ce domaine.

En pratique, il est bien entendu hors de question de calculer la courbe d'interaction point par point. Compte tenu de la convexité du domaine, on se contente alors en se déplaçant soit sur une horizontale soit sur une verticale de s'assurer que S_{ul} se situe bien entre les deux états limites correspondants.

On peut par exemple opérer à N constant (déplacement sur une verticale) et chercher $\overline{S_{ul}}(\overline{N_{ul}}, \overline{W_{ul}})$ avec $\overline{N_{ul}} = N_{ul}$. Il existe deux valeurs de $\overline{W_{ul}}$: $\overline{W_{ul sup}}$ et $\overline{W_{ul inf}}$ qui entraînent l'apparition d'un état ultime et l'on doit vérifier :

$$\overline{W_{ul inf}} \leq \overline{W_{ul}} \leq \overline{W_{ul sup}}$$

ou ce qui revient au même (avec : $\delta = \frac{W}{N}$)

$$\overline{\delta_{ul inf}} \leq \delta_{ul} \leq \overline{\delta_{ul sup}}$$

Physiquement, cette façon de procéder revient à déplacer sur la hauteur de la section un effort normal N_{ul} de valeur connue et d'excentricité variable. Intuitivement, on se rend compte que lorsque N_{ul} est centré sur la section, celle-ci résiste sans problème. Par contre lorsqu'on excentre progressivement cet effort normal dans un sens ou dans l'autre, on atteint à un certain moment l'état ultime. On a ainsi deux positions extrêmes pour N_{ul} :

$$\overline{\delta_{ul inf}} \text{ et } \overline{\delta_{ul sup}}$$

et l'on doit s'assurer que :

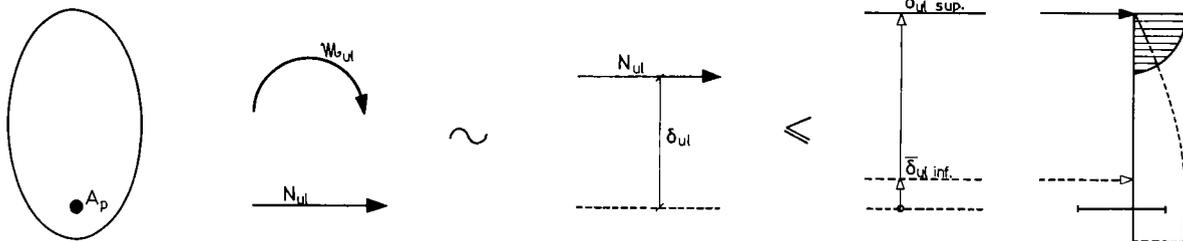
$$\overline{\delta_{ul inf}} \leq \delta_{ul} \leq \overline{\delta_{ul sup}}$$

En général, du reste, il est inutile de vérifier les deux inégalités, l'une d'entre elles se trouvant d'évidence satisfaite.

Si l'on reprend l'exemple de la section médiane d'une travée indépendante, il est évident que sous l'effet de S_{ul} maxi le risque est celui d'une défaillance du béton des fibres supérieures ou des aciers disposés près de la fibre inférieure.

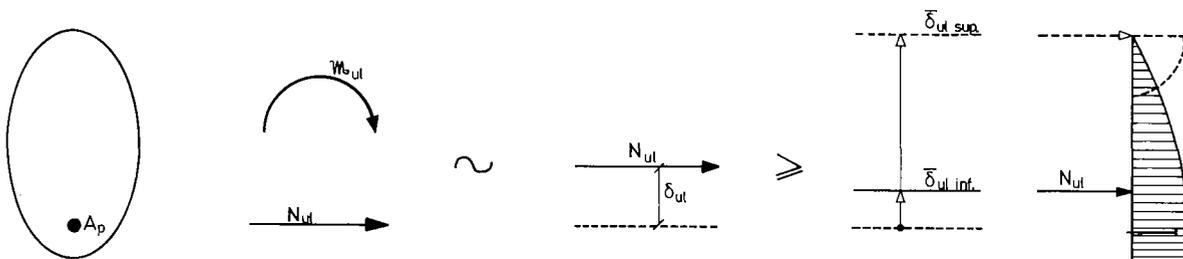
On pourra alors se contenter de chercher un diagramme de déformations ultimes dans les domaines ① ou ② et de vérifier que :

$$\delta_{ul} \leq \overline{\delta_{ul sup}}$$



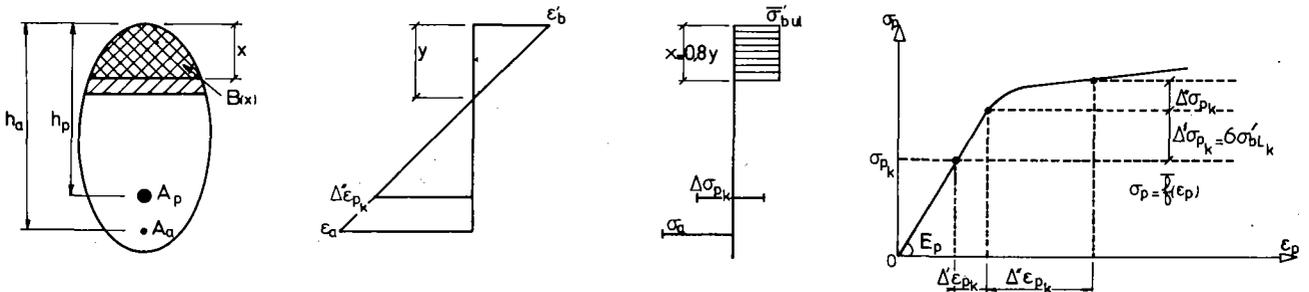
A la construction, au contraire, ce sont les fibres inférieures qui ont à subir une compression importante. Il suffira dans ces conditions de chercher le diagramme des déformations ultimes dans l'un des domaines ③ ou ② (éventuellement ①) et de vérifier que :

$$\overline{\delta_{ul inf}} \leq \delta_{ul}$$



d) Mise en équation du problème

Etablissons les équations pour la section médiane d'une travée indépendante que l'on voudrait justifier sous l'effet de S_{ul} maxi. Les déformations appartiennent à l'un des domaines ① ou ② précédemment définis et il est alors légitime, en vertu de l'Article 23,4 d'utiliser, pour le béton, le diagramme rectangulaire simplifié.



$B(x)$ représentant l'aire de la surface hachurée, $Z(x)$ la distance de son centre de gravité aux aciers de précontrainte, on obtient, en cherchant l'état ultime $\{N_{ul}, \overline{W}_{ul\ sup}\}$ autrement dit en opérant à N constant ($= N_{ul}$) :

$$N_{ul} = B(x) \overline{\sigma'_{bul}} - A_p \Delta\sigma_{p_k} - A_a \sigma_a \quad \text{①}$$

$$\overline{W}_{ul\ sup} = B(x) Z(x) \overline{\sigma'_{bul}} + A_a \sigma_a (h_a - h_p) \quad \text{②}$$

$$\frac{\Delta''\epsilon_{p_k}}{\epsilon'_b} = \frac{h_p - y}{y} = \frac{0,8 h_p}{x} - 1 \quad \text{③}$$

$$\frac{\epsilon_a}{\epsilon'_b} = \frac{0,8 h_a}{x} - 1 \quad \text{④}$$

$$\sigma_a = \bar{g}(\epsilon_a) \quad \text{⑤}$$

$$\Delta\sigma_{p_k} = \bar{f}(\epsilon_{p_k} + \frac{6 \sigma'_{bL_k}}{E_p} + \Delta''\epsilon_{p_k}) - \bar{f}(\epsilon_{p_k}) \quad \text{⑥}$$

Il y a lieu d'adjoindre à ces 6 équations l'une des 3 équations supplémentaires

$$\epsilon'_b = \epsilon'_{bul} \text{ ou } \epsilon_a = \epsilon_{aul} \text{ ou } \Delta''\epsilon_{p_k} = \Delta''\epsilon_{pul} \quad \text{⑦}$$

On a bien ainsi 7 équations pour les 7 inconnues :

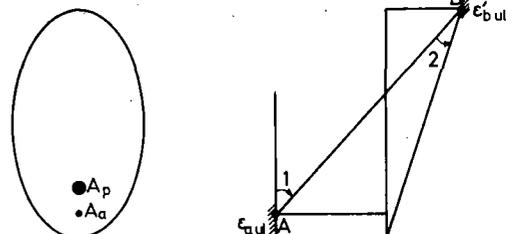
$$x, \Delta\sigma_{p_k}, \sigma_a, \Delta''\epsilon_{p_k}, \epsilon_a, \epsilon'_b \text{ et } \overline{W}_{ul\ sup}$$

Dans le cas le plus général, on résout ce système par approximations successives, en partant d'un couple de valeurs définissant le diagramme des déformations.

Le plus simple est de partir de la droite AB, qui correspond à :

$$\epsilon_a = \epsilon_{aul}$$

$$\epsilon'_b = \epsilon'_{bul}$$



④ et ③ donnent alors x et $\Delta'' \epsilon_{P_k}$

⑤ et ⑥ donnent alors σ_a et $\Delta \sigma_{P_k}$

D'où, par l'équation ① :

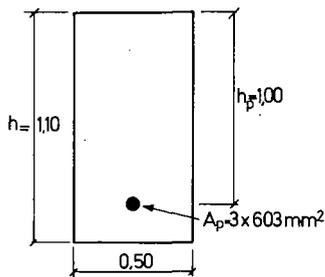
$$\overline{N_{ul1}} = B(x) \overline{\sigma'_{bul}} - A_p \Delta \sigma_{P_k} - A_a \sigma_a$$

En général, $\overline{N_{ul1}} \neq N_{ul}$. En comparant $\overline{N_{ul1}}$ à N_{ul} on voit facilement dans quel sens il faut modifier le diagramme de déformation pour se rapprocher de N_{ul} . Si $\overline{N_{ul1}} > N_{ul}$, le diagramme de déformation cherché appartient au domaine ① et $\epsilon'_b < \epsilon'_{bul}$. Si au contraire $\overline{N_{ul1}} < N_{ul}$ c'est autour du point B qu'il faut tourner pour accroître N et le diagramme de déformations cherché appartient au domaine ②. Au bout d'un certain nombre d'approximations, on obtient un diagramme de déformations dont les contraintes équilibrent N_{ul} et l'équation ② permet de calculer $\overline{W_{bul\ sup}}$.

2 – PREMIER EXEMPLE

Dans ce premier exemple très scolaire, nous nous contenterons d'effectuer les vérifications en service, en insistant particulièrement sur les justifications aux états limites ultimes.

2.1. Données générales



Il s'agit d'une travée indépendante de portée $l = 16$ m, de section rectangulaire, soumise aux effets de son poids propre $g = 2,5 \times 0,5 \times 1,10 \cdot 10^{-2} = 1,375 \cdot 10^{-2}$ MN/ml, d'une charge de superstructures $g' = 0,5 \cdot 10^{-2}$ MN/ml et d'une charge d'exploitation routière assimilable à une charge répartie d'intensité : $q_R = 1,5 \cdot 10^{-2}$ MN/ml. (On suppose qu'il s'agit uniquement de charges de chaussée du type A ou B).

2.1.1. Précontrainte

Nous la supposons réalisée au moyen de 3 câbles 12 $\Phi 8$ du système Freyssinet. ($A_p = 3 \times 603 = 1809$ mm²) Les fils $\Phi 8$ appartiennent à la classe III, sous classe RN (relaxation normale) définie par le fascicule IV titre II du C.P.C.

$$T_g = 1470 \text{ MP}_a$$

$$R_g = 1657 \text{ MP}_a$$

Nous admettons : $\sigma_{P_1} = 1061 \text{ MP}_a$ soit pour les 3 câbles : $P_1 = 1,92 \text{ MN}$

$$\sigma_{P_2} = 879 \text{ MP}_a \quad P_2 = 1,59 \text{ MN}$$

2.1.2. Sollicitations

$$\text{Poids propre : } M_G = 1,375 \cdot 10^{-2} \times \frac{16^2}{8} = 44 \cdot 10^{-2} \text{ MN} \times \text{m}$$

$$M_{G1} = 1,06 M_G = 46,6 \cdot 10^{-2} \text{ MN} \times \text{m}$$

$$M_{G2} = 0,96 M_G = 42,2 \cdot 10^{-2} \text{ MN} \times \text{m}$$

Superstructures : $M_{G'} = 0,5 \cdot 10^{-2} \times \frac{16^2}{8} = 16 \cdot 10^{-2} \text{ MN} \times \text{m}$

$M_{G'1} = 1,20 M_{G'}$ $= 19,2 \cdot 10^{-2} \text{ MN} \times \text{m}$

$M_{G'2} = 0,80 M_{G'}$ $= 12,8 \cdot 10^{-2} \text{ MN} \times \text{m}$

Charges d'exploitation :

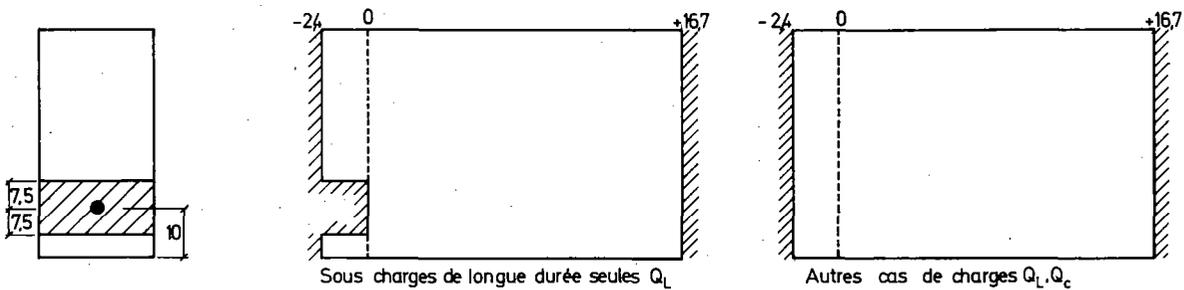
$$M_R = 1,5 \cdot 10^{-2} \times \frac{16^2}{8} = 48 \text{ MN} \times \text{m}$$

2.2. Etats limites d'utilisation

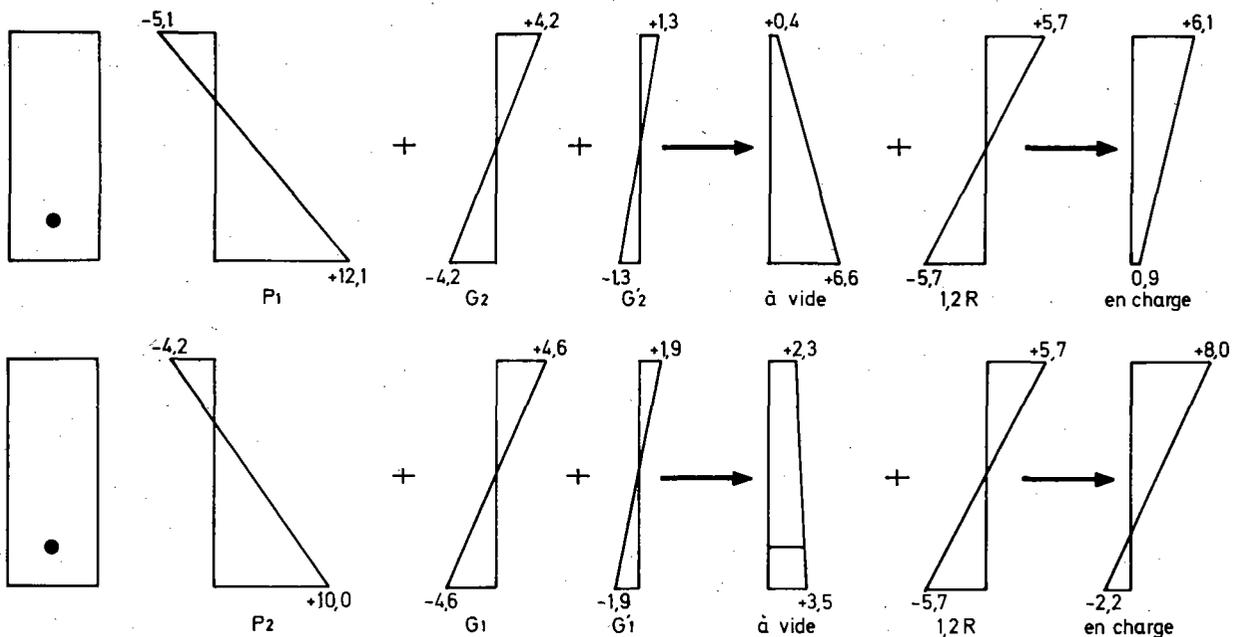
La section sera vérifiée en genre IIa, avec : $\sigma'_{28} = 30 \text{ MPa}$

$$\sigma_{28} = 0,6 + 0,06 \sigma'_{28} = 2,4 \text{ MPa}$$

Les contraintes à respecter sont alors :

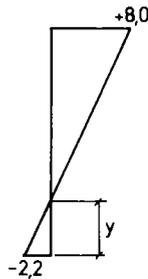


Le calcul des contraintes, effectué avec P_1 et (g_2, g'_2) d'une part, avec P_2 et (g_1, g'_1) d'autre part donne :



Les contraintes limites du genre IIa sont donc largement satisfaites. En contrepartie de la traction de - 2,2 MPa que l'on obtient dans le cas le plus défavorable sur la fibre inférieure, il nous faut, en vertu de l'article 21.42 disposer au voisinage de cette fibre, une section d'acier

$$A_a = \frac{B_t}{1000} + \frac{N_{Bt}}{\sigma_e}$$



On a : $\frac{y}{1,10} = \frac{2,2}{2,2+8,00}$ D'où : $y = 0,237$ m

Et : $B_t = 0,237 \times 0,50 = 0,119$ m²

$$N_{Bt} = -\frac{1}{2} \times 2,2 \times 0,237 \times 0,50 = 0,13$$
 MN

Si l'on prend des aciers HA avec $\sigma_e = 412$ MPa

$$A_a = \left(\frac{0,119}{1000} + \frac{0,13}{412} \right) \times 10^4 = 4,3$$
 cm² (par exemple 4. HA12)

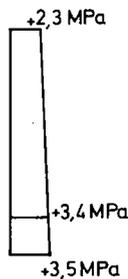
2.3. Etats limites ultimes

Nous ne ferons ici que la justification vis à vis de la sollicitation S_{ul} maxi (autrement dit celle qui provoque les compressions maximales sur la fibre supérieure).

Les éléments de réduction de cette sollicitation au niveau des aciers de précontrainte sont :

$$S_{ul} \text{ maxi } \begin{cases} \mathcal{M}_{ul} = 1,2 \left[1,1 (M_{G1} + M_{G'1}) + 1,33 M_R \right] = 1,63 \text{ MN} \times \text{m} \\ N_{ul} = 1,2 P_2 = 1,2 \times 1,59 = 1,91 \text{ MN} \end{cases}$$

Comme nous l'avons déjà vu, la contrainte caractéristique des aciers de précontrainte est : $\sigma_{P_2} = 879$ MPa et la contrainte du béton au niveau des câbles sous l'effet de P_2 , M_{G_1} et $M_{G'1}$.

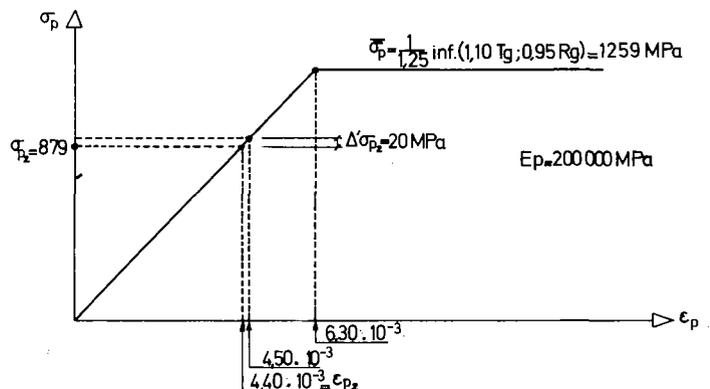


$$\sigma'_{bL_2} = 3,4$$
 MPa

ce qui entraîne $\Delta \sigma_{P_2} = 6 \sigma'_{bL_2} \neq 20$ MPa

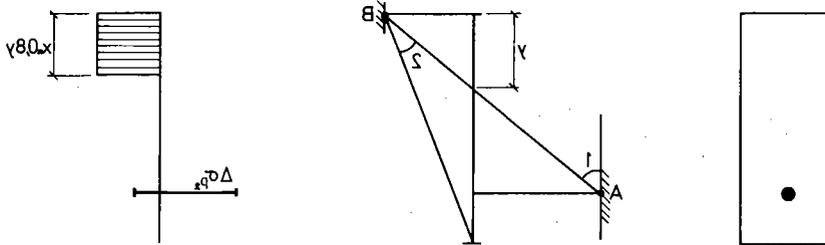
Dans cette justification aux états limites ultimes, nous négligerons les aciers passifs et nous prendrons pour diagramme contraintes déformations de calcul des aciers de précontrainte le diagramme élasto-plastique parfait.

Par ailleurs, $\bar{\sigma}'_{bul} = \frac{0,85 \times 30}{0,85 \times 1,5} = 20$ MPa



En effet, $k_b = 0,85$ car la combinaison de calcul fait intervenir les charges routières d'exploitation dont la durée d'application est présumée inférieure à 1 heure.

Nous pouvons opérer à N constant et chercher la sollicitation ultime $\overline{S}_{ul} \left\{ \overline{N}_{ul} = N_{ul} = 1,91 \text{ MN}; \mathcal{M}_{ul \text{ sup}} \right\}$



Partons, pour ce faire du diagramme de déformations AB, limite entre les domaines ① et ②, en utilisant comme il est légitime de le faire dans les domaines ① et ② le diagramme rectangulaire simplifié pour le béton

$$\text{On a : } \frac{y}{h_p} = \frac{\epsilon'_{bul}}{\epsilon'_{bul} + \Delta''\epsilon_{p2}} \quad \text{soit : } y = 1,00 \times \frac{3,5}{13,5} = 0,259 \text{ m}$$

$$\text{et : } x = 0,8 y = 0,207 \text{ m}$$

$$\text{Alors } \overline{N}_{ul1} = bx \overline{\sigma'_{bul}} - A_p \Delta \sigma_{p2} \quad \text{avec : } \Delta \sigma_{p2} = 1259 - 879 = 380 \text{ MPa}$$

$$\text{D'où : } \overline{N}_{ul1} = 0,50 \times 0,207 \times 20 - 3 \times 603 \times 380 \cdot 10^{-6} = 1,38 \text{ MN}$$

On a donc $\overline{N}_{ul1} < N_{ul} = 1,91 \text{ MN}$. Pour augmenter l'effort normal équilibré, il faut augmenter x en tournant autour du point B. C'est de la sorte, un diagramme du domaine ② qui conduira à l'état ultime cherché.

Compte tenu de l'extrême simplicité des diagrammes contraintes-déformations utilisés dans le cas présent, on peut obtenir directement l'axe neutre.

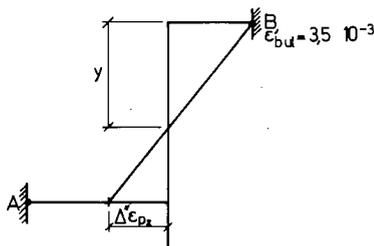
Dans la mesure, en effet où $\Delta''\epsilon_{p2} \geq (6,30 - 4,50) \times 10^{-3} = 1,80 \cdot 10^{-3}$, $\Delta \sigma_{p2} = 380 \text{ MPa}$ et l'on obtient x par l'équation :

$$N_{ul} = bx \overline{\sigma'_{bul}} - A_p \Delta \sigma_{p2}$$

$$\text{Soit : } 1,91 = 0,5 x \times 20 - 3 \times 603 \times 380 \cdot 10^{-6}$$

$$\text{On en déduit : } x = 0,260 \text{ m}$$

$$\text{Par suite : } y = \frac{x}{0,8} = 0,325 \text{ m} \quad \text{et :}$$



$$\begin{aligned} \Delta''\epsilon_{p2} &= \epsilon'_{bul} \frac{h_p - y}{y} \\ &= 3,5 \cdot 10^3 \times \left(\frac{1,00 - 0,325}{0,325} \right) \\ &= 7,27 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

On vérifie bien que $\Delta''\epsilon_{p_2} > 1,80 \cdot 10^{-3}$ ce qui nous prouve la validité de ce calcul.

Pour $x = 0,260$, on a ainsi $\overline{N}_{ul} = N_{ul} = 1,91 \text{ MN}$

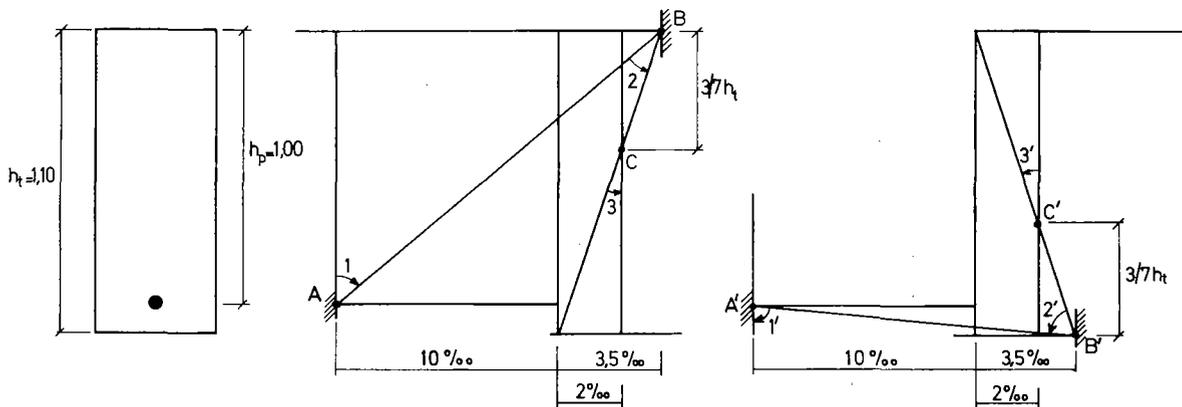
$$\begin{aligned} \text{et : } \overline{W}_{ul \text{ sup}} &= bx \overline{\sigma}'_{bul} \left(h_p - \frac{x}{2} \right) \\ &= 0,50 \times 0,260 \times 20 (1,00 - 0,130) = 2,26 \text{ MN} \times \text{m}. \end{aligned}$$

La sécurité est assurée, puisque :

$$\overline{W}_{ul} = 1,63 \text{ MN} \times \text{m} < \overline{W}_{ul \text{ sup}}$$

2.4. Remarques

2.4.1. On peut très facilement, dans le cas de cette section extrêmement simple calculer un certain nombre de points de la courbe d'interaction $(\overline{N}_{ul}, \overline{W}_{ul})$ qui délimite le domaine de résistance de la section.



① – Diagramme AB (limite entre les domaines ① et ②)

Alors : $\Delta''\epsilon_{p_2} = \Delta''\epsilon_{Pul} = 10 \cdot 10^{-3}$ D'où : $\Delta\sigma_{P_2} = \bar{\sigma}_p - \sigma_{P_2} = 1259 - 879 = 380 \text{ MPa}$

et : $\epsilon'_b = \epsilon'_{bul} = 3,5 \cdot 10^{-3}$

Comme on l'a vu précédemment, la position de l'axe neutre est donnée par :

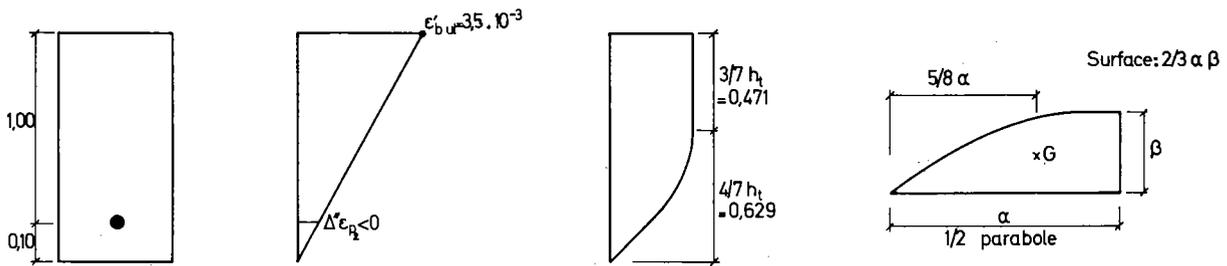
$$\frac{y}{h_p} = \frac{\epsilon'_b}{\epsilon'_b + \Delta''\epsilon_{p_2}} \quad \text{ce qui donne :}$$

$$y = 0,259 \text{ m} \quad \text{et : } x = 0,8 y = 0,207 \text{ m}$$

Par suite : $\overline{N}_{ul} = bx \overline{\sigma}'_{bul} - A_p \Delta\sigma_{P_2} = 0,50 \times 0,207 \times 20 - 3 \times 603 \times 380 \cdot 10^{-6} = 1,38 \text{ MN}$

$$\text{et : } \overline{W}_{ul} = bx \overline{\sigma}'_{bul} \left(h_p - \frac{x}{2} \right) = 0,50 \times 0,207 \times 20 \times \left(1,00 - \frac{0,207}{2} \right) = 1,86 \text{ MN} \times \text{m}$$

⑥ – Diagramme BC (limite entre les domaines ② et ③)



$$\text{Alors : } \Delta''\epsilon_{P_2} = -\frac{0,10}{1,10} \times 3,5 \cdot 10^{-3} = -0,32 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta''\sigma_{P_2} = E_p \Delta''\epsilon_{P_2} = -64 \text{ MPa}$$

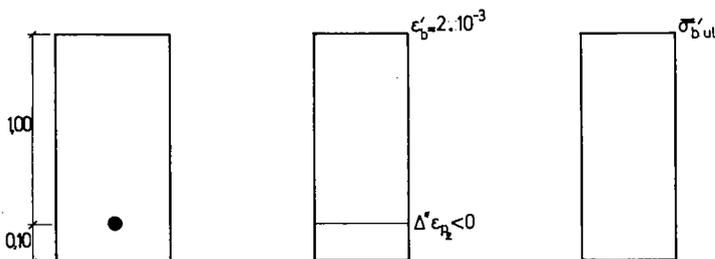
$$\text{D'où : } \Delta\sigma_{P_2} = 20 - 64 = -44 \text{ MPa}$$

$$\text{Par suite : } \overline{N}_{ul} = 0,5 \times 20 \left(0,471 + \frac{2}{3} \times 0,629\right) + 3 \times 603 \times 44 \cdot 10^{-6} = 8,98 \text{ MN}$$

$$\overline{W}_{ul} = 0,5 \times 20 \left[0,471 \times \left(1 - \frac{0,471}{2}\right) + \frac{2}{3} \times 0,629 \times \left(\frac{5}{8} \times 0,629 - 0,10\right)\right] = 4,83 \text{ MN} \times \text{m}$$

⑦ – Diagramme C C' (limite entre ③ et ③')

$$\text{Alors : } \epsilon'_{b'} = 2 \cdot 10^{-3}; \Delta''\epsilon_{P_2} = -2 \cdot 10^{-3}$$



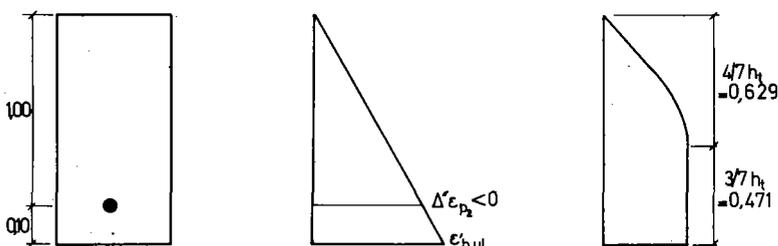
$$\text{Soit : } \Delta''\sigma_{P_2} = E_p \Delta''\epsilon_{P_2} = -400 \text{ MPa}$$

$$\text{et : } \Delta\sigma_{P_2} = 20 - 400 = -380 \text{ MPa}$$

$$\text{Dans ces conditions : } \overline{N}_{ul} = 0,5 \times 1,10 \times 20 + 3 \times 603 \times 380 \cdot 10^{-6} = 11,69 \text{ MPa}$$

$$\overline{W}_{ul} = 0,5 \times 1,10 \times 20 \times (0,55 - 0,10) = 4,95 \text{ MN} \times \text{m}$$

⑧ – Diagramme B'C' (limite entre ②' et ③')



$$\text{On a : } \Delta''\epsilon_{P_2} = -\frac{1,00}{1,10} \times 3,5 \cdot 10^{-3} = -3,18 \cdot 10^{-3}$$

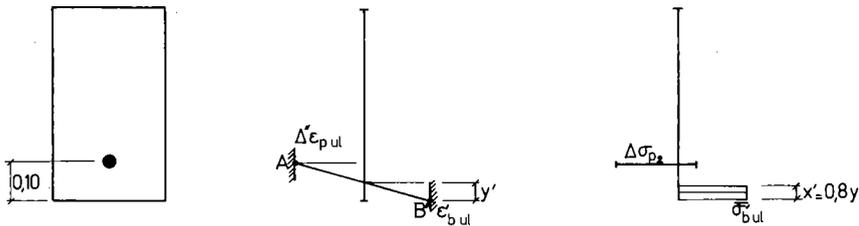
$$\text{Soit : } \Delta''\sigma_{P_2} = E_p \Delta''\epsilon_{P_2} = -636 \text{ MPa}$$

$$\text{et : } \Delta\sigma_{P_2} = 20 - 636 = -616 \text{ MPa}$$

$$\text{Par suite : } \overline{N}_{ul} = 0,50 \times 20 \left[0,471 + \frac{2}{3} 0,629 \right] + 3 \times 603 \times 616 \cdot 10^{-6} = 10,02 \text{ MN}$$

$$\begin{aligned} \overline{w}_{ul} &= 0,50 \times 20 \left[0,471 \left(\frac{0,471}{2} - 0,10 \right) + \frac{2}{3} \times 0,629 \left(1,00 - \frac{5}{8} \times 0,629 \right) \right] \\ &= 3,18 \text{ MN} \times \text{m} \end{aligned}$$

⑤ – Diagramme B'A (limite entre ①) et ②)



Comme $\Delta''\epsilon_{P_2} = \Delta''\epsilon_{P_{ul}}$, on a :

$$y' \text{ est défini par : } \frac{y'}{0,10} = \frac{3,5}{3,5+10}$$

d'où $y' = 0,026 \text{ m}$ et $x' = 0,8 y' = 0,021 \text{ m}$

$$\text{Par suite : } \overline{N}_{ul} = 0,5 \times 0,021 \times 20 - 3 \times 603 \times 380 \cdot 10^{-6} = -0,48 \text{ MN}$$

$$\overline{w}_{ul} = -0,5 \times 0,21 \times 20 \times \left(0,10 - \frac{0,021}{2} \right) = -0,02 \text{ MN} \times \text{m}$$

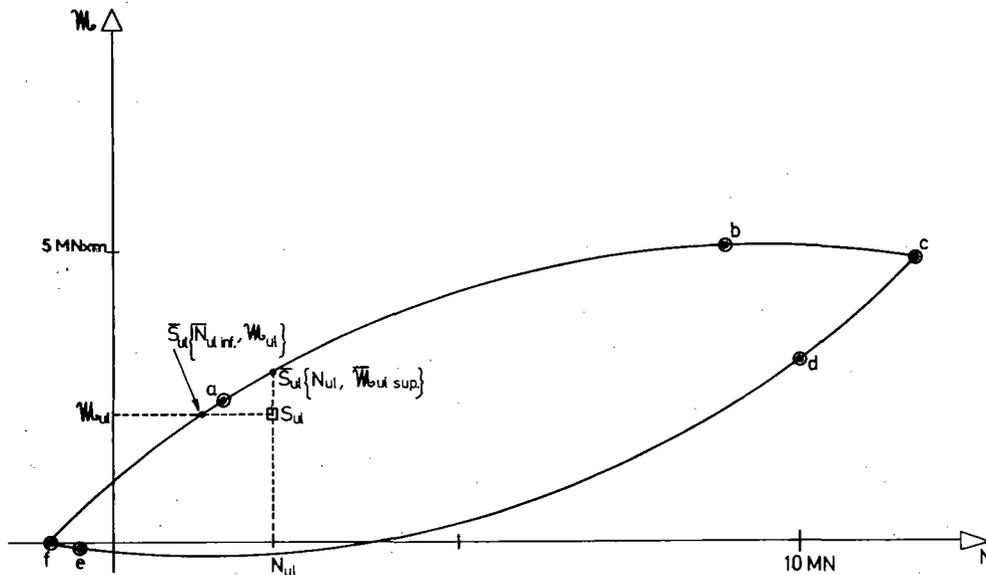
⑥ – Diagramme vertical passant par A (tout le béton tendu)

$$\text{Alors } \Delta\sigma_{P_2} = 380 \text{ MPa}$$

$$\overline{N}_{ul} = -3 \times 603 \times 380 \cdot 10^{-6} = -0,69 \text{ MN}$$

$$\overline{w}_{ul} = 0$$

Le domaine de résistance de la section est figuré ci-après :



2.4.2. Pour justifier la section, on peut opérer à \mathcal{M} constant ($\mathcal{M} = \mathcal{M}_{u1}$) au lieu de raisonner comme précédemment à N constant. Il s'agit alors de s'assurer que $N_{u1} \geq \overline{N_{u1 \text{ inf}}}$ (cf. figure précédente).

La figure précédente nous montre que l'on va vraisemblablement obtenir un diagramme de déformations se situant dans le domaine ①.

Vérifions-le par le calcul.

En admettant le diagramme rectangulaire simplifié, sa hauteur x est définie par :

$$\mathcal{M}_{u1} = bx\overline{\sigma'_{bul}} \left(h_p - \frac{x}{2} \right)$$

$$\text{Soit : } 1,63 = 0,50 \times x \times 20 \left(1,00 - \frac{x}{2} \right)$$

$$\text{D'où : } x = 0,179 \text{ m et } y = \frac{x}{0,8} = 0,224 \text{ m}$$

$$\text{Par suite : } \frac{\Delta''\epsilon_{P_2}}{\epsilon'_b} = \frac{1,00 - 0,224}{0,224} = 3,46$$

ce qui montre que l'on a bien : $\Delta''\epsilon_{P_2} = \Delta''\epsilon_{P_{ul}} = 10 \cdot 10^{-3}$ et $\epsilon'_b = \frac{10}{3,46} \cdot 10^{-3} = 2,89 \cdot 10^{-3}$

(L'hypothèse $\epsilon'_b = \epsilon'_{bul} = 3,5 \cdot 10^{-3}$ conduirait à : $\Delta''\epsilon_{P_2} = 3,46 \times 3,5 \cdot 10^{-3} = 12,11 \cdot 10^{-3} > \Delta''\epsilon_{P_{ul}}$ ce qui ne se peut pas)

$$\text{Par suite : } \Delta\sigma_{P_2} = \overline{\sigma_p} - \sigma_{P_2} = 1259 - 879 = 380 \text{ MPa}$$

$$\text{Et : } \overline{N_{u1 \text{ inf}}} = bx\overline{\sigma'_{bul}} - A_p \Delta\sigma_{P_2} = 0,50 \times 0,179 \times 20 - 3 \times 603 \times 380 \cdot 10^{-6} = 1,10 \text{ MN}$$

La condition : $N_{u1} = 1,91 \text{ MN} > \overline{N_{u1 \text{ inf}}}$ est ainsi vérifiée.

3 – DEUXIEME EXEMPLE

3.1. Données générales

Nous reprenons ici l'exemple de la travée indépendante de 48,50 m de portée, déjà traité en II 3 pour ce qui est de l'évaluation de la précontrainte. Rappelons que cet ouvrage, de type caisson est précontraint au moyen de 26 câbles, 18 tendus à 14 jours et les 8 derniers à 28 jours.

3.1.1. Précontrainte

Les valeurs moyennes et caractéristiques de la précontrainte sont résumées ci-dessous :

	14 j	28 j – ϵ	28 j + ϵ	∞
P	27,72	26,64	37,78	33,62
P ₁	28,80	28,08	39,86	36,66
P ₂	26,46	25,20	35,52	30,68

3.1.2. Sollicitations

- Poids propre

$$M_G = 30,29 \text{ MN} \times \text{m}$$

$$M_{G1} = 32,11 \text{ MN} \times \text{m} (= 1,06 M_G)$$

$$M_{G2} = 29,08 \text{ MN} \times \text{m} (= 0,96 M_G)$$

- Superstructures

$$M_{G'} = 9,19 \text{ MN} \times \text{m}$$

$$M_{G'1} = 11,02 \text{ MN} \times \text{m} (= 1,2 M_{G'})$$

$$M_{G'2} = 7,35 \text{ MN} \times \text{m} (= 0,8 M_{G'})$$

- Charges d'exploitation

$$M_R = 14,65 \text{ MN} \times \text{m}$$

3.1.3. Caractéristiques géométriques de la section

- Brute

$$B = 4,204 \text{ m}^2$$

- Nette

$$B_n = 4,120 \text{ m}^2$$

$$v_n = 1,018 \text{ m} \quad v'_n = 1,382 \text{ m}$$

$$I_n = 3,559 \text{ m}^4$$

$$\frac{I_n}{v_n} = 3,496 \text{ m}^3 \quad \frac{I_n}{v'_n} = 2,575 \text{ m}^3$$

Nous ne ferons aucun calcul en section homogène malgré la latitude offerte par les paragraphes 18-41 et 18-42 du Règlement.

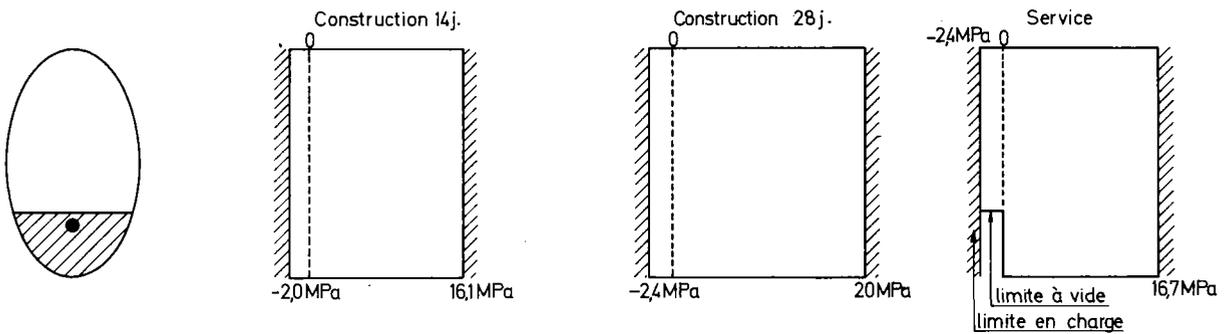
3.2. Etats limites d'utilisation

La section est vérifiée en genre IIa avec :

$$\sigma'_{28} = 30 \text{ MPa} \quad \sigma'_{14} = 24,2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{28} = 2,4 \text{ MPa} \quad \sigma_{14} = 2,0 \text{ MPa}$$

Les contraintes limites sont donc :



3.2.1. Vérifications en service

Commençons par évaluer les contraintes probables

Précontrainte : $P = 33,62 \text{ MN}$ $e_p = -(1,382 - 0,199) = -1,183 \text{ m}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_s = \frac{33,62}{4,120} - \frac{33,62 \times 1,183}{3,496} = -3,2 \text{ MPa} \\ \sigma_i = \frac{33,62}{4,120} + \frac{33,62 \times 1,183}{2,575} = 23,6 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

Poids propre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_s = \frac{30,29}{3,496} = 8,7 \text{ MPa} \\ \sigma_i = -\frac{30,29}{2,575} = -11,8 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

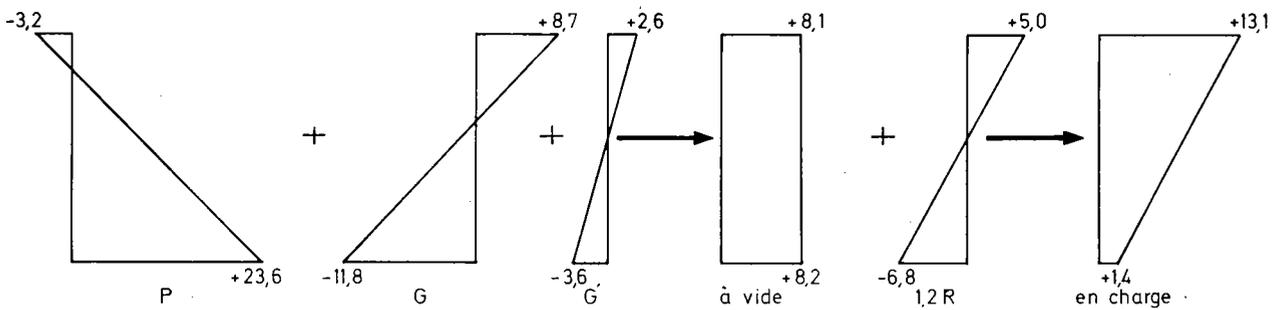
Superstructures

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_s = \frac{9,19}{3,496} = 2,6 \text{ MPa} \\ \sigma_i = -\frac{9,19}{2,575} = -3,6 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

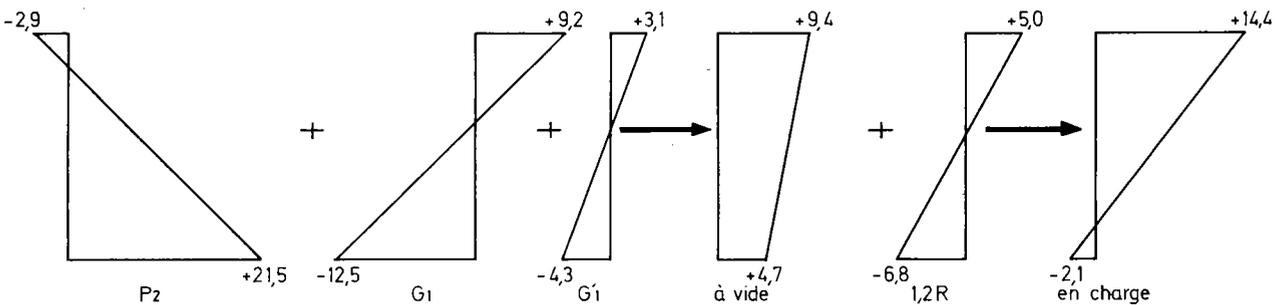
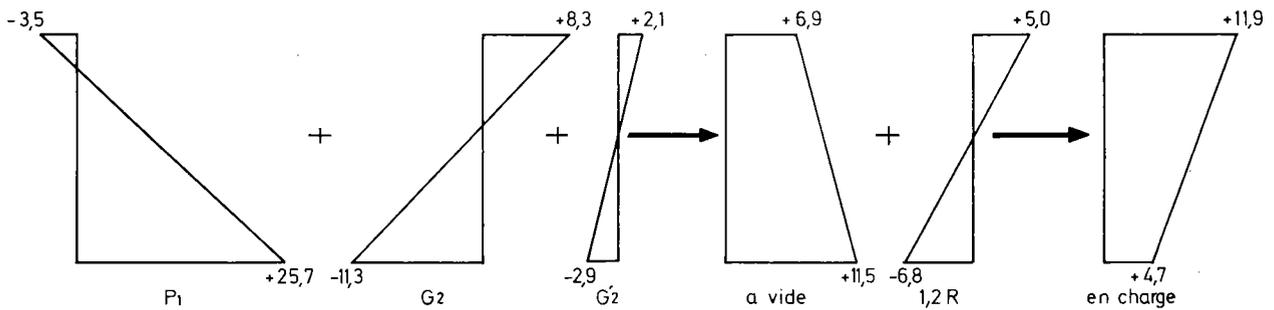
Charges d'exploitation (1,2 R) (1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_s = \frac{1,2 \times 14,65}{3,496} = 5,0 \text{ MPa} \\ \sigma_i = -\frac{1,2 \times 14,65}{2,575} = -6,8 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

(1) Nota : Nous avons admis à ce titre de simplification, que toutes les charges d'exploitation étaient des charges routières (d'où : $\gamma_{Qc} = 1,2$). En réalité, elles comprennent des charges de trottoir qu'en toute rigueur on ne devrait pas pondérer ($\gamma_{Qc} = 1$). Cette approximation se traduit par une erreur négligeable.



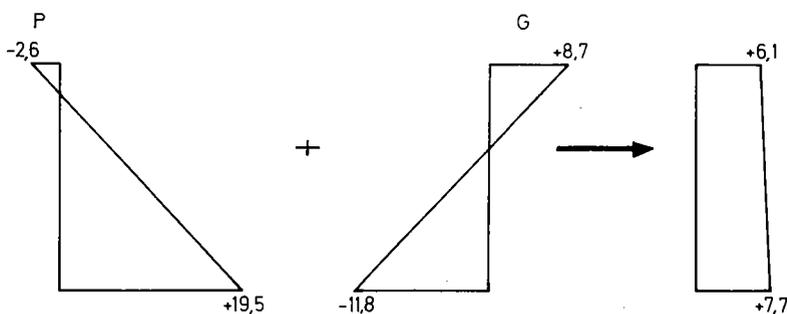
Les vérifications réglementaires doivent, en fait, être conduites à partir des valeurs caractéristiques des actions (et non à partir de leurs valeurs probables). Pour les vérifications à vide, il y aura lieu de considérer P_1 et (G_2, G'_2) ; pour les vérifications en charge P_2 et (G_1, G'_1) .



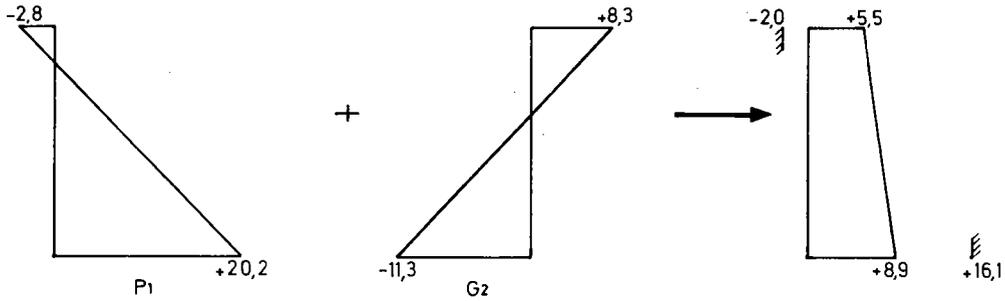
On voit donc qu'en service les contraintes limites $-2,4$ MPa et $+16,7$ MPa sont toujours respectées. En outre, la section d'enrobage (et même toute la section) reste bien comprimée sous l'effet des seules charges de longue durée.

3.2.2. Vérification à la construction à 14 jours

En valeurs probables
($P = 27,72$ MN)



Le risque étant celui d'une compression excessive sur la fibre inférieure, nous ferons la vérification avec P_1 ($= 28,80 \text{ MN}$) et G_2 .

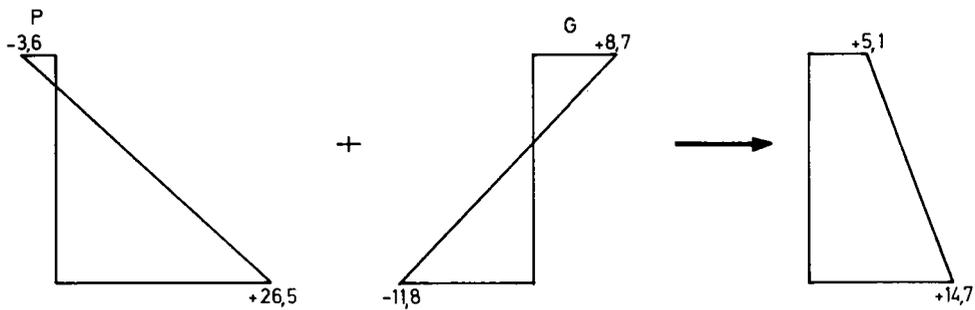


3.2.3. Vérification à la construction à $28 j - \epsilon$

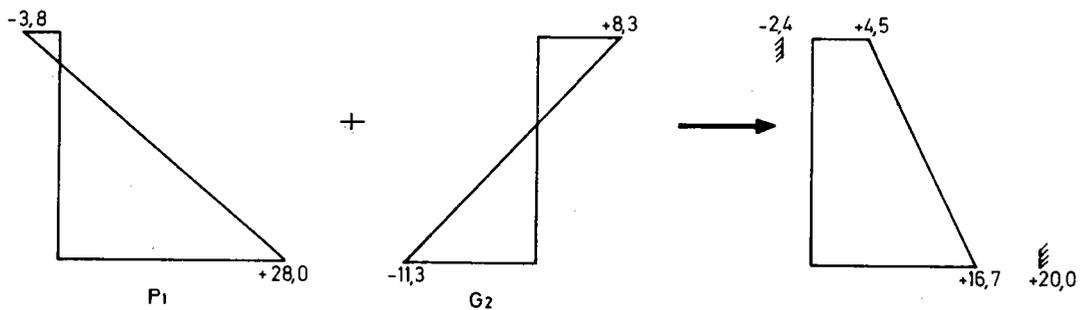
On verrait très facilement qu'à $28 j - \epsilon$ on n'a aucun risque de traction sur la fibre inférieure.

3.2.4. Vérification à la construction à $28 j + \epsilon$

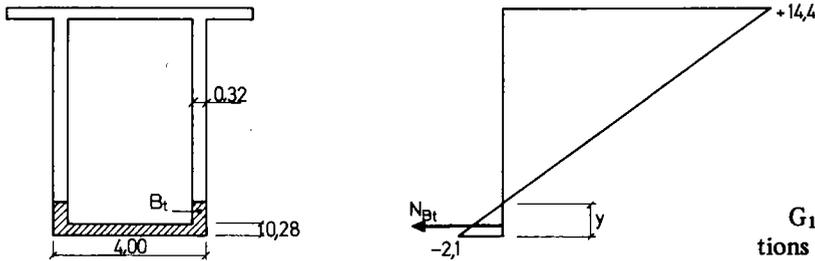
En valeurs probables ($P = 37,78 \text{ MN}$)



Comme le danger est, là encore, celui d'un excès de compression sur la fibre inférieure, nous ferons la vérification réglementaire avec P_1 ($= 39,86 \text{ MN}$) et G_2 .



3.2.5. Aciers passifs



C'est en service, sous l'effet de P_2 , G_1 , G'_1 et R que l'on obtient les tractions les plus importantes.

En application de l'article 21.42, il y a donc lieu de disposer au voisinage de la fibre inférieure, une section d'acier passif :

$$A_a = \frac{B_t}{1000} + \frac{N_{Bt}}{\sigma_e}$$

$$\text{On a : } \frac{y}{2,40} = \frac{2,1}{2,1+14,4} \text{ soit : } y = 0,305 \text{ m}$$

D'où en négligeant les goussets à la jonction du hourdis inférieur et des âmes.

$$B_t = 4,00 \times 0,305 - 3,36 \times (0,305 - 0,28) = 1,136 \text{ m}^2$$

$$N_{Bt} = 4 \times 0,305 \times \frac{2,1}{2} - 3,36 \times 0,025 \times 2,1 \times \frac{0,025}{0,305} \times \frac{1}{2}$$

$$N_{Bt} = 1,27 \text{ MN}$$

Si l'on prend des aciers à haute adhérence de nuance FeE40, avec $\sigma_e = 412 \text{ MPa}$:

$$A_a = \left(\frac{1,136}{1000} + \frac{1,27}{412} \right) \cdot 10^4 = 42 \text{ cm}^2$$

Les aciers correspondants seront répartis le long des parements du hourdis inférieur (par exemple IHA 14 tous les 28 cm). Ces aciers jouent en même temps le rôle d'armatures de peau (art. 21.41).

3.3. Etats limites ultimes

3.3.1. Vérification en service

La combinaison à prendre en compte est alors : $1,2 \left[S(1,1 Q_{L1}) + S(P_2) + S(1,33 Q_c) \right]$

Les éléments de réduction de cette sollicitation par rapport au centre de gravité des aciers de précontrainte sont :

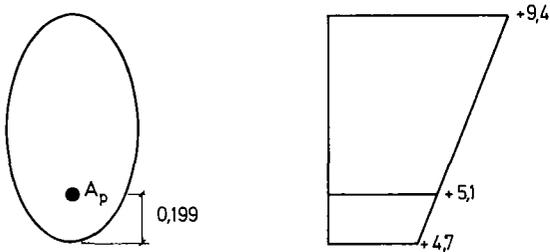
$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{ul} &= 1,2 \left[1,1 (M_{G_1} + M_{Q_1}) + 1,33 M_R \right] \\ &= 1,2 \left[1,1 (32,11 + 11,02) + 1,33 \times 14,65 \right] = 80,31 \text{ MN} \times \text{m} \end{aligned}$$

$$N_{ul} = 1,2 P_2 = 1,2 \times 30,68 = 36,82 \text{ MN}$$

La contrainte moyenne dans les câbles, sous le seul effet des actions permanentes est :

$$\sigma_{P_2} = 1044 \text{ MPa}$$

La contrainte du béton au niveau des câbles ayant pour valeur :



$$\sigma'_{bL_2} = \frac{4,7(2,40 - 0,199) + 9,4 \times 0,199}{2,40} = 5,1 \text{ MPa}$$

On a adopté d'autre part le diagramme rectangulaire simplifié pour le béton et le diagramme élasto-plastique parfait pour les aciers de précontrainte, les aciers passifs étant ici négligés dans l'évaluation de la résistance.

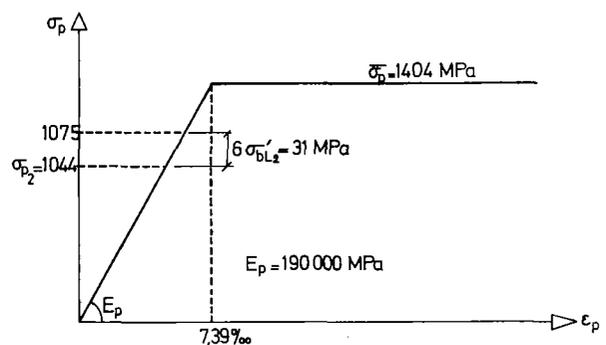
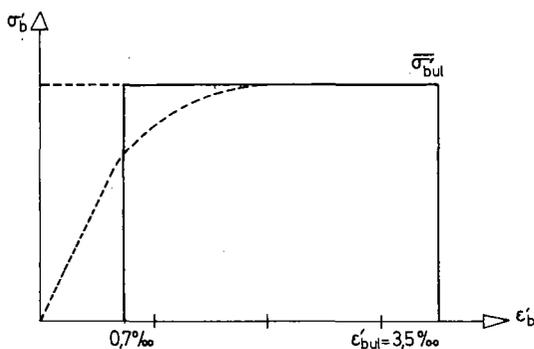
Le palier plastique du diagramme de calcul des aciers se situe à :

$$\bar{\sigma}_p = \frac{1}{1,25} \times \inf. \left\{ 1,10 T_g ; 0,95 R_g \right\} = \frac{1}{1,25} \inf. \left\{ 1802; 1755 \right\} = 1404 \text{ MPa}$$

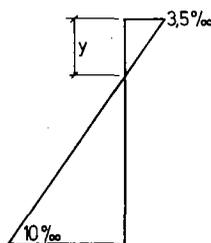
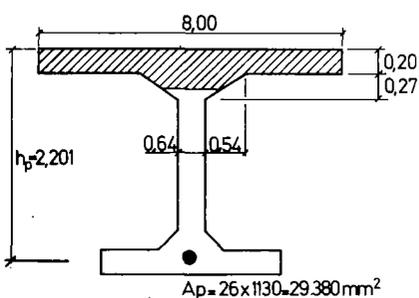
D'un autre côté

$$\bar{\sigma}'_{bui} = \frac{0,85 \times 30}{0,85 \times 1,5} = 20 \text{ MPa}$$

On a en effet $k_b = 0,85$ car la combinaison de calcul fait intervenir les charges d'exploitation dont la durée d'application est présumée inférieure à 1 h. sur les ponts-routes.



Pour voir dans quel domaine se situe le diagramme des déformations dans la section, partons du diagramme frontière entre les diagrammes ① et ② soit :



$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon'_b = \epsilon'_{bui} = 3,5 \text{ ‰} \\ \Delta''\epsilon_{p2} = \Delta''\epsilon_{pui} = 10 \text{ ‰} \end{array} \right.$$

Ainsi :

$$\frac{y}{2,201} = \frac{3,5}{10+3,5} \text{ soit } y = 0,571 \text{ m}$$

$$\text{et : } \sigma_p = 1404 \text{ MPa soit } \Delta\sigma_{p2} = 360 \text{ MPa}$$

Par suite : $x = 0,8$ $y = 0,457$ m

et : $B(x) = 8 \times 0,20 + 0,64 \times 0,257 + 0,54 \times 0,27 - 0,013 \times 0,026 = 1,91 \text{ m}^2$

donc : $N_B = 1,91 \times 20 = 38,2 \text{ MN}$

et : $\overline{N_{ul1}} = N_B - A_p \cdot \Delta\sigma_{P_2} = 38,2 - 29,380 \cdot 10^{-6} \times 360 = 27,6 \text{ MN}$

de la sorte : $\overline{N_{ul1}} = 27,6 \text{ MN} < N_{ul} = 36,82 \text{ MN}$

On en déduit que les déformations de la section appartiennent au domaine ②

Plutôt que de rechercher la solution par approximations successives on va essayer ici de l'obtenir directement, en supposant qu'au moment où on atteint, dans la section, l'état limite ultime, les aciers sont encore sur leur palier plastique, ce qu'il y aura lieu de vérifier au terme du calcul.

Pour équilibrer N_{ul} on doit avoir :

$$N_B = N_{ul} + A_p \Delta\sigma_{P_2} = 36,82 + 29\,380 \cdot 10^{-6} \times 360 = 36,82 + 10,58 = 47,40 \text{ MN}$$

D'où : $B(x) = \frac{47,40}{20} = 2,370 \text{ m}^2$

Soit : $7,36 \times 0,20 + 0,54 \times 0,27 + 0,64 x = 2,370 \text{ m}^2$

ou : $1,618 + 0,64 x = 2,370 \text{ m}^2$

il vient : $x = 1,175 \text{ m}$

$$y = \frac{1,175}{0,8} = 1,469 \text{ m}$$

$$\Delta''\epsilon_{P_2} = \frac{h_p - y}{y} \times \epsilon'_{bul} = \frac{2,201 - 1,469}{1,469} \times 3,5 \cdot 10^{-3} = 1,74 \cdot 10^{-3}$$

$$\begin{aligned} \text{Par suite : } \epsilon_p &= \epsilon_{P_2} + \Delta'\epsilon_{P_2} + \Delta''\epsilon_{P_2} = \frac{1044}{190\,000} + \frac{31}{190\,000} + 1,74 \cdot 10^{-3} \\ &= 7,40 \cdot 10^{-3} > 7,39 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Les aciers sont bien (tout juste) sur leur palier plastique et la solution trouvée convient.

Par suite :

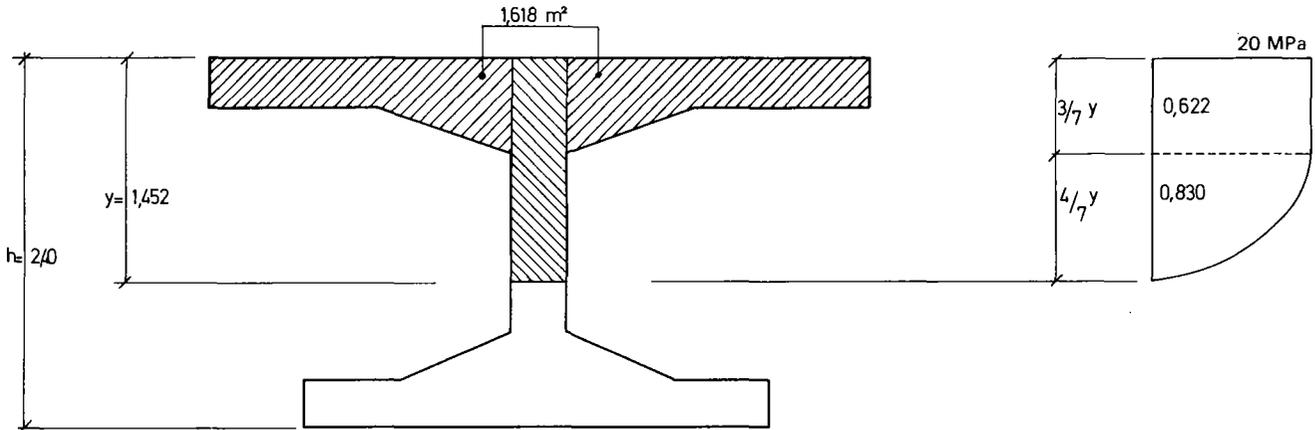
$$\overline{M_{ul\ sup}} = 20 \left[7,36 \times 0,20 \times (2,201 - 0,10) + 0,54 \times 0,27 \left(2,201 - 0,20 - \frac{0,27}{3} \right) + 0,64 \times 1,175 \left(2,201 - \frac{1,175}{2} \right) \right] = 91,69 \text{ MN} \cdot \text{m}$$

On a : $M_{ul} = 80,31 \text{ MN} \cdot \text{m} < \overline{M_{ul\ sup}} = 91,69 \text{ MN} \cdot \text{m}$

La sécurité est donc assurée en service.

Remarque : Il n'aurait guère été plus compliqué, dans le cas présent, d'utiliser le diagramme parabole rectangle pour le béton.

En admettant que : $\epsilon'_b = \epsilon'_{bul} = 3,5 \text{ ‰}$, que les aciers sont sur leur palier plastique ($\sigma_p = 1404 \text{ MPa}$), que les points de déformations respectives 2 ‰ et 0 sont dans l'âme, on doit avoir : $N_B = 47,40 \text{ MN}$.



$$\text{D'où : } (1,618 + 0,64 \times \frac{3}{7} y) \times 20 + 0,64 \times \frac{4}{7} y \times \frac{2}{3} \times 20 = 47,40 \text{ d'où } y = 1,452 \text{ m}$$

On en déduit :

$$\Delta'' \epsilon_{p_2} = \frac{h_p - y}{y} \epsilon'_{bul} = \frac{2,201 - 1,452}{1,452} \times 3,5 \cdot 10^{-3} = 1,81 \cdot 10^{-3}$$

On vérifie donc, comme précédemment, que les aciers sont effectivement sur leur palier plastique. On peut dès lors calculer :

$$\begin{aligned} \overline{w}_{ul \text{ sup}} &= 20 \left[7,36 \times 0,20 \times (2,201 - 0,10) + 0,54 \times 0,27 \left(2,201 - 0,20 - \frac{0,27}{3} \right) \right. \\ &\quad \left. + 0,64 \times 0,622 \left(2,201 - \frac{0,622}{2} \right) \right] + 0,64 \times 0,83 \times \frac{2}{3} \times 20 \left(2,201 - 0,622 - \frac{3}{8} \times 0,83 \right) \\ &= 91,45 \text{ MN} \times \text{m} \end{aligned}$$

Les résultats obtenus avec le diagramme parabole rectangle sont donc ici extrêmement voisins des résultats obtenus avec le diagramme rectangulaire simplifié.

3.3.2. Vérification à la construction à 14 j

On doit considérer la sollicitation

$$1,2 \left[S(0,9 Q_{L_2}) + S(P_1) \right]$$

dont les éléments de réduction par rapport au centre de gravité des armatures de précontrainte sont :

$$w_{ul} = 1,2 \left[0,9 M_{G_2} \right] = 1,2 \times 0,9 \times 29,08 = 31,41 \text{ MN} \times \text{m}$$

$$N_{ul} = 1,2 P_1 = 1,2 \times 28,80 = 34,56 \text{ MN}$$

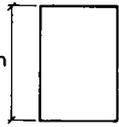
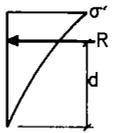
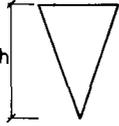
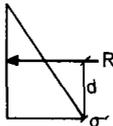
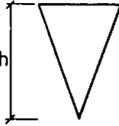
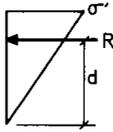
$$\text{on a alors : } \overline{\sigma'_{bul}} = \frac{0,85 \times 24,2}{1,4} = 14,7 \text{ MPa}$$

En effet $k_b = 1$ l'effort de précontrainte restant appliqué avec une valeur voisine de sa valeur initiale pendant plus de 24 h.

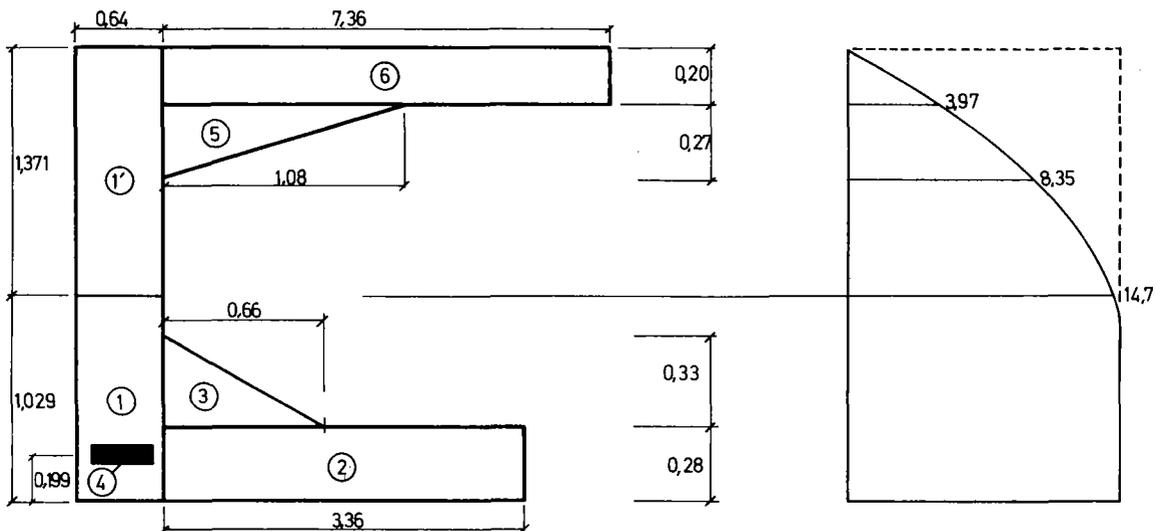
Dans le calcul qui suit, aucune chute de tension (provenant d'une déformation plastique importante du béton au niveau des câbles) n'est prise en compte bien qu'au moment le plus probable de la ruine éventuelle (mise en tension du 18ème des 18 câbles tendus à 14 jours) 17 des 18 câbles soient effectivement bloqués. Il est vrai que l'injection n'est pas encore faite.

Pour savoir à quel domaine appartient le diagramme des déformations partons du diagramme frontière entre les domaines ② et ③.

Le tableau donné un peu plus loin est obtenu en appliquant dans un premier temps une contrainte uniforme de 14,7 MPa à la section, puis en lui retirant la différence entre ce diagramme rectangulaire et le diagramme réel des contraintes. Pour ce faire il est bon de connaître la contrainte moyenne et la position de la résultante relatives à un certain nombre de diagrammes de contraintes appliqués à des surfaces élémentaires.

Surface	Contraintes	σ'_m	d
		$\frac{1}{3}\sigma'$	$\frac{3}{4}h$
		$\frac{1}{3}\sigma'$	$\frac{h}{2}$
		$\frac{2}{3}\sigma'$	$\frac{3}{4}h$

Le secteur 4 correspond aux vides laissés par les gaines ($28 \times 32,2 = 837 \text{ cm}^2$).

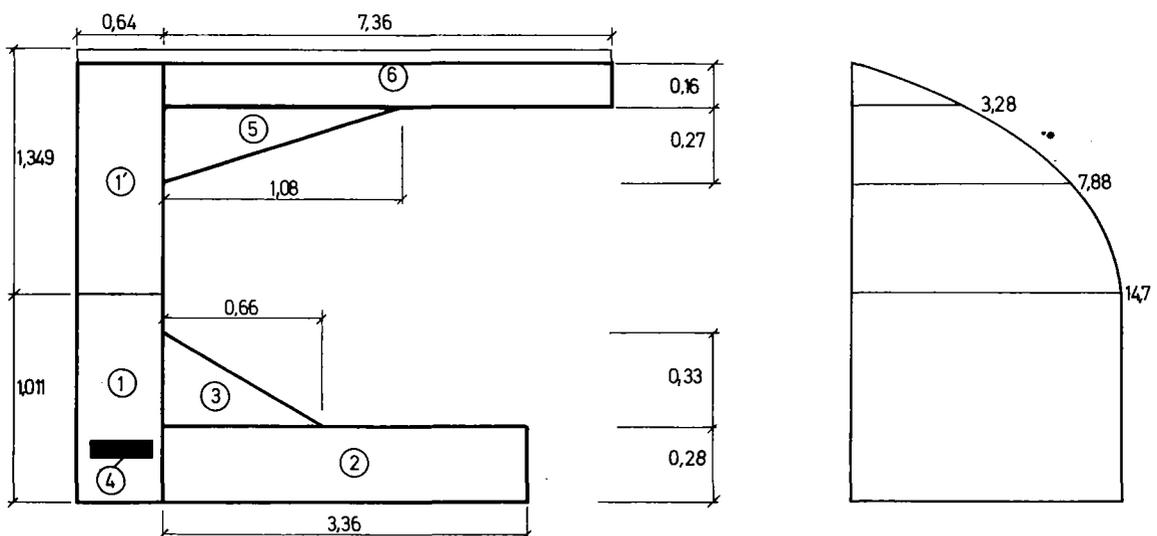


Secteur	B	σ'_m	N	Z	\mathcal{M}
1 + 1'	1,536	14,7	22,58	1,001	22,60
2	0,941	14,7	13,83	- 0,059	- 0,82
3	0,109	14,7	1,60	0,191	0,31
4	- 0,084	14,7	- 1,23	0	0
5	0,146	14,7	2,14	1,911	4,10
6	1,472	14,7	21,64	2,101	45,46
1'	0,878	$-\frac{14,7}{3} = - 4,9$	- 4,30	$2,201 - \frac{1,371}{4} = 1,858$	- 7,99
5	0,146	$-(14,7 - 8,35) = - 6,35$	- 0,93	1,911	- 1,77
	0,146	- 2,92	- 0,43	1,934	- 0,82
6	1,472	$-(14,7 - 3,97) = - 10,73$	- 15,79	2,101	-33,17
	1,472	$-\frac{3,97}{2} = - 1,99$	- 2,93	2,134	- 6,24
			$\overline{N_{ul1}} = 36,18$		$\overline{\mathcal{M}_{ul1}} = 21,66$

L'effort normal équilibré est donc supérieur à $N_{ul} = 34,56$ MN et le diagramme des déformations appartient au domaine ②. Autrement dit la section n'est pas entièrement comprimée.

Un deuxième calcul, analogue au précédent, avec une hauteur comprimée $y'_2 = 2,20$ m conduit à $N_{ul2} = 31,23$ MN. En interpolant linéairement entre ces deux valeurs, on en déduit une nouvelle valeur de y' : $y'_3 = 2,33$ m et ainsi de suite.

L'équilibre est, en fait obtenu pour $y' = 2,36$ m, ce qui permet de vérifier le tableau de calcul suivant :



Secteur	B	σ'_m	N	Z	\mathcal{M}
1 + 1'	1,510	14,7	22,20	0,981	21,78
2	0,941	14,7	13,83	- 0,059	- 0,82
3	0,109	14,7	1,60	0,191	0,31
4	- 0,084	14,7	- 1,23	0	0
5	0,146	14,7	2,14	1,911	4,10
6	1,178	14,7	17,31	2,081	36,02
1'	0,863	$-\frac{14,7}{3} = - 4,9$	- 4,23	1,824	- 7,71
5	0,146	$-(14,7 - 7,88)$ $= 6,82$	- 0,99	1,911	- 1,90
	0,146	- 3,07	- 0,45	1,934	- 0,86
6	1,178	$-(14,7 - 3,28)$ $= - 11,42$	-13,45	2,081	- 27,98
	1,178	$-\frac{3,28}{2} = - 1,64$	- 1,93	2,108	- 4,07
			34,80		18,87

On a donc sensiblement $\overline{N_{ul}} = N_{ul} = 34,56$ MN et

$\overline{M_{ul\ inf}} = 18,87$ MN \times m < $M_{ul} = 31,41$ MN \times m. La sécurité est donc assurée.

3.3.3. Vérification à la construction à 28 j + ϵ

La sollicitation à considérer est encore :

$$1,2 \left[S(0,9 Q_{L2}) + S(P_1) \right]$$

mais P_1 vaut cette fois : $P_1 = 39,86$ MN d'où :

$$M_{ul} = 1,2 \times 0,9 M_{G2} = 1,2 \times 0,9 \times 29,08 = 31,41 \text{ MN} \times \text{m}$$

$$N_{ul} = 1,2 P_1 = 1,2 \times 39,86 = 47,83 \text{ MN.}$$

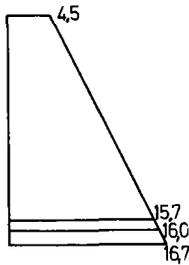
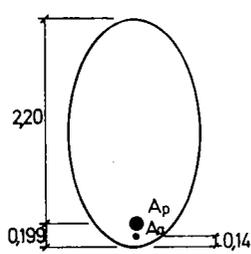
par ailleurs :

$$\overline{\sigma'_{bul}} = \frac{0,85 \times 30}{1,4} = 18,2 \text{ MPa}$$

Nous tiendrons compte, dans les calculs, de la détension des 18 câbles tendus à 14 jours et injectés. Ces câbles ont, à 28 j + ϵ une tension

$$\sigma_{P_1} = 1358 \text{ MPa}$$

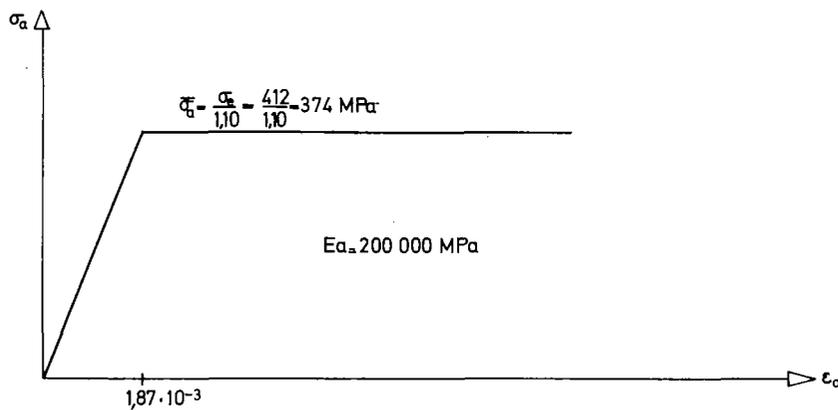
La contrainte du béton à leur niveau vaut (cf. Par. 2.d)



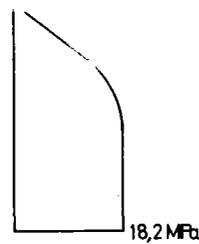
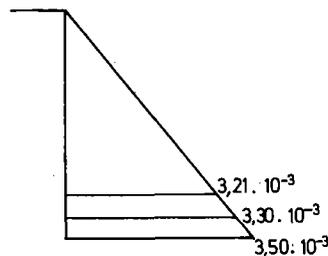
$$\sigma'_{bL_1} = \frac{16,7 \times 2,201 + 4,5 \times 0,199}{2,40} = 15,7 \text{ MPa}$$

$$\epsilon'_{bL_1} = \frac{15,7 \times 6}{190\,000} = 0,50 \cdot 10^{-3}$$

Nous ferons également intervenir la compression des aciers passifs ($A_a = 42 \text{ cm}^2$) situés à 14 cm de la fibre inférieure et dont le diagramme contrainte-déformation de calcul est le suivant :



Pour savoir à quel domaine appartient le diagramme des déformations de la section, partons du diagramme frontière entre les domaines ② et ③.



En utilisant les résultats de calcul analogue effectué à 14 j : $N_{B_1} = 36,18 \times \frac{18,2}{14,7} = 44,79 \text{ MPa}$

d'autre part :

$$N_{Ap_1} = 18 \times 1130 \cdot 10^{-6} \times 190\,000 (3,21 - 0,50) \cdot 10^{-3} = 10,47 \text{ MN}$$

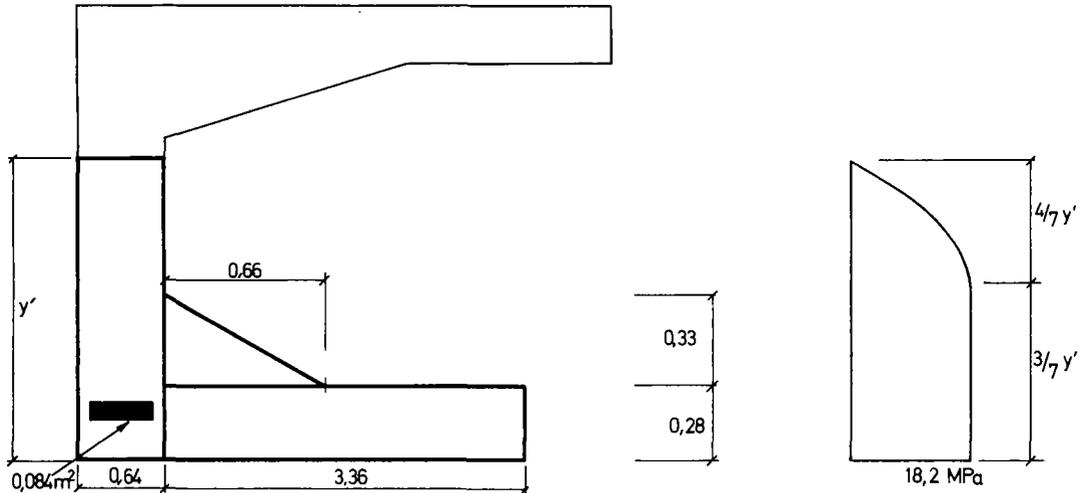
$$N_{Aa_1} = 42 \cdot 10^{-4} \times 374 = 1,57 \text{ MN}$$

$$\text{D'où : } \overline{N_{ul1}} = N_{B1} + N_{Ap1} + N_{Aa1} = 44,79 + 10,47 + 1,57 = 56,83 \text{ MN}$$

Le diagramme des déformations appartient ainsi au domaine ② (section non entièrement comprimée).

Essayons de déterminer directement la hauteur comprimée en supposant que l'axe neutre tombe dans l'âme ($y' < 1,93 \text{ m}$) et que tant sur le hourdis inférieur que sur les goussets inférieurs $\epsilon'_b \geq 2 \cdot 10^{-3}$

$$\left(\text{soit } \frac{3}{7}y' > 0,61 \text{ m}\right)$$



$$\begin{aligned} \text{Alors : } N_B &= 18,2 \left[3,36 \times 0,28 + \frac{1}{2} \times 0,33 \times 0,66 - 0,084 + \frac{3}{7} y' \times 0,64 + \frac{4}{7} y' \times 0,64 \times \frac{2}{3} \right] \\ &= 17,58 + 9,43 y' \end{aligned}$$

$$N_{Ap} = \left[\left(\frac{y' - 0,199}{y'} \right) \times 3,5 - 0,5 \right] \cdot 10^{-3} \times 190\,000 \times 18 \times 1130 \cdot 10^{-6} = 11,59 - \frac{2,69}{y'}$$

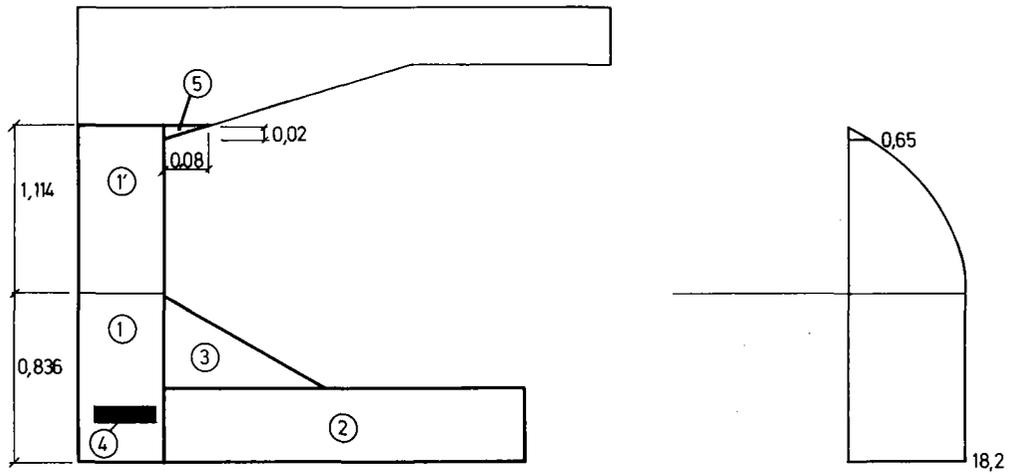
$$\text{enfin : } N_{Aa} = 42 \cdot 10^{-4} \times 374 = 1,57 \text{ MN}$$

$$\text{D'où } 17,58 + 9,43 y' + 11,59 - \frac{2,69}{y'} + 1,57 = 47,83$$

$$\text{Soit : } 9,43 y'^2 - 17,09 y' - 2,69 = 0$$

On en tire $y' = 1,96 \text{ m}$, ce qui ne satisfait pas en toute rigueur aux conditions précédemment énoncées ($y' < 1,93 \text{ m}$) mais donne un résultat cependant satisfaisant puisqu'on tombe de très peu dans le gousset supérieur.

Faisons le calcul avec $y' = 1,95 \text{ m}$



Secteur	B	σ'_m	N	z	\mathcal{M}
1	0,535	18,2	9,73	0,219	2,13
2	0,941	18,2	17,12	-0,059	-1,01
3	0,109	18,2	1,98	0,191	0,38
4	-0,084	18,2	-1,52	0	0
1	0,713	$18,2 \times \frac{2}{3} = 12,13$	8,65	1,254	10,85
5	0,001	$\frac{0,65}{3} = 0,22$	# 0	1,94	# 0
			35,96		12,35

$$\text{Par ailleurs : } N_{Ap} = 11,59 - \frac{2,69}{1,95} = 10,21 \text{ MN}$$

$$N_{Aa} = 1,57 \text{ MN}$$

$$\text{D'où : } \overline{N_{ul}} = 35,96 + 10,21 + 1,57 = 47,74 \text{ MN} \# N_{ul} (= 47,83 \text{ MN})$$

$$\text{et : } \overline{\mathcal{M}_{ul \text{ inf}}} = 12,35 - 1,57 (0,199 - 0,14) = 12,26 \text{ MN} \times \text{m}$$

$$\text{On a bien : } \overline{\mathcal{M}_{ul \text{ inf}}} < \mathcal{M}_{ul} = 31,41 \text{ MN} \times \text{m}$$

4 – TROISIEME EXEMPLE

Justifications de la section sur pile d'un ouvrage hyperstatique à trois travées construit par encorbellements successifs.

4.1. Données Générales

4.1.1. Description de l'ouvrage

L'ouvrage étudié est un pont-route continu à trois travées de 31 m, 52 m, 31 m de portées entre axes d'appuis, et de 115 m de longueur totale.

Il livre passage à une chaussée de 7,50 m bordée de deux trottoirs de 2 m. C'est un pont de 1ère classe sans convoi militaire.

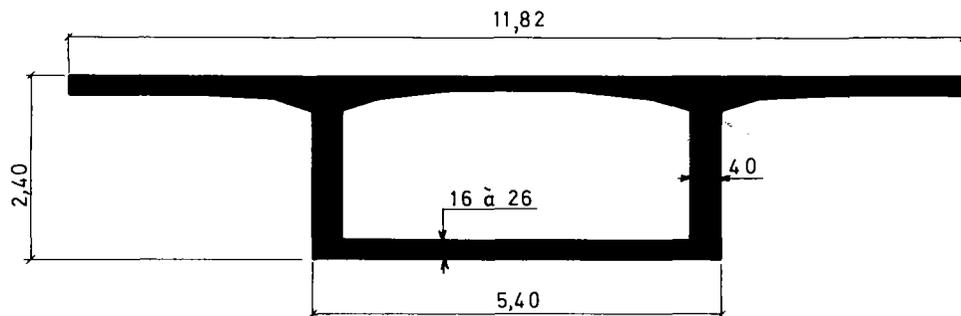
Il est de type caisson à hauteur constante égale à 2,40 m et comporte deux âmes de 0,40 m d'épaisseur. L'épaisseur du hourdis inférieur varie paraboliquement de 0,26 m sur piles à 0,16 m à mi-portée de la travée centrale.

Le tablier ne comporte d'entretoises qu'au droit des appuis, il est précontraint longitudinalement et armé transversalement.

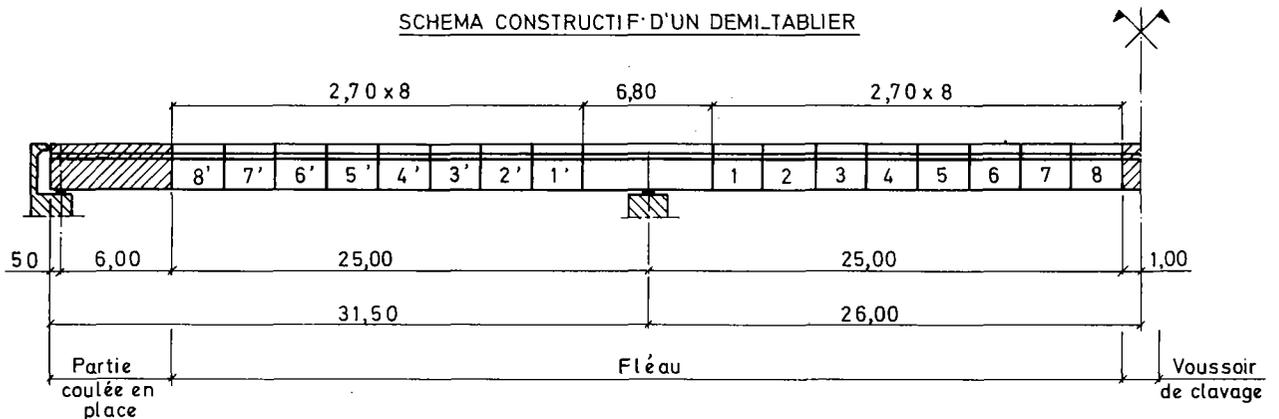
Mode de construction

La poutre caisson est construite par encorbellements successifs à partir des piles à l'aide d'équipages mobiles. Chaque fléau a une longueur de 2×25 m. Les parties coulées en place sur rive ont une longueur de 6,50 m. Les voussoirs sur pile ont 6,80 m de long, les voussoirs courants 2,70 m et le voussoir de clavage 2 m. La continuité des armatures passives est assurée au droit des joints de voussoirs.

SECTION TRANSVERSALE

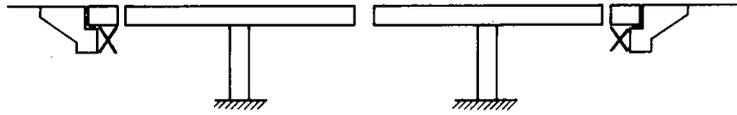


SCHEMA CONSTRUCTIF D'UN DEMI-TABLIER



Ordre de clavage

Pendant leur construction les fléaux sont encastrés provisoirement sur les piles.



Une fois les parties coulées en place solidarisées aux fléaux, l'encastrement sur pile est supprimé.



Le clavage de la travée centrale est ensuite réalisé.

**4.1.2. Matériaux utilisés**

Béton : dosé à 400 kg de ciment C.P.A.

Nous supposons : $\sigma'_{28} = 33 \text{ MPa}$

D'où (art. 4.4.) : $\sigma_j = 0,6 + 0,06 \sigma'_j$; $\sigma_{28} = 2,58 \text{ MPa}$

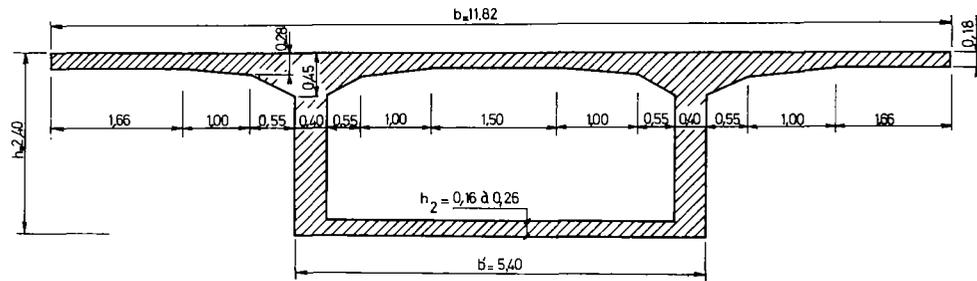
Unités de précontrainte : Procédé FREYSSINET 12 T 13

Les torons sont des torons de classe I, sous classe RN, répondant aux spécifications du fascicule 4, titre II du C.P.C.

Fils	Unités	Toron T 13 Classe I, RN
A	mm ²	94
F _{Tg}	KN	137,3
F _{Rg}	KN	159,9
T _g	MPa	1460
R _g	MPa	1701
E _p	MPa	190 000

Aciers passifs : Acier H.A. (art. 10) FeE40A $\Phi < 20 \text{ mm}$

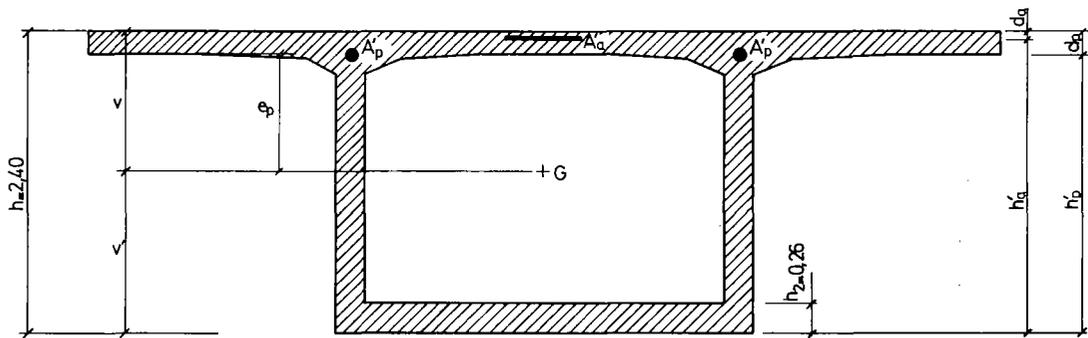
$\sigma_e = 412 \text{ MPa}$; $E_a = 200 000 \text{ MPa}$



Section transversale

4.1.3. Section sur pile

Cette section présente des câbles de précontrainte dans sa partie supérieure : Soit 32 (12 T 13) dont l'excentricité moyenne en section nette est égale à $e_{pn} = 0,781$ m.



	Unités	
GEOMETRIE		
b	m	11,82
b'	m	5,40
bo/2	m	0,40
h	m	2,40
h ₂	m	0,26
SECTION BRUTE		
B	m ²	5,707
SECTION NETTE		
B _n	m ²	5,58
I _n	m ⁴	4,821
v _n	m	0,955
v' _n	m	1,445
e _{pn}	m	0,78

	Unités	
SECTION HOMOGENEISEE		
B _h	m ²	5,8
I _h	m ⁴	4,95
v _h	m	0,926
v' _h	m	1,474
ARMATURES ACTIVES		
A' _p		32 (12 T 13)
	m ²	0,036096
d _p	m	0,175
h' _p	m	2,225
ARMATURES PASSIVES		
A' _a	m ²	0,00985
d _a	m	0,10
h' _a	m	2,30

4.2. Evaluation des sollicitations

Nous ne ferons que les justifications en période d'exploitation pour la section sur pile.

L'étude complète d'un projet pourrait conduire à évaluer les sollicitations en période de construction et à faire les justifications correspondantes, tant aux états limites d'utilisation qu'aux états limites ultimes.

4.2.1. Actions extérieures (autres que la précontrainte)

La densité de charge due au poids propre est évaluée à $g = 24,5 \times B$ KN/m (où B est exprimé en m^2 et représente l'aire de la section transversale variable le long de l'ouvrage).

Le poids du coffrage suspendu est estimé à $2 F = 200$ KN

La densité de charge due aux superstructures a une valeur moyenne probable égale à $g' = 40$ KN/m.

Les coefficients multiplicateurs permettant d'obtenir les valeurs caractéristiques portées dans les tableaux résultent de l'application des "Directives Communes relatives au calcul des constructions".

Pour ce qui est du gradient thermique, la différence de température prise en compte a une valeur caractéristique maximale de longue durée égale à $\Delta\theta = 5^\circ\text{C}$. Aucune valeur caractéristique de courte durée n'est envisagée.

Les charges routières et de trottoirs sont évaluées conformément au fascicule 61 titre II du Cahier des Prescriptions Communes. Les valeurs nominales des charges d'exploitation ainsi définies, ont, dans le cas présent, qualité de charges caractéristiques maximales de courte durée.

4.2.2. Précontrainte

Le calcul des pertes de précontrainte conduit aux valeurs probable, caractéristique maximale et caractéristique minimale suivantes :

Action de la précontrainte	Probable	Caractéristique maximale	Caractéristique minimale
σ_p (MPa)	$\sigma_p = 957,5$	$\sigma_{p_1} = 1055$	$\sigma_{p_2} = 860$
pour 1 Toron P (MN)	$P = 1,08$	$P_1 = 1,19$	$P_2 = 0,97$

Sollicitation de précontrainte réduite au centre de gravité de la section nette de la section sur pile.

S (précontrainte)	Valeur probable	Valeur maxi	Valeur mini
P (MN)	$P = 34,56$	$P_1 = 38,08$	$P_2 = 31,04$
M_p (MN×m)	$M_p = 27$	$M_{p_1} = 29,74$	$M_{p_2} = 24,24$

ACTIONS					SCHEMAS-STATIQUES			Sollicitations M_{Qi}		(Les valeurs du tableau sont exprimées en MN X m)			SECTION SUR PILE			SECTION A MI-TRAVEE		
Caractère de l'action	Nature	Valeurs caractéristiques			Spécifications	Renvois				Allure de M le long du pont	Valeur probable	Valeur maxi	Valeur mini	Valeur probable	Valeur maxi	Valeur mini		
		probables	maxi	mini														
ACTIONS PERMANENTES	Poids propre	g	$g_1 = 1,06 g$	$g_2 = 0,96 g$	Fléaux et parties coulées en place	①		M_G	M_G		M_G	M_{G1}	M_{G2}	M_G	M_{G1}	M_{G2}		
	Coffrage suspendu	F	$F_1 = 1,06 F$	$F_2 = 0,96 F$	Voussoir de clavage Montage et démontage du coffrage suspendu	②		M_G	M_G		- 40,74 ① - 3,4 ② - 1,6 ③			- 0 ① - 0,1 ② - 1,6 ③				
	Superstructures (1)	g'	$g'_1 = 1,22 g'$	$g'_2 = 0,88 g'$		④		M_G	M_G		$M_{G'}$	$M_{G'1}$	$M_{G'2}$	$M_{G'}$	$M_{G'1}$	$M_{G'2}$		
	Précontrainte	$P = P_0 - \Delta P$	$P_1 = 1,02 P_0$ $- 0,8 \Delta P$	$P_2 = 0,98 P_0$ $- 1,2 \Delta P$	Câbles des fléaux et des parties coulées en place câbles de continuité (clavage)	⑤		M_H	M_H		M_H	M_{H1}	M_{H2}	M_H	M_{H1}	M_{H2}		
	Adaptation par fluage		$fl_1 = fl$	$fl_2 = 0$	Sous déformation différée : naissance progressive d'efforts dus à une rotation bloquée par réalisation d'une liaison hyperstatique	⑦		M_{fl}	M_{fl}		M_{fl}	$M_{fl,1}$	$M_{fl,2}$	M_{fl}	$M_{fl,1}$	$M_{fl,2}$		
ACTIONS variables de longue durée	Gradient thermique dû à l'ensoleillement journalier		$\Delta\theta_1 = \Delta\theta$	$\Delta\theta_2 = 0$	Echauffement et dilatation du hourdis supérieur	⑧		$M_{\Delta\theta}$	$M_{\Delta\theta}$		$M_{\Delta\theta}$	$M_{\Delta\theta_1}$	$M_{\Delta\theta_2}$	$M_{\Delta\theta}$	$M_{\Delta\theta_1}$	$M_{\Delta\theta_2}$		
ACTIONS variables de courte durée	Charges routières y compris trottoirs et éventuellement freinage		$q_{R1} = q_R$	$q_{R2} = 0$	- camions Bc - charge A (1) Pour les charges intermittentes, les efforts les plus défavorables parmi les différents cas de charges possibles sont à retenir	⑨		M_R	M_R		M_R mini = - 10,69 M_R maxi = 1,54			M_R mini = - 1,89 M_R maxi = 10,22				

(1) Les valeurs 1,22 et 0,88 sont des valeurs moyennes, chaque superstructure étant affectée de son coefficient, lequel est très variable en fonction de l'élément considéré.

- ① L'action du poids propre des fléaux et des parties coulées en place s'exerce sur une structure isostatique.
- ② Le poids du voussoir de clavage est d'abord transmis aux extrémités des consoles par l'intermédiaire du coffrage suspendu. Au moment de la mise en précontrainte des câbles de continuité la densité de charge du voussoir sollicite la structure rendue continue.
- ③ Le montage du coffrage suspendu est réalisé en phase isostatique et le démontage en phase hyperstatique.
- ④ Les superstructures sollicitent la structure continue.
- ⑤ Les câbles des fléaux et des parties coulées en place exercent leur action sur une structure isostatique.
- ⑥ Les câbles de continuité produisent leurs effets sur la structure hyperstatique.
- ⑦ Dans les structures hyperstatiques construites suivant des schémas statiques successifs différents, l'adaptation par fluage donne progressivement naissance à des efforts dépendant essentiellement de la part de déformation différée qui reste à effectuer après réalisation des liaisons hyperstatiques.
 Avant clavage le béton a effectué sa déformation instantanée et une partie de sa déformation différée (sous l'action du poids propre et de la précontrainte des fléaux).
 La continuité introduite au moment du clavage empêche le reste de cette déformation de s'effectuer librement (rotation bloquée). De cette gêne naissent progressivement des efforts internes supplémentaires. (Moment de fluage).
- ⑧ Un gradient thermique uniforme ne crée des efforts que dans les structures hyperstatiques. Ses effets sont faciles à appréhender, puisque la distribution des dilatations est linéaire sur la hauteur h d'une section droite. Cette hypothèse conduit à considérer la rotation élémentaire $d\omega$ correspondant à un élément de poutre de longueur ds :
- $$d\omega = -\frac{\alpha \Delta \theta}{h} ds$$
- avec les conventions de signes couramment employées
 où $\Delta \theta$ désigne la différence de température entre l'intrados et l'extrados.
 α désigne le coefficient de dilatation du béton.
- Les rotations aux extrémités des travées considérées comme indépendantes se calculent par intégration et permettent d'évaluer les efforts dans la structure continue.
- ⑨ Les charges routières s'appliquent sur la structure continue.

4.3. Combinaisons d'actions

4.3.1. Comme nous n'avons à prendre en compte qu'une action de courte durée (charges routières) nous ne considérons que les combinaisons fondamentales :

$$\gamma_{S_3} \left[S(\gamma_{QL_1} Q_{L_1}) + S(\gamma_{QL_2} Q_{L_2}) + \left\{ \begin{array}{c} S(P_1) \\ \text{ou} \\ S(P_2) \end{array} \right\} + S(\gamma_{Q_c} Q_c) \right]$$

- En état-limite d'utilisation (art. 17.1)

$$\gamma_{S_3} = 1; \gamma_{QL_1} = 1; \gamma_{QL_2} = 1$$

$\gamma_{Q_c} = 1,2$ lorsque Q_c désigne les charges routières sans caractère particulier.

- En état limite ultime de résistance (art. 16.1)

$$\gamma_{S_3} = 1,2; \gamma_{QL_1} = 1,1; \gamma_{QL_2} = 0,9$$

$\gamma_{Q_c} = 1,33$ lorsque Q_c désigne les charge routières sans caractère particulier.

4.3.2. Recherche des combinaisons d'actions fondamentales extrêmes.

Dans le cas d'une poutre précontrainte soumise par les charges extérieures à la flexion simple il est facile d'obtenir les combinaisons d'actions extrêmes en recherchant les valeurs maximum et minimum (au sens algébrique) du moment créé par la totalité des charges extérieures et de la précontrainte. A ces valeurs correspondent les contraintes de flexion les plus élevées respectivement sur la fibre supérieure et sur la fibre inférieure.

L'effort normal à prendre en compte dans la combinaison est alors celui de la précontrainte correspondante.

4.3.3. Combinaisons à l'état limite d'utilisation

- Recherche de la combinaison donnant la contrainte la plus élevée sur la fibre inférieure de la section sur pile.

Le choix du moment de la charge de courte durée est évident

$$M_R \text{ mini} = -10,69 \text{ MN} \times \text{m}$$

toutes les actions donnant un moment positif prennent leur valeur caractéristique minimale, d'où les moments à considérer :

$$M_{P_2} = 24,24 \text{ MN} \times \text{m}; M_{H_2} = 7,92 \text{ MN} \times \text{m}; M_{f_{l_2}} = 0; M_{\Delta\theta_2} = 0;$$

toutes les actions donnant un moment négatif prennent leur valeur caractéristique maximale, d'où les moments à considérer :

$$M_{G_1} = -48,48 \text{ MN} \times \text{m}; M_{G'_1} = -9,96 \text{ MN} \times \text{m}$$

Finalement la combinaison cherchée est la suivante :

$$S_{Q_L Q_c} \text{ mini} = \begin{cases} M = M_{G_1} + M_{G'_1} + M_{f_{l_2}} + M_{\Delta\theta_2} + M_{H_2} + M_{P_2} + 1,2 M_R \text{ mini} \\ N = P_2 \end{cases}$$

$$\text{Soit : } S_{Q_L Q_c} \text{ mini} = \begin{cases} M = -26,28 + 1,2 (-10,69) \text{ MN} \times \text{m} \\ N = 31,04 \text{ MN} \end{cases}$$

(1) Remarque : C'est à titre de simplification que nous avons assimilé toutes les charges d'exploitation à des charges routières affectées du coefficient $\gamma_{Q_c} = 1,2$ dans les justifications aux états limites d'utilisation. En toute rigueur, les charges de trottoir ne devraient pas être pondérées ($\gamma = 1$), mais l'incidence de cette approximation est complètement négligeable sur le dimensionnement de l'ouvrage.

- De la même manière nous obtenons la combinaison donnant la contrainte la plus élevée sur la fibre supérieure de la section sur pile.

Soit

$$S_{Q_L Q_c} \text{ maxi} = \begin{cases} M = M_{G_2} + M_{G'_2} + M_{f11} + M_{\Delta\theta_1} + M_{H_1} + M_{P_1} + 1,2 M_R \text{ maxi.} \\ N = P_1 \end{cases}$$

Soit : $S_{Q_L Q_c} \text{ maxi} = \begin{cases} M = -2,78 + 1,2 (1,54) \text{ MN} \times \text{m} \\ N = 38,08 \text{ MN} \end{cases}$

4.3.4. Combinaisons à l'état limite ultime de résistance

Le principe est rigoureusement identique, seuls les différents coefficients changent de valeur :

$$S_{ul} \text{ mini} = \begin{cases} M_{ul} = 1,2 \left[1,1 (M_{G_1} + M_{G'_1}) + 0,9 (M_{f12} + M_{\Delta\theta_2}) + M_{P_2} + M_{H_2} + 1,33 M_R \text{ mini} \right] \\ N_{ul} = 1,2 P_2 \end{cases}$$

Soit : $S_{ul} \text{ mini} = \begin{cases} M_{ul} = -55,6 \text{ MNm} \\ N_{ul} = 37,25 \text{ MN} \end{cases}$

$$S_{ul} \text{ maxi} = \begin{cases} M_{ul} = 1,2 \left[1,1 (M_{f11} + M_{\Delta\theta_1}) + 0,9 (M_{G_2} + M_{G'_2}) + M_{P_1} + M_{H_1} + 1,33 M_R \text{ maxi} \right] \\ N_{ul} = 1,2 P_1 \end{cases}$$

Soit : $S_{ul} \text{ maxi} = \begin{cases} M_{ul} = 6,33 \text{ MNm} \\ N_{ul} = 45,7 \text{ MN} \end{cases}$

4.4. Justifications des contraintes normales

4.4.1. Justification à l'état limite d'utilisation de la section sur pile.

a) Nous ferons la justification en genre IIa (art. 21.1.).

Il convient de s'assurer que les contraintes normales dans la section (ou partie de section) sous sollicitations de calcul à l'état limite d'utilisation ne dépassent dans le sens défavorable les contraintes limites d'utilisation du béton résumées ci-dessous.

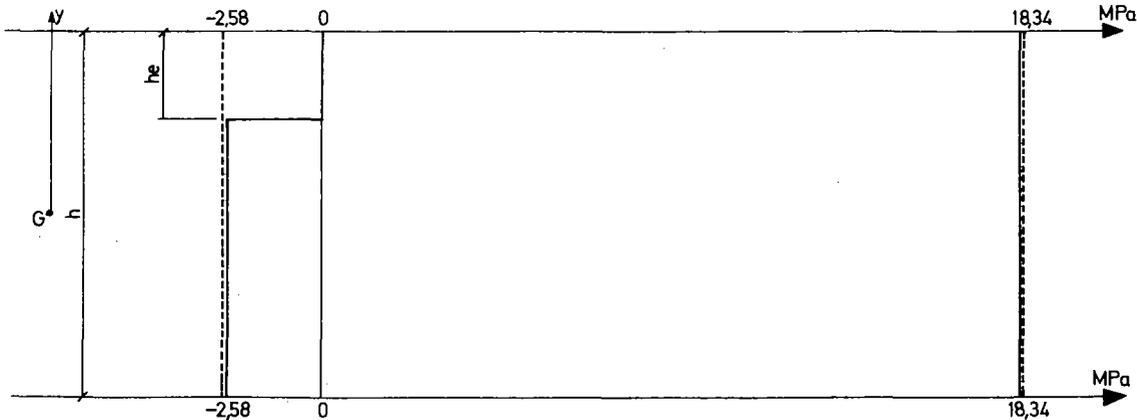
- en compression (art. 21.31) $\overline{\sigma'_b} = \frac{\sigma'_{28}}{\gamma_b} = \frac{33}{1,8} = 18,34 \text{ MPa}$

- en traction (art. 21.322)

$\overline{\sigma}_b$	Dans la section d'enrobage	Hors de la section d'enrobage
Autres cas $S_{Q_L Q_c}$	2,58 MPa	2,58 MPa
Actions de longue durée seules S_{Q_L}	0	2,58 MPa

Nous avons schématisé ci-dessous les contraintes limites à respecter, en service dans la section.

La hauteur de la section d'enrobage est égale à $h_e = 0,4$ m et atteint la fibre supérieure.



- En trait continu : Domaine limite sous S_{QL}

- En tirets : Domaine limite sous S_{QLQc}

b) Le calcul des contraintes normales (art. 21.2) s'effectue dans les conditions suivantes :

- Seul un calcul en section nette est exigé (art. 18.3)
- Nous ferons néanmoins un calcul en section homogénéisée sous les sollicitations dues aux charges Q_c (art. 18.4).
- le coefficient d'équivalence est pris égal à $n = 6$
- seuls les aciers de précontrainte sont pris en compte (ce qui revient à tenir compte de leur surtension).
- le calcul se fait en flexion composée.

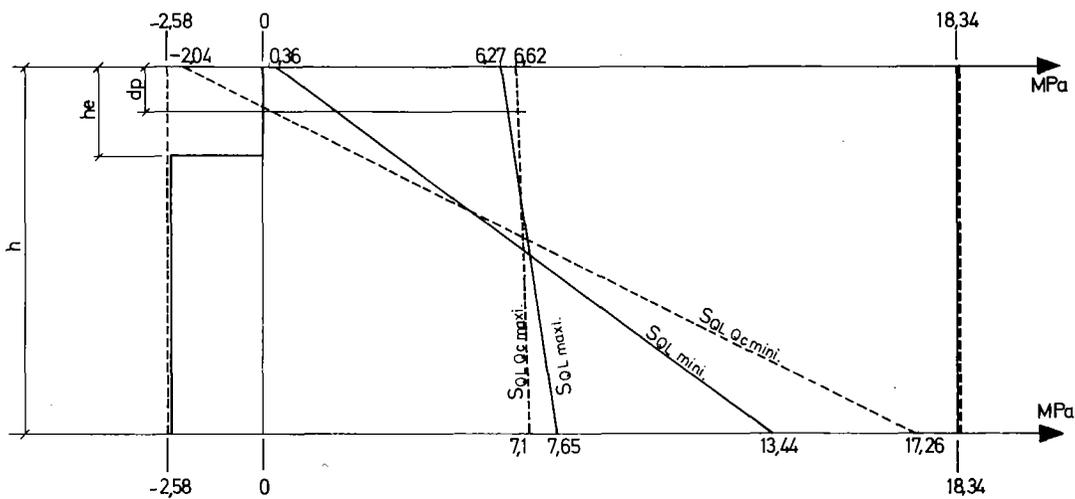
$$\sigma'_b(y) = \frac{N}{B_n} + \frac{M_{QL}}{I_n} y_n + \frac{M_{Qc}}{I_h} y_h$$

B_n	I_n	v_n	V'_n	I_h	v_h	v'_h
m^2	m^4	m	m	m^4	m	m
5,58	4,821	0,955	1,445	4,95	0,926	1,474

Nous calculerons la contrainte aux niveaux v, v', v-he et v-dp sous les combinaisons S_{QL} et $S_{QL Q_c}$

Fibre	S_{QL}			$S_{QL Q_c}$		
	Contraintes limites d'utilisation	$S_{QL \text{ mini}} (P_2)$ $\sigma'_b =$	$S_{QL \text{ maxi}} (P_1)$ $\sigma'_b =$	Contraintes limites d'utilisation	$S_{QL Q_c \text{ mini}}$ $\sigma'_b =$	$S_{QL Q_c \text{ maxi}}$ $\sigma'_b =$
v	$0 < \sigma'_b < 18,34$	0,36	6,27	$-2,58 < \sigma'_b < 18,34$	-2,04	6,62
v-he	$0 < \sigma'_b < 18,34$	2,54	6,5		-	-
-v'	$-2,58 < \sigma'_b < 18,34$	13,44	7,65		17,26	7,1
v-dp	$0 < \sigma'_b < 18,34$	$\sigma'_{bL2} =$ 1,31	$\sigma'_{bL1} =$ 6,38	les valeurs numériques de ce tableau sont exprimées en MPa		

Il résulte les diagrammes de contrainte suivants



c) Armatures passives

- Armatures de peau (art. 21.41)

Il est préconisé de disposer un minimum d'armatures passives le long des parements.

En prenant une section de $3 \text{ cm}^2/\text{m}$ de longueur de parement pour les armatures parallèles à la fibre moyenne, nous devons répartir une section totale de 72 cm^2 le long des faces du hourdis supérieur.

- Reprise conventionnelle des tractions du béton dans les zones tendues (art. 21.42).

La section d'armatures à disposer le long des parements tendus doit être égale à :

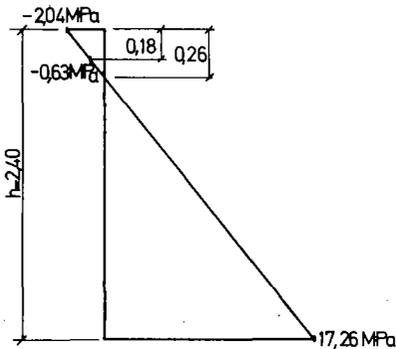
$$A'_a = \frac{B t}{1000} + \frac{N_{Bt}}{\sigma_e}$$

avec $B t$: aire de béton tendu sous la sollicitation la plus défavorable

N_{Bt} : Effort équilibré par le béton tendu

σ_e : limite d'élasticité des armatures bornée à 420 MPa.

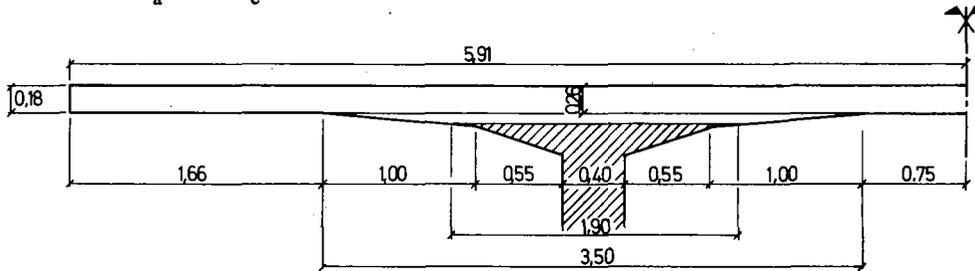
Sous $S_{QL Q_c}$ mini la hauteur de béton tendu de la section est égale à :



$$h_{Bt} = \frac{h \sigma_b(v)}{\sigma'_b(v) + \sigma_b(v)} = \frac{2,4 \times 2,04}{17,26 + 2,04}$$

$$h_{Bt} = 0,26 \text{ m}$$

- Calcul de A'_a avec $\sigma_e = 412 \text{ MPa}$



$$B_t = 2(5,91 \times 0,18 + \frac{3,5 + 1,90}{2} \times 0,08) = 2,56 \text{ m}^2$$

$$N_{Bt} = 2(5,91 \times 0,18 \times \frac{2,04 + 0,63}{2} + 1,90 \times 0,08 \times \frac{0,63}{2} + 1,6 \times 0,08 \times \frac{0,63}{3}) = 3 \text{ MN}$$

$$A'_a = \frac{2,56}{1000} + \frac{3}{412} = 9,85 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \quad A'_a = 98,5 \text{ cm}^2$$

La section d'armatures ainsi définie n'est pas à cumuler avec les armatures de peau dans la zone tendue. Nous répartirons le long des deux faces du hourdis supérieur des armatures passives d'une section égale à $A'_a = 98,5 \text{ cm}^2$ et dont le barycentre sera situé à $d_a = 0,10 \text{ m}$ de la fibre supérieure.

4.4.2. Justification à l'état limite ultime de résistance de la section sur pile.

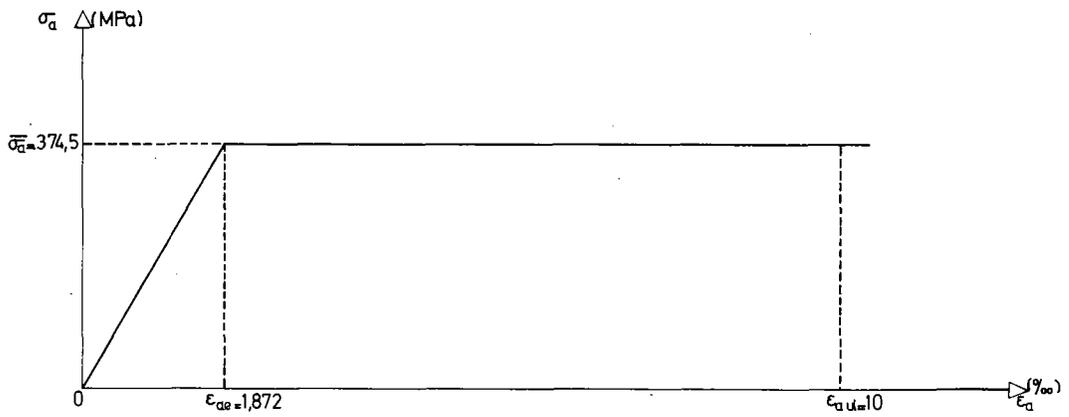
- Il convient de vérifier que les sollicitations de calcul à l'état limite ultime de résistance ne dépassent pas dans le sens défavorable les sollicitations limites ultimes.

- Diagramme de calcul contraintes-déformations des aciers passifs

$$\sigma_e = 412 \text{ MPa} \quad E_a = 200\,000 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_a = \frac{\sigma_e}{\gamma_a} ; \gamma_a = 1,1 ; \bar{\sigma}_a = \frac{412}{1,1} = 374,5 \text{ MPa}$$

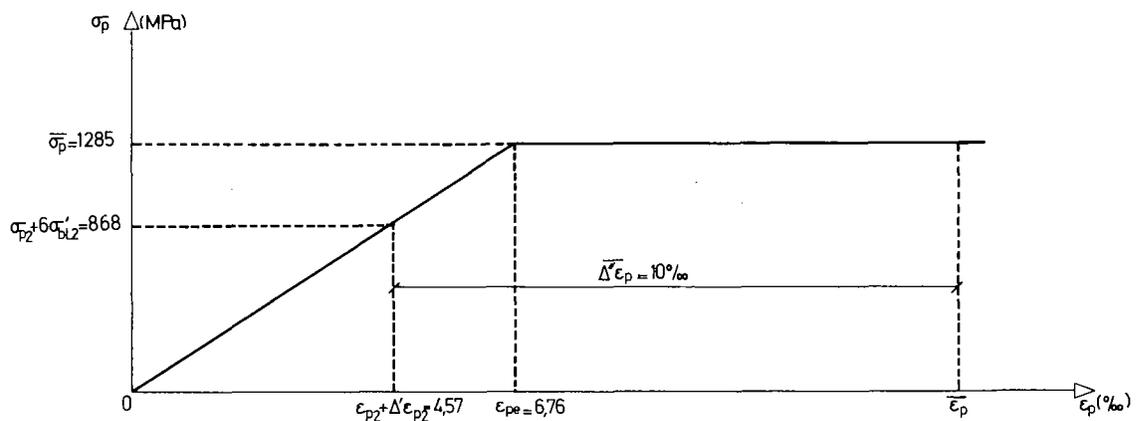
$$\epsilon_{ae} = 1,872 \text{ ‰}$$



- Diagramme de calcul contraintes-déformations des aciers actifs

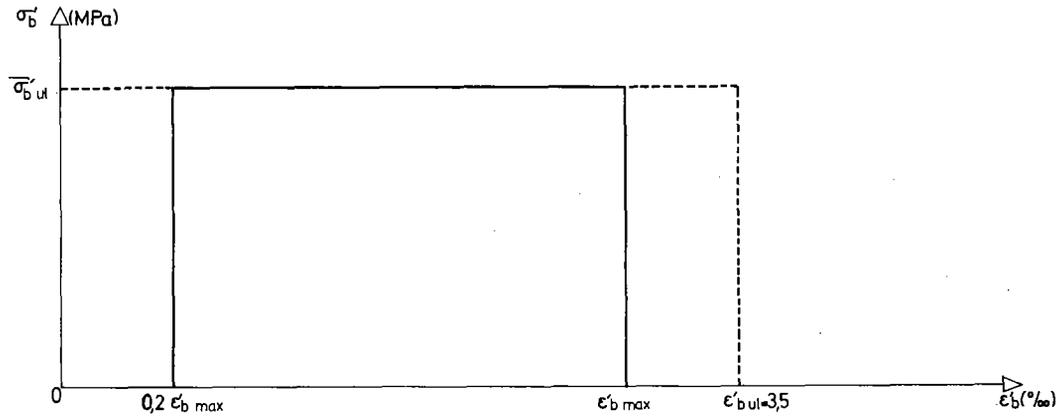
Nous prendrons le diagramme simplifié pour acier de nature ignorée.

TORON DE 13	
T_g	1460 MPa
R_g	1701 MPa
E_p	190 000 MPa
γ_p	1,25
$\sigma_{Pe} = \inf \left\{ \begin{array}{l} 1,1 T_g \\ 0,95 R_g \end{array} \right.$	1606 MPa
$\bar{\sigma}_p = \frac{\sigma_{Pe}}{\gamma_p}$	1285 MPa
ϵ_{Pe}	$6,76 \cdot 10^{-3}$



- Diagramme de calcul contrainte-déformation du béton.

Diagramme rectangulaire :



$$\sigma'_b = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leq \epsilon'_b \leq 0,2 \epsilon'_b \text{ max.} \\ \overline{\sigma'_{bul}} & \text{pour } 0,2 \epsilon'_b \text{ max} \leq \epsilon'_b \leq \epsilon'_b \text{ max} \leq 3,5 \text{ ‰} \end{cases}$$

$\epsilon'_b \text{ max}$: raccourcissement relatif sur la fibre la plus comprimée

$$\overline{\sigma'_{bul}} = \frac{0,85 \sigma'_j}{K_b \gamma_b} \quad ; \quad \text{avec } \gamma_b = 1,5$$

- Les charges routières ayant une durée probable d'application inférieure à 1 heure, $K_b = 0,85$

- $\sigma'_j = \sigma'_{28} = 33 \text{ MPa}$; $\overline{\sigma'_{bul}} = 22 \text{ MPa}$

Conduite des justifications.

Nous devons vérifier $\overline{S_{ul \text{ inf}}} \leq S_{ul \text{ mini}} < S_{ul \text{ maxi}} \leq \overline{S_{ul \text{ sup}}}$.

(les inégalités ayant ici une signification purement symbolique)

Pour plus de facilité dans les calculs ultérieurs nous réduisons ces torseurs au niveau des aciers de précontrainte, A'_p .

D'une manière générale nous notons M_{ul} le moment du torseur évalué par rapport au centre de gravité de la section, et \mathcal{M}_{ul} le moment évalué par rapport au niveau des aciers de précontrainte.

$$S_{ul \text{ mini}} = \begin{cases} M_{ul} = - 55,6 \text{ MN} \times \text{m} \\ N_{ul} = 37,25 \text{ MN} \end{cases} = \begin{cases} \mathcal{M}_{ul} = - 84,7 \text{ MN} \times \text{m} \\ N_{ul} = 37,25 \text{ MN} \end{cases}$$

$$S_{ul \text{ maxi}} = \begin{cases} M_{ul} = 6,33 \text{ MN} \times \text{m} \\ N_{ul} = 45,7 \text{ MN} \end{cases} = \begin{cases} \mathcal{M}_{ul} = - 29,36 \text{ MN} \times \text{m} \\ N_{ul} = 45,7 \text{ MN} \end{cases}$$

- Justification sous S_{ul} maxi

Nous pouvons considérer S_{ul} maxi par l'excentricité de sa résultante à partir du centre de gravité de la section.

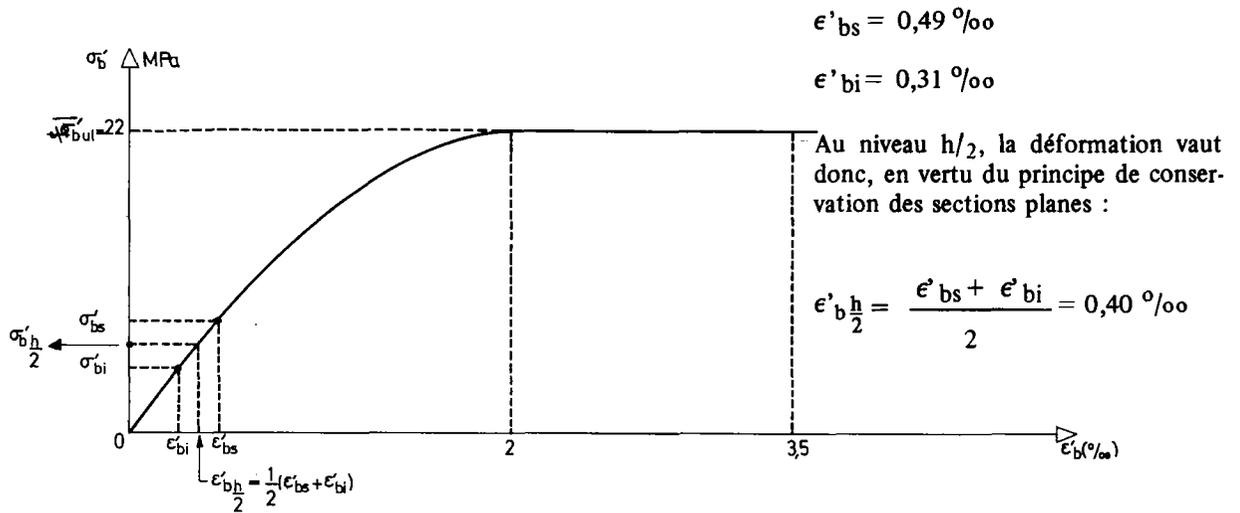
$$e_{ul} = \frac{M_{ul}}{N_{ul}} = \frac{6,33}{45,7} = 0,138 \text{ m}$$

Sous compression faiblement excentrée, la section reste entièrement comprimée. Un calcul élastique traditionnel des contraintes donne :

- sur la fibre supérieure $\sigma'_{bs} = 9,44 \text{ MPa}$

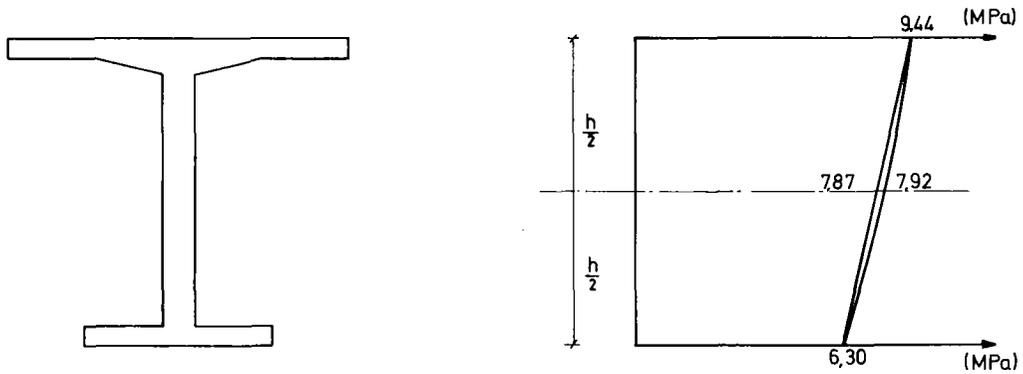
- sur la fibre inférieure $\sigma'_{bi} = 6,3 \text{ MPa}$

On voit, sur le diagramme contraintes-déformations du béton que ces contraintes correspondent aux déformations :



D'où, par le diagramme contraintes-déformations : $\sigma'_{b \frac{h}{2}} = 7,92 \text{ MPa}$

Cette valeur est à comparer à $\frac{\sigma'_{bs} + \sigma'_{bi}}{2} = 7,87 \text{ MPa}$, contrainte que l'on aurait au niveau considéré si l'on avait bien proportionnalité entre contraintes et déformations.



Ceci nous montre que, dans ce cas particulier, on peut pratiquement calculer les contraintes correspondant à S_{ul} maxi par les méthodes élastiques traditionnelles et que la sécurité à l'égard de cette sollicitation est bien assurée.

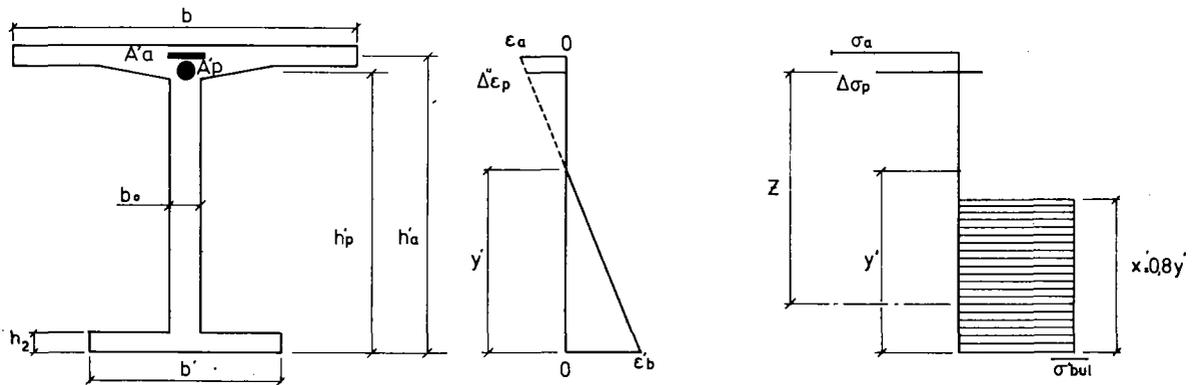
Ce mode de raisonnement ne peut s'appliquer que dans des cas très particuliers. Il diffère radicalement de la démarche habituellement suivie pour faire les justifications aux états ultimes puisqu'on a ici calculé des contraintes alors que d'ordinaire, on se contente de comparer des sollicitations. Il faut bien remarquer, du reste, que le diagramme de déformations obtenu ($\epsilon'_{bs} = 0,49 \text{ ‰}$, $\epsilon'_{bi} = 0,31 \text{ ‰}$) n'est pas un diagramme de déformation ultime pour la section.

- Justification sous S_{ul} mini

Nous devons vérifier $S_{ul} \text{ mini} > \overline{S_{ul} \text{ inf}}$.

La sollicitation S_{ul} mini entraînant la compression la plus élevée sur la fibre inférieure, il est logique de la comparer à une sollicitation ultime correspondant à une rupture par épuisement du béton du côté de la fibre inférieure ou par épuisement des aciers du côté de la fibre supérieure.

Nous chercherons le diagramme de déformation correspondant à $\overline{N_{ul}} = N_{ul}$ et nous ferons la comparaison $\overline{M_{ul} \text{ mini}} > \overline{M_{ul} \text{ inf}}$.

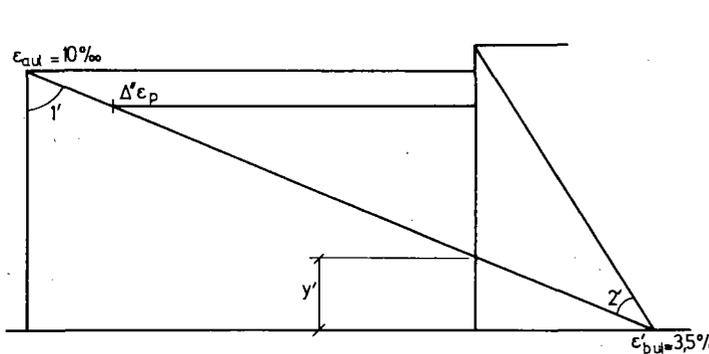


L'équilibre mécanique de la section est donné par :

$$\overline{N_{ul}} = N_B - A'_a \sigma_a - A_p \Delta \sigma_p$$

$$\overline{M_{ul}} = - N_B Z - A'_a \sigma_a (h'_a - h'_p)$$

Pour savoir dans quel domaine de déformation doit se placer le diagramme correspondant à $\overline{N_{ul}} = N_{ul}$ nous ferons le calcul de $\overline{N_{ul}}$ pour le diagramme de déformation frontière entre les domaines ① et ② :



$$\epsilon'_b = \epsilon'_{bul} = 3,5 \text{ ‰}$$

$$\epsilon_a = \epsilon_{aul} = 10 \text{ ‰}$$

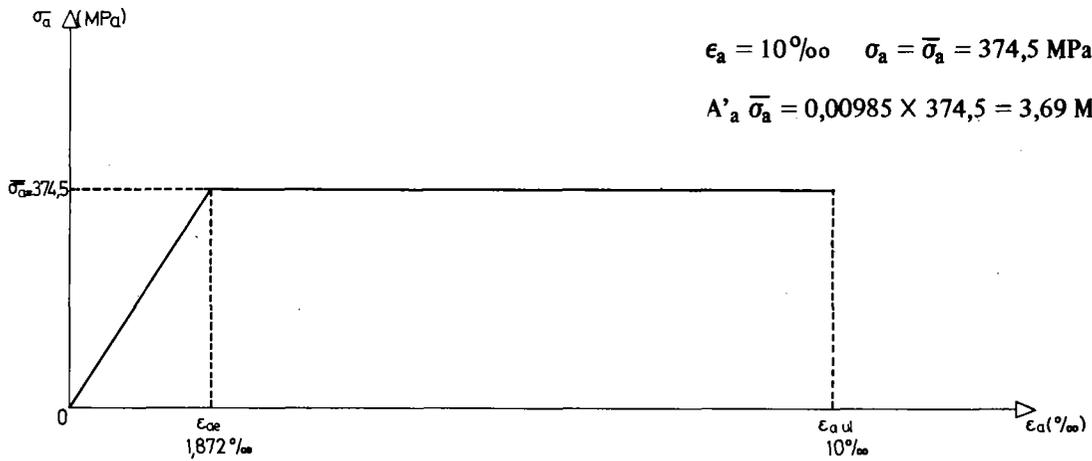
Position de l'axe neutre

$$y' = \frac{\epsilon'_{bul}}{\epsilon'_{bul} + \epsilon_{aul}} h'_a = \frac{3,5}{13,5} \times 2,3 = 0,6m$$

d'où :

$$\Delta'' \epsilon_p = \frac{h'_p - y'}{h'_a - y'} \epsilon_{aul} = \frac{2,225 - 0,6}{2,3 - 0,6} \times 10 = 9,7 \text{ ‰}$$

Effort de traction dans les aciers passifs.



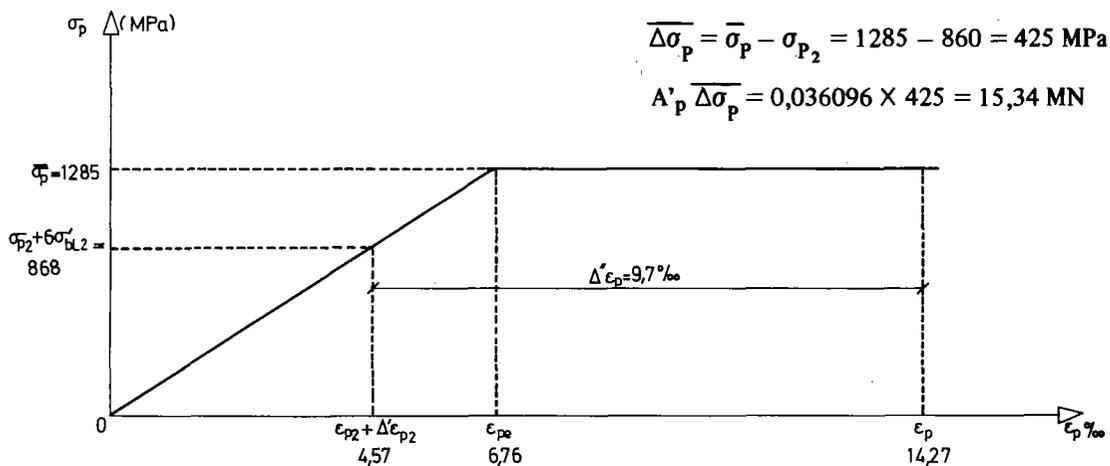
Effort de surtension des aciers actifs.

$$\sigma_{P_2} = 860 \text{ MPa} \quad \sigma'_{bL_2} = 1,31 \text{ MPa}$$

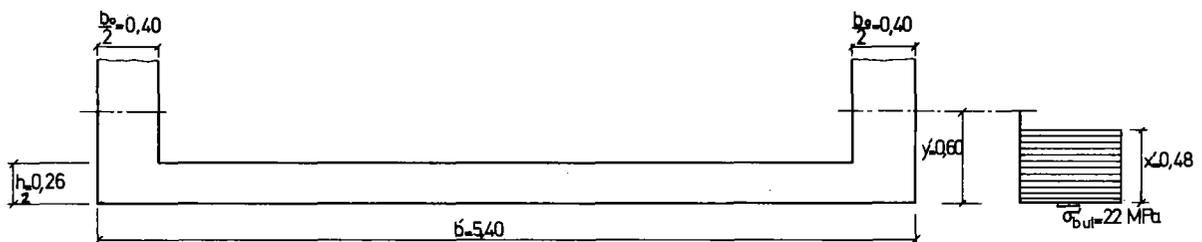
$$\sigma_{P_2} + 6 \sigma'_{bL_2} = 868 \text{ MPa} \quad \epsilon_{P_2} + \Delta' \epsilon_{P_2} = 4,57 \text{‰}$$

$$\epsilon_P = \epsilon_{P_2} + \Delta' \epsilon_{P_2} + \Delta'' \epsilon_P = 4,57 + 9,7 = 14,27 \text{‰}$$

$$\sigma_P = \bar{\sigma}_P = 1285 \text{ MPa}$$



Effort équilibré par la compression du béton



$$N_B = \bar{\sigma}'_{bul} \left[(b' - b_o) h_2 + x' b_o \right]$$

$$N_B = 22 \left[4,6 \times 0,26 + 0,8 \times 0,6 \times 0,8 \right] = 34,76 \text{ MN}$$

Effort normal ultime équilibré

$$\overline{N_{ul}} = N_B - A'_a \overline{\sigma_a} - A'_p \overline{\Delta\sigma_p}$$

$$\overline{N_{ul}} = 34,76 - 3,69 - 15,34 = 15,73 \text{ MN}$$

Or, nous devons équilibrer $N_{ul} = 37,25 \text{ MN}$; le diagramme de déformation correspondant appartient donc au domaine ②

Cherchons alors la valeur de y' (ou plutôt de $x' = 0,8 y'$) telle que $\overline{N_{ul}} = N_{ul}$ en supposant pour l'instant que les aciers passifs et actifs demeurent sur leur palier plastique.

(ce qui suppose $\epsilon_a > 1,87 \text{ ‰}$ et $\Delta''\epsilon_p > 6,76 - 4,57 = 2,19 \text{ ‰}$).

L'équation donnant x' est, dans ces conditions :

$$\overline{\sigma'_{bul}} \left[(b' - b_0) h_2 + b_0 x' \right] - A'_a \overline{\sigma_a} - A'_p \overline{\Delta\sigma_p} = N_{ul}$$

$$22 (4,60 \times 0,26 + 0,80 x') - 3,69 - 15,34 = 37,25$$

d'où :

$$x' = 1,703 \text{ m} \quad \text{et} \quad y' = \frac{1,703}{0,8} = 2,128 \text{ m}$$

Les déformations des aciers sont donc :

$$\epsilon_a = \frac{h'_a - y'}{y'} \epsilon'_{bul} = \frac{2,3 - 2,128}{2,128} \times 3,5 \cdot 10^{-3} = 0,28 \text{ ‰}$$

$$\Delta''\epsilon_p = \frac{h'_p - y'}{y'} \epsilon'_{bul} = \frac{2,225 - 2,128}{2,128} \times 3,5 \cdot 10^{-3} = 0,16 \text{ ‰}$$

On voit ainsi que notre hypothèse de plasticité des aciers n'est pas vérifiée. Reprenons donc le calcul en supposons cette fois les aciers dans leur domaine élastique, autrement dit :

$$\sigma_a = E_a \epsilon_a = 200\,000 \epsilon_a \text{ MPa}$$

$$\Delta''\sigma_p = E_p \Delta''\epsilon_p = 190\,000 \Delta''\epsilon_p \text{ MPa}$$

$$\text{soit puisque } \epsilon_a = \left(\frac{0,8 h'_a}{x'} - 1 \right) \epsilon'_{bul} = \left(\frac{1,84}{x'} - 1 \right) \times 3,5 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta''\epsilon_p = \left(\frac{0,8 h'_p}{x'} - 1 \right) \epsilon'_{bul} = \left(\frac{1,78}{x'} - 1 \right) \times 3,5 \cdot 10^{-3}$$

et

$$\sigma_a = 700 \left(\frac{1,84}{x'} - 1 \right)$$

$$\Delta\sigma_p = \Delta''\sigma_p + 6 \sigma'_{bL_2} = 665 \left(\frac{1,78}{x'} - 1 \right) + 8$$

l'équation donnant x' devient :

$$22 (4,60 \times 0,26 + 0,8 x') - 0,00985 \times 700 \left(\frac{1,84}{x'} - 1 \right) - 0,036096 \left[8 + 665 \left(\frac{1,78}{x'} - 1 \right) \right] = 37,25$$

d'où $x' = 1,30 \text{ m}$ et $y' = 1,627 \text{ m}$ (l'axe neutre est situé dans l'âme de la section).

- Comparaison $\mathcal{M}_{ul\ mini} > \overline{\mathcal{W}_{ul\ inf}}$.

$$\overline{\mathcal{W}_{ul\ inf}} = - N_B Z - A'_a \sigma_a (h'_a - h'_p)$$

$$N_B = 22 (4,60 \times 0,26 + 0,8 \times 1,30) = 49,22 \text{ MN}$$

$$Z = h'_p - \frac{1}{2} \frac{(b'-b_o) h_2^2 + b_o x'^2}{(b'-b_o) h_2 + b_o x'} = 2,225 - \frac{1}{2} \frac{4,6 \times 0,26^2 + 0,8 \times 1,30^2}{4,6 \times 0,26 + 0,8 \times 1,30} = 1,853 \text{ m}$$

$$\overline{\mathcal{W}_{ul\ inf}} = - 49,22 \times 1,853 - 0,00985 \times 700 \left(\frac{1,84}{1,3} - 1 \right) (2,3 - 2,225)$$

$$\overline{\mathcal{W}_{ul\ inf}} = - 91,4 \text{ MN} \times \text{m}$$

nous vérifions bien

$$\mathcal{M}_{ul\ mini} > \overline{\mathcal{W}_{ul\ inf}}$$

$$- 84,7 \text{ MN} \times \text{m} > - 91,4 \text{ MN} \times \text{m}$$

5 – EXEMPLE EN GENRE IIIa

Elément de parking préfabriqué

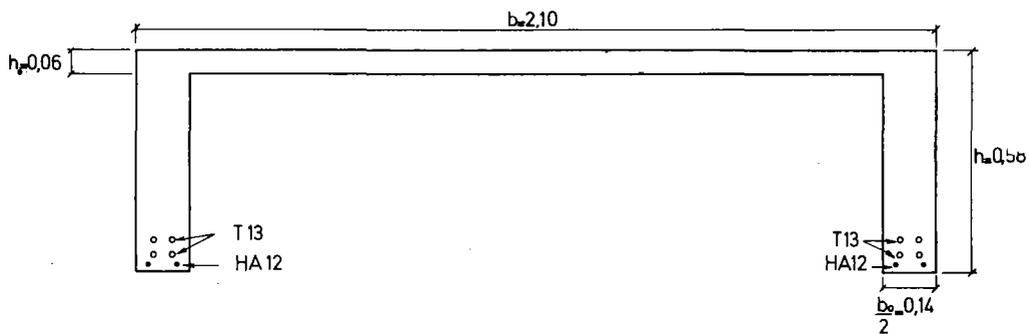
Nous allons justifier en service aux états limites d'utilisation et à l'état limite ultime de résistance la section à mi-portée d'un élément de parking reposant sur deux appuis et précontraint par pré-tension.

5.1. Données générales

5.1.1. Description de l'élément

L'élément de parking étudié comporte un hourdis supérieur de 2,10 m de largeur et de 0,06 m d'épaisseur, et deux âmes de 0,58 m de hauteur et de 0,14 m d'épaisseur.

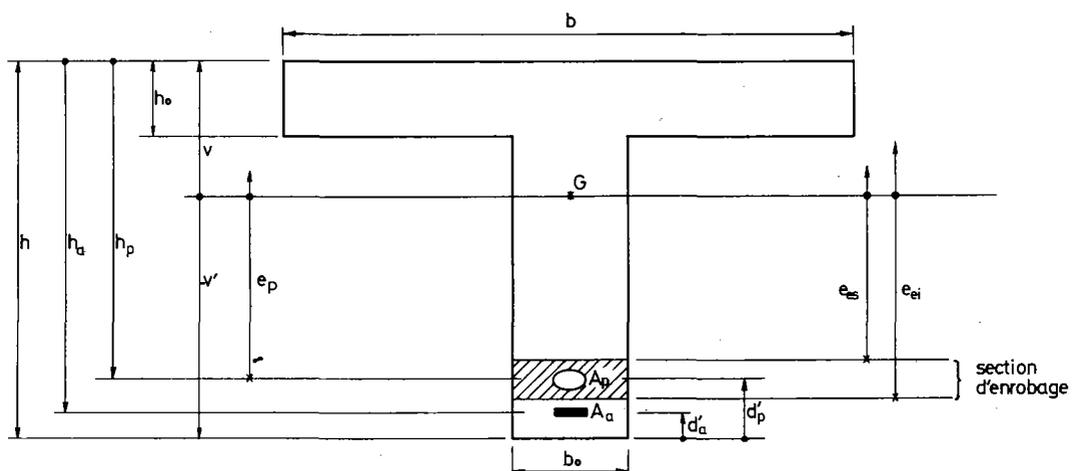
La distance entre appuis est de $L = 15,35$ m



L'élément est mis en précontrainte sur banc par 8 torons de 7 fils ($\varnothing 12,4$) après étuvage du béton.

5.1.2. Définition de la section à mi-portée

Pour les calculs à la flexion longitudinale nous prendrons une section en T équivalente à la section réelle.



Caractéristiques géométriques :

$$b = 2,10 \text{ m}$$

$$b_o = 0,28 \text{ m}$$

$$h = 0,58 \text{ m}$$

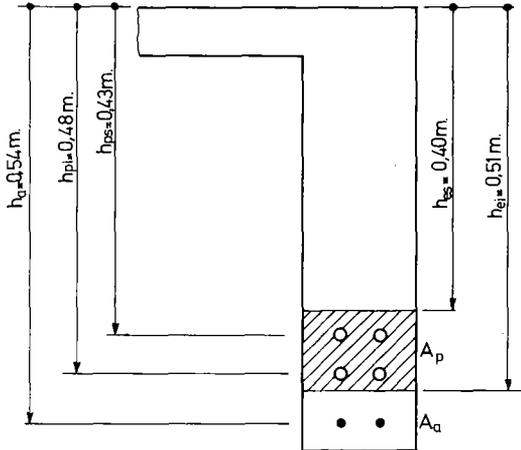
$$h_o = 0,06 \text{ m}$$

$$B = 0,272 \text{ m}^2$$

$$v = 0,185 \text{ m}$$

$$v' = 0,395 \text{ m}$$

$$I = 0,009 \text{ m}^4$$



- Armatures actives :

Chaque âme comporte deux lits d'armatures actives

Soit pour la section totale :

lit supérieur $A_{ps} = (4T (\Phi 12,4)) = 372 \text{ mm}^2$; $h_{ps} = 0,43 \text{ m}$

lit inférieur $A_{pi} = (4T (\Phi 12,4)) = 372 \text{ mm}^2$; $h_{pi} = 0,48 \text{ m}$

ou

total : $A_p = 744 \text{ mm}^2$; $h_p = 0,455 \text{ m}$; $e_p = -0,27 \text{ m}$

- Armatures passives :

$A_a = (4 \text{ HA } 12) = 4,52 \text{ cm}^2$; $h_a = 0,54 \text{ m}$

- La section d'enrobage est définie par $h_{es} = 0,40 \text{ m}$;
 $h_{ei} = 0,54 \text{ m}$

soit $e_{es} = -0,215 \text{ m}$ $e_{ei} = -0,325 \text{ m}$

5.1.3. Matériaux utilisés

Béton :

$$\sigma'_{28} = 27,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{28} = 0,6 + 0,006 \times 27,5 = 2,25 \text{ MPa}$$

Aciers passifs : Acier H.A. : FeE 40 A $\Phi < 20 \text{ mm}$

$$\sigma_e = 412 \text{ MPa}$$

$$E_a = 200\,000 \text{ MPa}$$

Aciers de précontrainte : Torons de 7 fils ($\Phi 12,4$)
Classe III Basse relaxation

$$A = 93 \text{ mm}^2$$

$$F_{Tg} = 154 \text{ KN}$$

$$T_g = 1656 \text{ MPa}$$

$$F_{Rg} = 173,6 \text{ KN}$$

$$R_g = 1867 \text{ MPa}$$

$$E_p = 190\,000 \text{ MPa}$$

$$\rho_{1000} = 5 \%$$

$$\rho_{3000} = 6 \%$$

$$\eta = 1,4$$

5.2. Evaluation des sollicitations

Nous ne ferons que la justification en période d'exploitation.

5.2.1. Actions permanentes, variables et de précontrainte

Actions permanentes	Q_L (KN/m)	Q_{L1} (KN/m)	Q_{L2} (KN/m)
Poids propre	$g = 6,67$	$g_1 = 1,06$ $g = 7,07$	$g_2 = 0,96$ $g = 6,40$
Equipements fixes	$g' = 2,1$	$g'_1 = 1,1$ $g' = 2,31$	$g'_2 = 0,9$ $g' = 1,89$
Actions variables	Q_c maxi (KN/m)		Q_c mini (KN/m)
Charge d'exploitation	$q_E = 5,25$		$q_E = 0$

$$\text{Action de la précontrainte} \quad \left\{ \begin{array}{l} P = P_o - \Delta P \\ P_1 = 1,02 P_o - 0,8 \Delta P \\ P_2 = 0,98 P_o - 1,2 \Delta P \end{array} \right.$$

$$\sigma_{P_o} = \min \quad \left\{ \begin{array}{l} 0,85 R_g \\ 0,95 T_g = 1573 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

Le calcul des pertes donne $\Delta\sigma_p = 336 \text{ MPa}$

Action de la précontrainte	Probable	Caractéristique maximale	Caractéristique minimale
σ_p (MPa)	$\sigma_p = 1237$	$\sigma_{P1} = 1336$	$\sigma_{P2} = 1138$
pour un toron F_p (MN)	$F_p = 0,115$	$F_{P1} = 0,124$	$F_{P2} = 0,105$
pour les 8 torons P (MN)	$P = 0,920$	$P_1 = 0,994$	$P_2 = 0,846$

5.2.2. Sollicitations probables, maximales et minimales

M (Charges permanentes)	M_{QL} (MN × m)	M_{QL1} (MN × m)	M_{QL2} (MN × m)
M_G	0,196	0,208	0,188
$M_{G'}$	0,062	0,068	0,055
M (Charges d'exploitation)	M_{Qc} maxi (MN × m)		M_{Qc} mini (MN × m)
M_E	0,154		0

Sollicitation de la précontrainte

S (Précontrainte)	M_P (MN × m) P (MN)	M_{P_1} (MN × m) P ₁ (MN)	M_{P_2} (MN × m) P ₂ (MN)
réduite au c.d.g. de la section nette G	$M_P = -0,248$ P = 0,920	$M_{P_1} = -0,268$ P ₁ = 0,994	$M_{P_2} = 0,228$ P ₂ = 0,846
réduite au niveau des aciers de précontrainte A _p .	$\mathcal{M}_P = 0$ P = 0,920	$\mathcal{M}_{P_1} = 0$ P ₁ = 0,994	$\mathcal{M}_{P_2} = 0$ P ₂ = 0,846

5.3. Justification aux états limites d'utilisation

Nous ferons la justification en genre IIIa, en supposant $\chi = 0$, hypothèse extrême qui ne préjuge en rien des valeurs de χ à prendre dans la pratique.

Cette justification comporte des calculs en section entière et en section fissurée.

D'une manière générale, la contrainte de compression est limitée à :

$$\bar{\sigma}'_b = \frac{\sigma'_{28}}{1,8} = 15,27 \text{ MPa}$$

(Eventuellement cette contrainte limite peut être portée à $\bar{\sigma}'_b = \frac{\sigma'_{28}}{1,6}$ à condition que l'état limite de formation des fissures soit dépassé et que : $\sigma'_{bm} \leq \frac{\sigma'_{28}}{3}$).

5.3.1. Vérification en section entière

Il s'agit essentiellement de vérifier que les tractions ne dépassent pas $2 \sigma_j$ dans la zone d'enrobage, soit :

$$\sigma'_b \geq -\bar{\sigma}'_b = -2 \sigma_{28} = -4,5 \text{ MPa}$$

On pourra constater au passage que sous l'effet des charges de longue durée et de la fraction χ des charges d'exploitation, la section reste entièrement comprimée donc, a fortiori la section d'enrobage (art. 21.3.2.3.).

Les contraintes calculées de façon classique, sous l'effet des combinaisons suivantes, sont résumées ci-dessous :

– combinaisons entraînant la compression la plus élevée sur la fibre supérieure et la traction la plus élevée sur la fibre inférieure

$$S_{Q_L Q_c} \text{ maxi} = \begin{cases} M_{Q_L 1} + M_{P_2} + M_{Q_c} \text{ maxi} = 0,202 \text{ MN} \times \text{m} \\ P_2 = 0,846 \text{ MN} \end{cases}$$

$$S_{Q_L \chi Q_c} \text{ maxi} = \begin{cases} M_{Q_L 1} + M_{P_2} + \chi M_{Q_c} \text{ maxi} = 0,048 \text{ MN} \times \text{m} \\ \chi = 0 \\ P_2 = 0,846 \text{ MN} \end{cases}$$

– combinaisons entrainant les effets contraires :

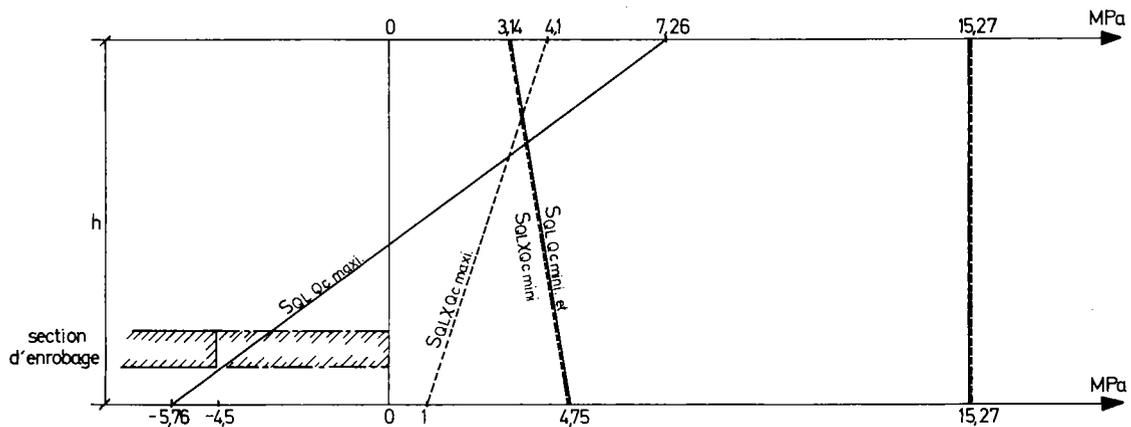
$$S_{QL Qc} \text{ mini} = \begin{cases} M_{QL2} + M_{P1} + M_{Qc} \text{ mini} = -0,025 \text{ MN} \times \text{m} \\ P_1 = 0,994 \text{ MN} \end{cases}$$

$$S_{QL \chi Qc} \text{ mini} = \begin{cases} M_{QL2} + M_{P1} + \chi M_{Qc} \text{ mini} = -0,025 \text{ MN} \times \text{m} \\ P_1 = 0,994 \text{ MN} \end{cases}$$

Fibre	$S_{QL Qc}$			$S_{QL \chi Qc}$ (avec $\chi = 0$)		
	contraintes limites d'utilisation	$S_{QL Qc} \text{ maxi}$ $\sigma'_b =$	$S_{QL Qc} \text{ mini}$ $\sigma'_b =$	contraintes limites d'utilisation	$S_{QL \chi Qc} \text{ maxi}$ (P_2) $\sigma'_b =$	$S_{QL \chi Qc} \text{ mini}$ (P_1) $\sigma'_b =$
v	$\sigma'_b < 15,27$	7,26	3,14	$\sigma_b^{*(1)}$ $\sigma'_b < 15,27$	4,1	3,14
e_{es}	$-4,5 < \sigma'_b < 15,27$	-1,71	4,25	$0 < \sigma'_b < 15,27$	1,96	4,25
e_{ps}		X			$\sigma'_{bL2s} = 1,8$	$\sigma'_{bL1s} = 4,33$
e_{pi}		X			$\sigma'_{bL1i} = 1,54$	$\sigma'_{bL1i} = 4,47$
e_{ei}		-4,18	4,56		1,38	4,56
-v'	$\sigma'_b < 15,27$	-5,76	4,75	$\sigma_b^{*(1)}$ $\sigma'_b < 15,27$	1	4,75

Les valeurs numériques de ce tableau sont exprimées en MPa

Soient les diagrammes de contraintes suivants :



- En trait continu : Domaine limite et diagrammes concernant $S_{QL Qc}$
- En trait discontinu : Domaine limite et diagrammes concernant $S_{QL \chi Qc}$

(1) σ_b^* signifie que la résistance à la traction du béton n'est pas prise en compte.

– Reprise conventionnelle des tractions du béton dans les zones tendues.

La section d'armatures à disposer le long des parements tendus doit être égale à : (art. 21.4.2.).

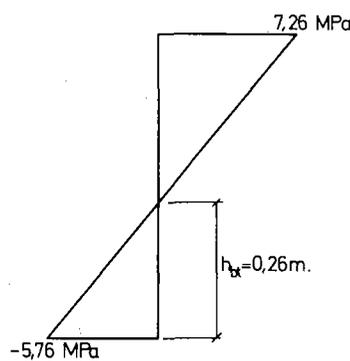
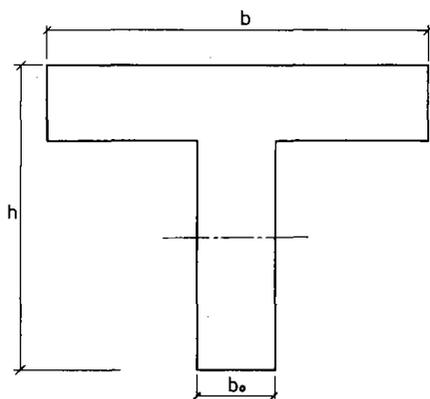
$$A_a = \frac{B_t}{1000} + \frac{N_{Bt}}{\bar{\sigma}_a} - A_p$$

avec B_t = aire de béton tendu sous la sollicitation la plus défavorable.

N_{Bt} = effort équilibré par le béton tendu.

$$\bar{\sigma}_a = \min \begin{cases} \sigma_e = \text{limite d'élasticité des armatures} \\ T_g - \sigma_p ; \sigma_p = \text{contrainte probable des aciers de précontrainte sous les actions de longue durée.} \\ 260 \eta \text{ MPa} \end{cases}$$

A_p = section d'armatures pré-tendues situées à une distance du parement le plus tendu au plus égale aux deux tiers de la hauteur du béton tendu.



$$\bar{\sigma}_a = 260 \eta = 364 \text{ MPa}$$

$$h_{Bt} = \frac{0,58 \times 5,76}{7,26 + 5,76} = 0,26 \text{ m}$$

$$A_p = 7,44 \text{ mm}^2$$

$$B_t = 0,28 \times 0,26 = 0,073 \text{ m}^2$$

$$N_{Bt} =$$

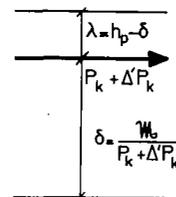
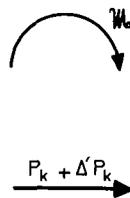
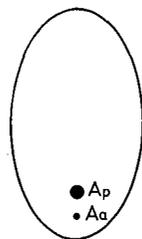
$$\frac{0,26}{2} \times 0,28 \times 5,76 = 0,207 \text{ MN}$$

$$A_a = \frac{0,072}{1000} + \frac{0,207}{364} - 0,000744 \quad A_a = 0$$

La condition de reprise conventionnelle des tractions n'impose donc pas d'armatures passives.

5.3.2. Vérification en section fissurée

Le béton tendu n'étant plus compté dans la résistance de la section, on se ramène à un calcul de flexion composée type béton armé, dans lequel la sollicitation à considérer est symbolisée sur le croquis ci-dessous :



avec $\Delta'P_k = 6 \sigma_{bLk}' \cdot A_p$

Ce calcul donne σ'_{b} , $\Delta'' \sigma_{P_k}$ et σ_a

Il s'agit de vérifier que $\sigma_a < \bar{\sigma}_a$

$$\begin{aligned} \text{et que } \Delta \sigma_{P_k} &= \Delta' \sigma_{P_k} + \Delta'' \sigma_{P_k} \\ &= 6 \sigma'_{bL_k} + \Delta'' \sigma_{P_k} < \overline{\Delta \sigma_{P_k}} \end{aligned}$$

$$\text{avec } \bar{\sigma}_a \text{ (H.A.)} = \min \begin{cases} 200 \text{ MPa} \\ \frac{800}{\sqrt{\phi}} \text{ MPa} \quad (\phi \text{ en mm}) \\ \frac{2}{3} \sigma_e \end{cases}$$

$$\overline{\Delta \sigma_{P_k}} = \min \begin{cases} 160 \eta + 6 \sigma'_{bL_k} \\ \bar{\sigma}_p - \sigma_{P_k} \end{cases} \quad \text{avec } \bar{\sigma}_p = \min \begin{cases} 0,85 R_g \\ 0,95 T_g \end{cases}$$

La sollicitation à prendre ici en compte pour le calcul type béton armé est : $S(Q_{L1}) + S(P + \Delta' P_2) + S(Q_c)$

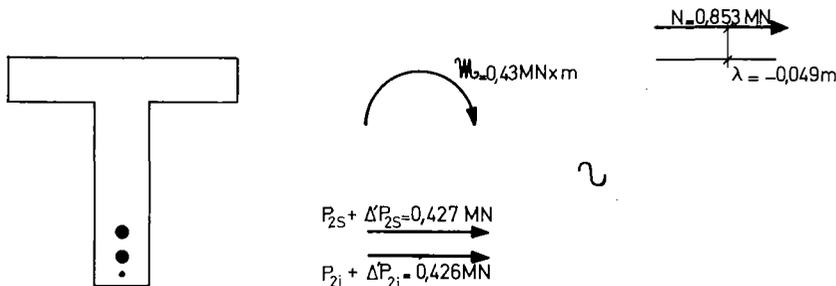
$$\text{avec } \mathcal{M} = M_{G1} + M_{G'1} + M_E = 0,208 + 0,068 + 0,154 = 0,43 \text{ MN} \times \text{m}$$

$$P_{2s} = P_{2i} = 0,423 \text{ MN}$$

$$\sigma'_{bL_{2s}} = 1,8 \text{ MPa} \quad \text{soit } \Delta' P_{2s} = 6 A_{ps} \sigma'_{bL_{2s}} = 0,004 \text{ MN}$$

$$\sigma'_{bL_{2i}} = 1,54 \text{ MPa} \quad \Delta' P_{2i} = 6 A_{pi} \sigma'_{bL_{2i}} = 0,0034 \text{ MN}$$

Cette sollicitation est schématisée, ci-dessous.



la position de l'axe neutre est alors définie par l'équation du 3ème degré bien connue en béton armé :

$$\frac{by^2}{2} \left(\frac{y}{3} - \lambda \right) - (b - b_o) \frac{(y - h_o)^2}{2} \left(\frac{2h_o + y}{3} - \lambda \right) - n \sum_i A_i (h_i - y) (h_i - \lambda) = 0$$

avec $n = 10$ (art. 21.2), la sommation \sum_i étant étendue aux 3 niveaux d'aciers (A_{ps} , A_{pi} et A_a).

y étant ainsi déterminé, la pente K du diagramme des contraintes est définie par :

$$N = K \left[\frac{by^2}{2} - (b - b_0) \left(\frac{y - h_0}{2} \right)^2 - n \sum_i A_i (h_i - y) \right]$$

l'application numérique donne $y = 0,19$ m

$$K = 45 \text{ MPa m}^{-1}$$

d'où $\sigma'_b = (\text{contrainte sur la fibre supérieure}) = Ky = 8,56 \text{ MPa}$

$$\Delta'' \sigma_{ps} = n K (h_{ps} - y) = 108 \text{ MPa}$$

$$\Delta'' \sigma_{pi} = n K (h_{pi} - y) = 131 \text{ MPa}$$

$$\sigma_a = n K (h_a - y) = 158 \text{ MPa}$$

Nous vérifions $\sigma'_b < \overline{\sigma'_b} = 15,27 \text{ MPa}$

$$\sigma_a < \overline{\sigma_a} = 200 \text{ MPa}$$

$$\Delta'' \sigma_p < \Delta \sigma_{pk} - 6 \sigma'_b L_k = 160 \eta = 224 \text{ MPa}$$

5.4. Justification à l'état limite ultime de résistance

Nous devons vérifier

$$\overline{S_{ul \text{ inf}}} \leq S_{ul} \leq \overline{S_{ul \text{ sup}}}$$

Le coefficient γ_{Qc} est égal à 1,25 pour les charges d'exploitation de bâtiment.

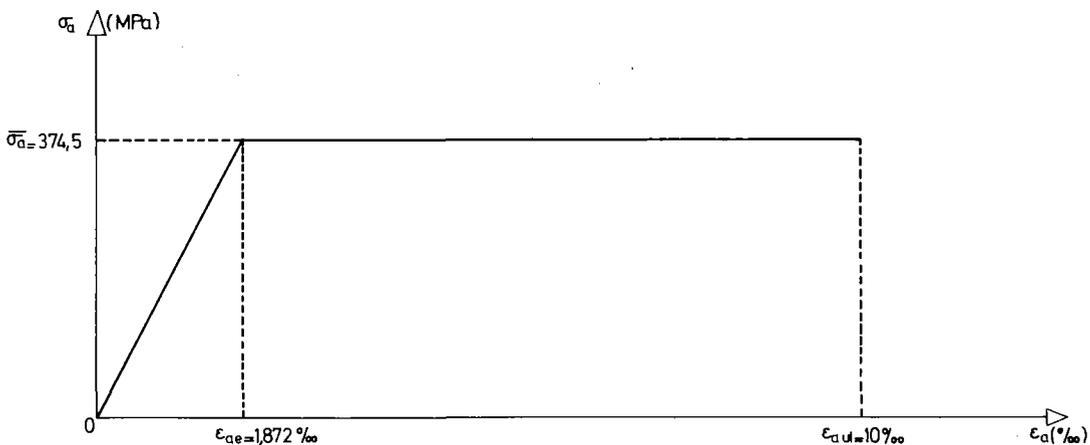
5.4.1. Diagrammes de calcul contraintes-déformations

— Aciers passifs :

$$\sigma_e = 412 \text{ MPa} \quad E_a = 200\,000 \text{ MPa}$$

$$\overline{\sigma_a} = \frac{\sigma_e}{\gamma_a}; \quad \gamma_a = 1,1; \quad \overline{\sigma_a} = 374,5 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_{ae} = 1,872 \text{ ‰} \quad \epsilon_{aul} = 10 \text{ ‰}$$

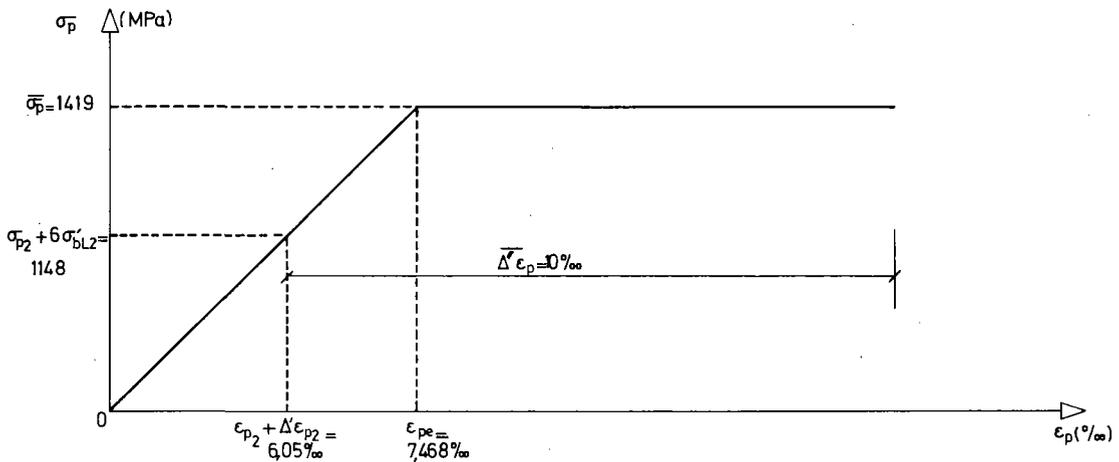


– Aciers de précontrainte : nous prendrons le diagramme simplifié

$$\sigma_{pe} = \inf \begin{cases} 1,1 T_g \\ 0,95 R_g = 1774 \text{ MPa} \end{cases} \quad E_p = 190\,000 \text{ MPa}$$

$$\overline{\sigma}_p = \frac{\sigma_{pe}}{\gamma_p} ; \quad \gamma_p = 1,25 \quad \overline{\sigma}_p = 1419 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_{pe} = 7,468 \text{ ‰} ; \quad \Delta \epsilon_p = 10 \text{ ‰}$$



– Béton : diagramme rectangulaire

$$\sigma'_b = \begin{cases} 0 & \text{pour} \\ \overline{\sigma}'_{bul} = \frac{0,85 \sigma'_j}{K_b \gamma_b} & \text{pour } 0,2 \epsilon'_b \text{ max} \leq \epsilon'_b \leq \epsilon'_b \text{ max} \leq \epsilon'_{bul} \end{cases}$$

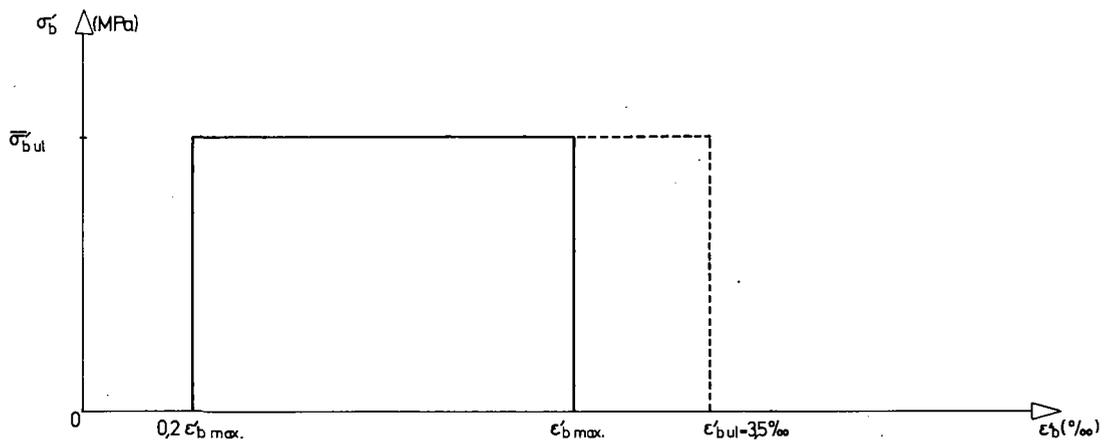
en service

$$\sigma'_j = \sigma'_{28} = 27,5 \text{ MPa}$$

$K_b = 0,9$; les charges d'exploitation ayant une durée probable d'application comprise entre 1 heure et 24 heures.

$$\gamma_b = 1,5$$

$$\text{d'où } \overline{\sigma}'_{bul} = 17,31 \text{ MPa}$$



5.4.2. Combinaisons à prendre en compte

En toute logique nous sommes amenés à considérer deux combinaisons de sollicitations, correspondant d'ailleurs aux combinaisons maxi et mini du calcul des états limites d'utilisation :

- S_{ul} maxi la combinaison qui comprime le plus fortement la fibre supérieure et dont nous prenons les éléments de réduction par rapport aux aciers de précontrainte (en considérant le centre de gravité géométrique des différents lits d'armatures)

$$S_{ul} \text{ maxi} = \begin{cases} \mathcal{M}_{ul} = 1,2 (1,1 M_{QL1} + \mathcal{M}_{P2} + 1,25 M_{Qc} \text{ maxi}) \\ N_{ul} = 1,2 P_2 \end{cases}$$

$$S_{ul} \text{ maxi} = \begin{cases} \mathcal{M}_{ul} = 1,2 (1,1 (0,208 + 0,068) + 0 + 1,25 \times 0,154) = 0,596 \text{ MN} \times \text{m} \\ N_{ul} = 1,2 \times 0,846 = 1,015 \text{ MN} \end{cases}$$

S_{ul} mini qui a l'effet inverse et que nous évaluons dans les mêmes conditions

$$S_{ul} \text{ mini} = \begin{cases} \mathcal{M}_{ul} = 1,2 (0,9 M_{QL2} + \mathcal{M}_{P1} + 1,25 M_{Qc} \text{ mini}) \\ N_{ul} = 1,2 P_1 \end{cases}$$

En fait la combinaison S_{ul} mini n'est pas à considérer car elle est moins défavorable que sa semblable au moment de la mise en précontrainte.

Nous ne ferons donc la justification que vis à vis de S_{ul} maxi .

5.4.3. Justification $S_{ul} \text{ maxi} < \overline{S_{ul} \text{ sup}}$

La sollicitation S_{ul} maxi entraînant la compression la plus élevée sur la fibre supérieure, il est logique de la comparer à une sollicitation ultime correspondant à une rupture par épuisement du béton du côté de la fibre supérieure ou par épuisement de l'acier du côté de la fibre inférieure.

Nous allons chercher $\overline{S_{ul}} (\overline{N_{ul}}, \overline{\mathcal{M}_{ul}})$ avec $\overline{N_{ul}} = N_{ul}$ et comparer \mathcal{M}_{ul} à $\overline{\mathcal{M}_{ul}}$:

$$\mathcal{M}_{ul} < \overline{\mathcal{M}_{ul}}$$

Pour savoir dans quel domaine se situe le diagramme de déformation correspondant à une telle sollicitation nous calculons l'effort normal $\overline{N_{ul}}$ équilibré par le diagramme de déformation frontière entre les domaines ① et ②

$$\epsilon_a = \epsilon_{aul} = 10 \text{ ‰} ; \quad \epsilon'_b = \epsilon'_{bul} = 3,5 \text{ ‰}$$

$$\overline{N_{ul}} = N_B - A_p \Delta \sigma_p - A_a \sigma_a$$

- Effort de traction dans les aciers passifs

$$\sigma_a = \overline{\sigma}_a = 374,5 \text{ MPa}$$

$$A_a \sigma_a = 0,000452 \times 374,5 = 0,17 \text{ MN}$$

- Effort de surtension des aciers actifs

distance de l'axe neutre à la fibre supérieure

$$y = \frac{\epsilon'_{bul} \times h_a}{\epsilon'_{bul} + \epsilon_{aul}} = 0,14 \text{ m}$$

$$\Delta\epsilon''_p = \frac{h_p - y}{h_a - y} \epsilon_{aul} = 7,875 \text{ ‰}$$

L'élongation totale vaut donc :

$$\epsilon_p = \epsilon_{p_2} + \Delta'\epsilon_{p_2} + \Delta''\epsilon_p = 6,05 \text{ ‰} + 7,875 \text{ ‰} = 13,925 \text{ ‰}$$

Les aciers de précontrainte sont plastifiés (voir diagramme contrainte-déformation 5.4.1.) et leur contrainte atteint :

$$\sigma_p = \bar{\sigma}_p = 1419 \text{ MPa}$$

$$\begin{aligned} A_p \bar{\Delta}\sigma_p &= A_p (\bar{\sigma}_p - \sigma_{p_2}) = 0,000744 (1419 - 1138) \\ &= 0,000744 (281) = 0,21 \text{ MN} \end{aligned}$$

- Effort équilibré par la compression du béton

$$\begin{aligned} N_B &= \bar{\sigma}'_{bul} [(b - b_o) h_o + 0,8 y b_o] \\ &= 17,31 [1,82 \times 0,06 + 0,8 \times 0,14 \times 0,28] \\ &= 2,433 \text{ MN} \end{aligned}$$

d'où :

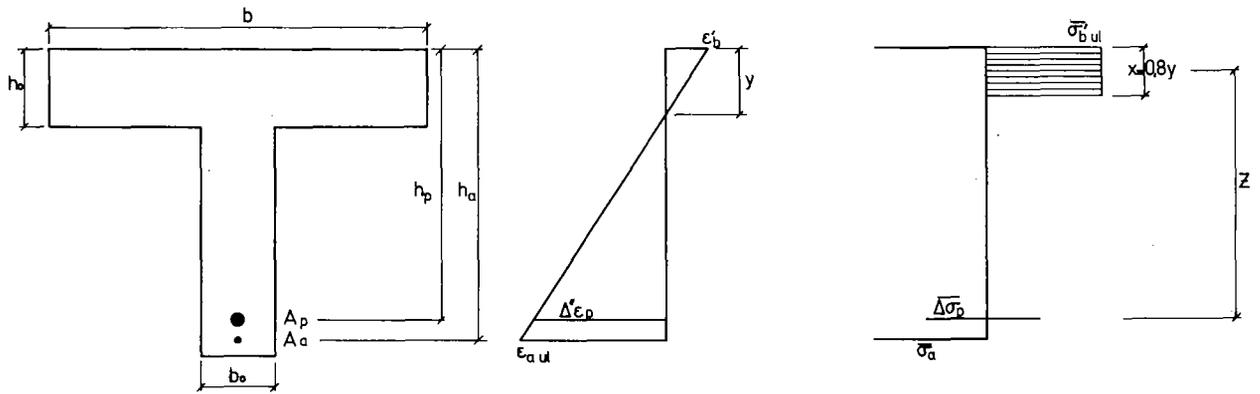
$$\bar{N}_{ul} = 2,433 - 0,21 - 0,17 = 2,05 \text{ MN}$$

Le diagramme de déformation tel que $\bar{N}_{ul} = N_{ul} = 1,015 \text{ MN}$ se situe donc dans le domaine ① caractérisé par $\epsilon_{aul} = 10 \text{ ‰}$ et par $\Delta''\epsilon_p > 7,875 \text{ ‰}$ donc par la plastification des aciers passifs et des aciers actifs,

La compression du béton doit alors équilibrer :

$$\begin{aligned} N_B &= \bar{N}_{ul} + A_p \bar{\Delta}\sigma_p + A_a \bar{\sigma}_a \\ &= 1,015 + 0,21 + 0,17 = 1,395 \text{ MN} \end{aligned}$$

$$x = \frac{N_B}{b \bar{\sigma}'_{bul}} = \frac{1,395}{17,31 \times 2,1} = 0,038 \text{ m}$$



$$\text{d'où : } \overline{M}_{ul} = N_B z + A_a \overline{\sigma}_a (h_a - h_p)$$

$$\text{avec } z = h_p - \frac{x}{2} = 0,455 - \frac{0,038}{2} = 0,436 \text{ m}$$

$$\overline{M}_{ul} = 1,395 \times 0,436 + 0,17 (0,54 - 0,455) = 0,620 \text{ MN} \times \text{m}$$

nous vérifions bien :

$$M_{ul} < \overline{M}_{ul}$$

$$0,596 \text{ MN} \times \text{m} < 0,620 \text{ MN} \times \text{m}$$

CHAPITRE IV

JUSTIFICATION DES CONTRAINTES TANGENTES

I – GENERALITES

La justification des contraintes tangentes a subi peu de changements dans son principe. Le calcul des étriers, qui suppose la formation d'un mécanisme de bielles découpées par les fissures, ne se fait plus qu'aux états limites ultimes, ce qui est conforme au fonctionnement de la structure alors qu'aux états limites d'utilisation on cherche à assurer, avec une probabilité plus ou moins grande selon le genre, l'intégrité du béton.

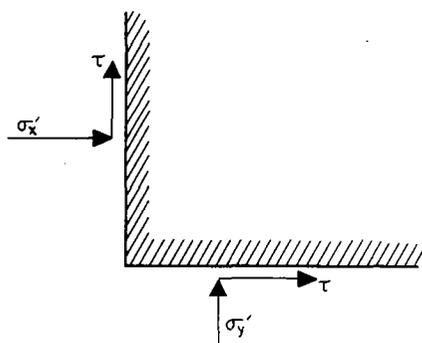
1.1. Justifications aux états limites d'utilisation

Elles consistent à vérifier l'inégalité :

$$\tau^2 \leq \overline{0,25}^2 \left(1 + \frac{\sigma'_x + \sigma'_y}{\sigma'_j} \right)^2 \left(\frac{\sigma'_j}{\gamma_b} - \sigma'_x - \sigma'_y \right) \left(k \sigma'_j + \sigma'_x + \sigma'_y \right) + \sigma'_x \sigma'_y$$

avec pour k les valeurs suivantes :

Genres :	I	II	IIIa	IIIb
k	0	1	1,6	2,5



Cette inégalité dérive de la formule de Chalos et Béteille modifiée pour tenir compte de l'amélioration apportée par l'accroissement des contraintes normales à la résistance au cisaillement.

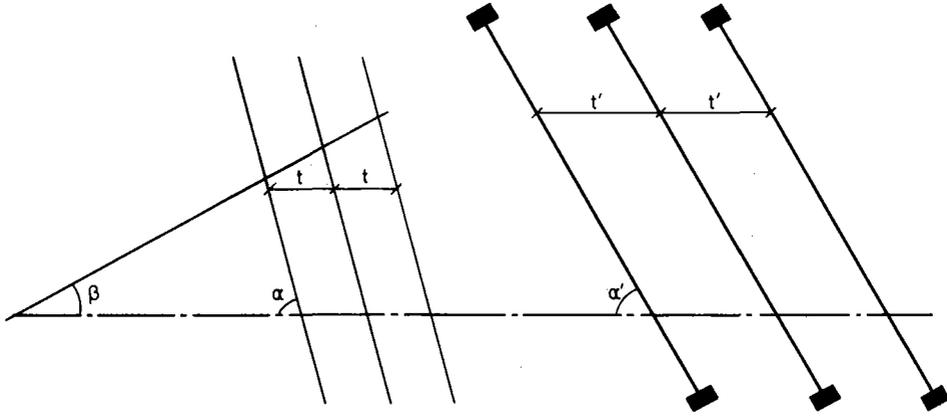
Avec des notations analogues, la formule de Chalos et Béteille, utilisée dans l'ancien règlement, s'écrivait :

$$\tau^2 \leq \frac{\sigma'_j}{\sigma'_j} (K \sigma'_j - \sigma'_x - \sigma'_y) (K \sigma'_j + \sigma'_x + \sigma'_y) + \sigma'_x \sigma'_y$$

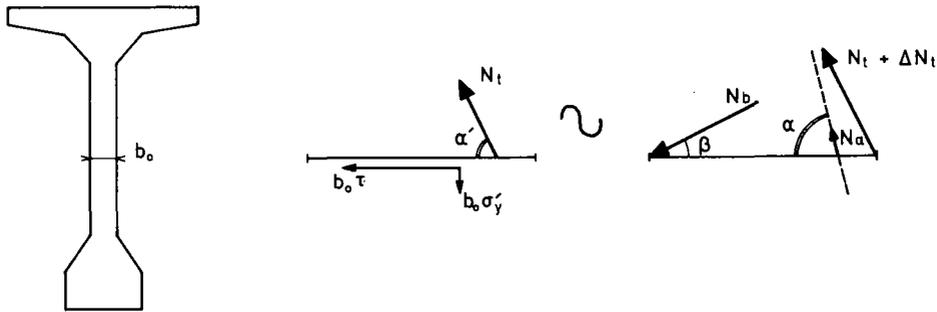
avec : $K = 0,42$ en service
 $K = 0,55$ en construction

1.2. Justification aux états limites ultimes

On admet qu'aux états ultimes, l'âme se découpe en bielles inclinées selon la direction des isostatiques de compression. La poutre résiste alors selon le mécanisme du treillis.



Considérons une poutre à plan moyen, un élément de plan, perpendiculaire au plan moyen, passant par la fibre moyenne, de largeur b_0 et de longueur unité.



Avant fissuration, transitaient à travers cet élément de surface les efforts $b_0 \tau$, $b_0 \sigma'_y$, N_t . Après fissuration, on a les efforts N_b , N_a et $N_t + \Delta N_t$. Ces deux systèmes de forces étant équivalents, on en déduit :

$$\left\{ b_0 \tau, b_0 \sigma'_y \right\} \sim \left\{ N_b, N_a, \Delta N_t \right\}$$

soit en projetant sur l'horizontale puis la verticale :

$$b_0 \tau = N_b \cos \beta + N_a \cos \alpha + \Delta N_t \cos \alpha'$$

$$b_0 \sigma'_y = N_b \sin \beta - N_a \sin \alpha - \Delta N_t \sin \alpha'$$

Si l'on désigne par F_t l'une des valeurs caractéristiques de la force de précontrainte fournie par un cours d'étriers actifs :

$$N_t = \frac{F_t}{t'}$$

De même.

$$\Delta N_t = \frac{\Delta F_t}{t'}$$

Et :

$$N_a = \frac{A_t \sigma_{at}}{t}$$

D'où :

$$\tau = \frac{N_b}{b_o} \cos \beta + \frac{A_t \sigma_{at}}{b_o t} \cos \alpha + \frac{\Delta F_t}{b_o t'} \cos \alpha'$$

$$\sigma'_y = \frac{N_b}{b_o} \sin \beta - \frac{A_t \sigma_{at}}{b_o t} \sin \alpha - \frac{\Delta F_t}{b_o t'} \sin \alpha'$$

En éliminant N_b entre ces 2 équations :

$$\tau \sin \beta - \sigma'_y \cos \beta = \frac{A_t \sigma_{at}}{b_o t} \sin (\alpha + \beta) + \frac{\Delta F_t}{b_o t'} \sin (\alpha' + \beta)$$

Soit :

$$\tau \operatorname{tg} \beta = \frac{A_t \sigma_{at}}{b_o t} \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos \beta} + \frac{\Delta F_t}{b_o t'} \frac{\sin (\alpha' + \beta)}{\cos \beta} + \sigma'_y$$

La condition réglementaire (Art. 29,23)

$$\frac{A_t \sigma_e}{b_o t} \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos \beta} + \frac{\overline{\Delta F_t}}{b_o t'} \frac{\sin (\alpha' + \beta)}{\cos \beta} + \sigma'_y \geq \tau \operatorname{tg} \beta - 0,15 \sqrt{\sigma'_j}$$

en découle immédiatement si l'on admet que lorsqu'on atteint l'état ultime de résistance, $\sigma_{at} = \sigma_e$ et que $\overline{\Delta F_t}$ correspond à la plus petite des deux valeurs σ_e ou $Tg - \sigma_{pk}$; le terme soustractif $0,15 \sqrt{\sigma'_j}$ représente la partie de l'effort tranchant équilibrée par cisaillement du béton demeuré intact.

Il y a lieu, par ailleurs, de s'assurer que la contrainte du béton dans les bielles : $\sigma'_b = \frac{N_b}{b_o \sin \beta}$ reste inférieure à $\frac{\sigma'_j}{2,5}$

Lorsque l'on a à la fois des étriers actifs et des étriers passifs et que $\alpha \neq \alpha'$, le treillis est hyperstatique et on ne sait pas calculer N_b ni σ'_b . Il faut se donner soit σ_{at} soit ΔF_t . Si l'on se donne ΔF_t :

$$\sigma'_b = \frac{\tau \sin \alpha + \sigma'_y \cos \alpha - \frac{\Delta F_t}{b_o t'} \sin (\alpha - \alpha')}{\sin (\alpha + \beta) \sin \beta} \quad \textcircled{A}$$

Si l'on donne σ_{at} :

$$\sigma'_b = \frac{\tau \sin \alpha' + \sigma'_y \cos \alpha' - \frac{A_t \sigma_{at}}{b_o t'} \sin (\alpha' - \alpha)}{\sin (\alpha' + \beta) \sin \beta} \quad \textcircled{B}$$

Connaissant les valeurs extrêmes de σ_{at} et ΔF_t , il est facile d'obtenir un majorant de σ'_b (cf. 3.3.2.).

Si $\alpha = \alpha'$, les équations \textcircled{A} et \textcircled{B} se réduisent à :

$$\sigma'_b = \frac{\tau \sin \alpha + \sigma'_y \cos \alpha}{\sin (\alpha + \beta) \sin \beta}$$

Dans le cas fréquent où $\alpha = \alpha' = \frac{\pi}{2}$, l'inégalité permettant de calculer les étriers s'écrit :

$$\frac{A_t \sigma_e}{b_o t} + \frac{\overline{\Delta F_t}}{b_o t'} + \sigma'_y \geq \tau \operatorname{tg} \beta - 0,15 \sqrt{\sigma'_j}$$

et l'on a :

$$\sigma'_b = \frac{2 \tau}{\sin 2 \beta}$$

Signalons enfin l'article 29.22 qui exige un minimum d'armatures d'âmes (ce qui constitue une condition de non fragilité) et l'article 29.24 qui limite les espacements entre cours successifs d'armatures d'âme.

2 – PREMIER EXEMPLE

2.1.– Données générales

Reprenons l'exemple traité en II.3 pour ce qui est de l'évaluation de la précontrainte et dont les contraintes normales ont été justifiées en III.3. Rappelons qu'il s'agit d'une travée indépendante précontrainte au moyen de 26 câbles 12 T 13.

Nous nous contenterons de justifier la section sur appui, du côté des ancrages actifs, bien qu'il ne s'agisse pas nécessairement de la section la plus défavorable.

2.1.1 Précontrainte

Elle est assurée par les seuls câbles filants, au nombre de 14, qui fournissent chacun, dans la section considérée, une force de précontrainte :

$$P = 1,23 \text{ MN}$$

$$P_1 = 1,36 \text{ MN}$$

$$P_2 = 1,10 \text{ MN}$$

Compte-tenu de l'inclinaison moyenne des câbles, l'effort tranchant de précontrainte a pour valeur :

$$V_P = 3,43 \text{ MN}$$

$$V_{P_1} = 3,79 \text{ MN}$$

$$V_{P_2} = 3,06 \text{ MN}$$

2.1.2. Sollicitations

Poids propre. $V_G = 2,50 \text{ MN}$

$$V_{G_1} = 2,65 \text{ MN}$$

$$V_{G_2} = 2,40 \text{ MN}$$

Superstructures $V_{G'} = 0,76 \text{ MN}$

$$V_{G'_1} = 0,91 \text{ MN}$$

$$V_{G'_2} = 0,61 \text{ MN}$$

Charges d'exploitation $V_R = 1,25 \text{ MN}$

2.1.3. Caractéristiques géométriques de la section.

Les caractéristiques de la section nette, au droit de l'appui sont les suivantes :

$$B_n = 4,158 \text{ m}^2$$

$$v_n = 1,039 \text{ m} \quad v'_n = 1,361 \text{ m}$$

$$I_n = 3,655 \text{ m}^4$$

$$S_n = 1,812 \text{ m}^3$$

$$z = \frac{I_n}{S_n} = 2,017 \text{ m}$$

2.2. Etat limite d'utilisation

Il y a lieu, à priori, de considérer les deux efforts tranchants extrêmes :

$$V \max = V_{G1} + V_{G'1} + 1,2 V_R + V_{P2} = 2,00 \text{ MN}$$

et
$$V \min = V_{G2} + V_{G'2} + V_{P1} = -0,78 \text{ MN}$$

V min étant nettement inférieur, en valeur absolue à V max, nous n'étudierons que V max.

L'état des contraintes au niveau du centre de gravité de la section est alors défini par :

$$\tau = \frac{V \max}{b_n z} = \frac{200}{0,512 \times 2,017} = 1,94 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_x = \frac{P_2}{B_n} = \frac{14 \times 1,10}{4,158} = 3,70 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_y = 0 \quad (\text{pas d'étriers actifs})$$

Il s'agit simplement de vérifier que cet état de contraintes est acceptable, autrement dit, que $\tau \leq \bar{\tau}$, $\bar{\tau}$ étant donné par la formule de CHALOS et BETEILLE aménagée :

$$\bar{\tau}^2 = (0,25)^2 \left(1 + \frac{\sigma'_x + \sigma'_y}{\sigma'_j} \right)^2 \left(\frac{\sigma'_j}{\gamma_b} - \sigma'_x - \sigma'_y \right) \left(k \sigma_j + \sigma'_x + \sigma'_y \right) + \sigma'_x \sigma'_y$$

Ici : $k = 1$ (genre II)

$$\sigma'_j = \sigma'_{28} = 30 \text{ MPa}$$

$$\sigma_j = \sigma_{28} = 2,4 \text{ MPa}$$

Donc :
$$\bar{\tau}^2 = (0,25)^2 \left(1 + \frac{3,70}{30} \right)^2 (16,67 - 3,70) (2,40 + 3,70)$$

Soit :
$$\bar{\tau} = 2,50 \text{ MPa}$$

On a bien $\tau = 1,94 \text{ MPa} \leq \bar{\tau} = 2,50 \text{ MPa}$

2.3. Etat limite ultime

Là encore, deux combinaisons correspondant à une valeur maximale et à une valeur minimale (algébrique) de l'effort tranchant sont en principe à étudier :

$$V \max = 1,2 \left[1,1 (V_{G1} + V_{G'1}) + 1,33 V_R + V_{P2} \right] = 3,02 \text{ MN}$$

$$V \min = 1,2 \left[0,9 (V_{G2} + V_{G'2}) + V_{P1} \right] = -1,30 \text{ MN}$$

Nous ne retiendrons, en fait que la première de ces valeurs.

Alors :
$$\tau = \frac{V \max}{b_n z} = \frac{3,02}{0,512 \times 2,017} = 2,92 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_x = \frac{1,2 P_2}{B_n} = \frac{1,2 \times 14 \times 1,10}{4,158} = 4,44 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_y = 0$$

2.3.1. Détermination des armatures d'âmes verticales

L'inclinaison β des fissures est définie par :

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\tau}{\sigma'_x - \sigma'_y} = 2 \times \frac{2,92}{4,44} = 1,315$$

$$\operatorname{tg} \beta = 0,496 \quad \sin 2\beta = 0,796$$

La formule des coutures, avec $\alpha = \frac{\pi}{2}$ se réduit à : $\frac{A_t \sigma_e}{b_o t} \geq \tau \operatorname{tg} \beta - 0,15 \sqrt{\sigma'_j}$

soit, si $\sigma_e = 412 \text{ MPa}$:

$$\frac{A_t}{t} \geq \frac{0,64}{412} (292 \times 0,496 - 0,15 \sqrt{30}) = 9,7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{m} = 9,74 \text{ cm}^2/\text{m}$$

En fait, les étriers seront dimensionnés par la condition de l'article 29.22 :

$$\sigma'_y + \frac{A_t}{b_o t} \sigma_e \sin \alpha \geq \inf. \left\{ \begin{array}{l} \tau/2 \\ 1 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

Ici :

$$\frac{A_t}{0,64 t} \times 412 \geq 1 \text{ MPa}$$

$$\text{D'où : } \frac{A_t}{t} \geq \frac{0,64 \times 1}{412} = 15,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{m} = 15,5 \text{ cm}^2/\text{m}$$

On pourra par exemple disposer 4 brins HA 14 (2 par âme) tous les 35 cm, ce qui correspond à :

$$\frac{A_t}{t} = \frac{4 \times 1,54}{0,35} = 17,6 \text{ cm}^2/\text{m}$$

On respecte bien les espacements limites définis à l'article 29.24 :

$$t = 0,35 \text{ m} \leq \inf. \left\{ \begin{array}{l} 0,8 h_t = 0,8 \times 2,40 = 1,92 \text{ m} \\ 3 b = 3 \times 0,32 = 0,96 \text{ m} \end{array} \right.$$

2.3.2. Justification du béton

On doit vérifier que la contrainte dans les bielles est inférieure à $\frac{\sigma'_j}{2,5}$ soit :

$$\sigma'_b = \frac{\tau \sin \alpha + \sigma'_y \cos \alpha}{\sin \beta \sin (\alpha + \beta)} \leq \frac{\sigma'_j}{2,5} \quad \begin{array}{l} \text{(formule valable lorsque)} \\ \text{(} \alpha = \alpha' \text{)} \end{array}$$

$$\text{Ici : } \sigma'_b = \frac{\tau \sin \frac{\pi}{2}}{\sin \beta \sin \left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)} = \frac{\tau}{\sin \beta \cos \beta} = \frac{2\tau}{\sin 2\beta} = \frac{2 \times 2,92}{0,796} = 7,34 \text{ MPa}$$

$$\text{On a bien } \sigma'_b = 7,34 \text{ MPa} < \frac{30}{2,5} = 12 \text{ MPa}$$

3 – DEUXIEME EXEMPLE

3.1. Données générales

Nous allons justifier, sur l'ouvrage présenté en III.4, une section de la travée centrale à proximité de la pile. De façon plus précise, c'est la section à $\frac{h_t}{2} = 1,20$ m de l'appui que nous étudierons (art. 27,22)

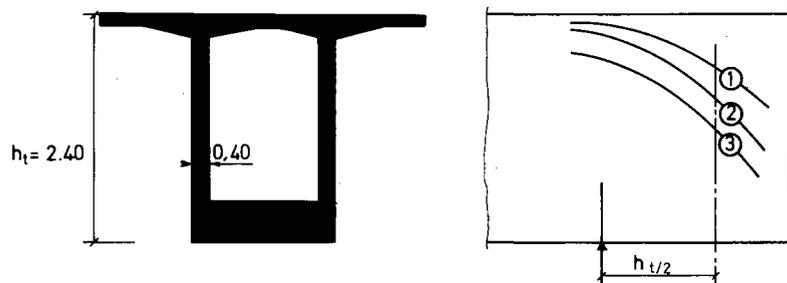
3.1.1. Précontrainte

Elles est assurée par 32 câbles 12 T 13 fournissant, en service, un effort de précontrainte :

$$P = 32 \times 1,08 = 34,56 \text{ MN}$$

$$P_1 = 32 \times 1,19 = 38,08 \text{ MN}$$

$$P_2 = 32 \times 0,97 = 31,04 \text{ MN}$$



Seuls, 3 câbles par âme sont inclinés dans la section étudiée. Avec des rayons de courbure au sommet $R_1 = 4$ m, $R_2 = R_3 = 3$ m, ils présentent des inclinaisons :

$$\text{tg } \alpha_1 = \frac{1,20}{4,00} = 0,3 \quad ; \quad \sin \alpha_1 = 0,287$$

$$\text{tg } \alpha_2 = \frac{1,20}{3,00} = 0,4 \quad ; \quad \sin \alpha_2 = 0,371$$

$$\text{Donc : } V_p = - 2 \times 1,08 \times 0,287 - 4 \times 1,08 \times 0,371 = - 2,22 \text{ MN}$$

$$V_{P_1} = - 2 \times 1,19 \times 0,287 - 4 \times 1,19 \times 0,371 = - 2,45 \text{ MN}$$

$$V_{P_2} = - 2 \times 0,97 \times 0,287 - 4 \times 0,97 \times 0,371 = - 2,00 \text{ MN}$$

3.1.2. Sollicitations

Les effets hyperstatiques de la précontrainte, la redistribution due au fluage (dans la mesure toutefois où les deux consoles ont le même âge) la différence de température entre intrados et extrados ne donnent aucun effort tranchant dans la travée centrale.

- Poids propre
 - $V_G = 3,43 \text{ MN}$
 - $V_{G1} = 3,64 \text{ MN}$
 - $V_{G2} = 3,30 \text{ MN}$
- Superstructures
 - $V_{G'} = 1,04 \text{ MN}$
 - $V_{G'1} = 1,27 \text{ MN}$
 - $V_{G'2} = 0,91 \text{ MN}$
- Charges d'exploitation
 - $V_R \text{ max} = + 1,60 \text{ MN}$
 - $V_R \text{ min} = - 0,11 \text{ MN}$

3.1.3. Caractéristiques géométriques de la section

- Section nette
 - $B_n = 5,580 \text{ m}^2$
 - $v_n = 0,955 \text{ m}$ $v'_n = 1,445 \text{ m}$
 - $I_n = 4,821 \text{ m}^4$
 - $S_n = 2,408 \text{ m}^3$
 - $z = \frac{I}{S_n} = 2,002 \text{ m}$

3.2. Etat limite d'utilisation

Les deux efforts tranchants extrêmes à considérer sont :

$$V \text{ max} = V_{G1} + V_{G'1} + 1,2 V_R \text{ max} + V_{P2} = 4,83 \text{ MN}$$

$$V \text{ min} = V_{G2} + V_{G'2} + V_{P1} = 1,76 \text{ MN}$$

L'effort tranchant reste donc toujours positif et seul V max est en pratique à considérer.

Au niveau du centre de gravité de la section, on a donc :

$$\tau = \frac{V \text{ max}}{b_n z} = \frac{4,83}{2 (0,40 - 0,07) \times 2,002} = 3,66 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_x = \frac{P_2}{B_n} = \frac{31,04}{5,580} = 5,56 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_y = 0$$

Donc avec : $k = 1$ $\sigma'_j = \sigma'_{28} = 33 \text{ MPa}$ $\frac{\sigma'_j}{\gamma_b} = \frac{33}{1,8} = 18,33 \text{ MPa}$

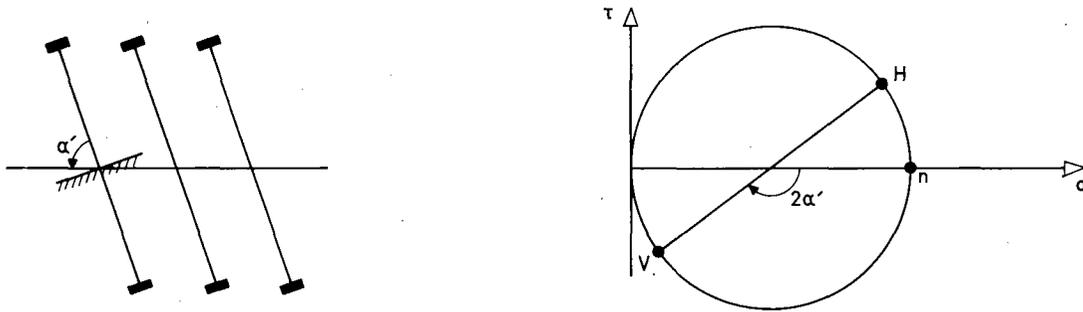
$$\sigma_j = \sigma_{28} = 2,58 \text{ MPa}$$

on a : $\bar{\tau}^2 = (0,25)^2 \left(1 + \frac{5,56}{33}\right)^2 (18,33 - 5,56) (2,58 + 5,56)$

d'où : $\bar{\tau} = 2,98 \text{ MPa}$

Comme $\tau = 3,66$ MPa, il est nécessaire d'utiliser des étriers actifs pour aboutir à un état de contraintes acceptable.

Prenons donc des armatures actives inclinées de $\alpha' = \text{Arc tg } 3 = 79,52$ gr ; $n = \frac{F_t}{b_0 t' \sin \alpha'}$



L'état de contraintes développé par ces seuls étriers actifs est défini par :

$$\tau_t = -\frac{n}{2} \sin 2\alpha'$$

$$\sigma'_{xt} = \frac{n}{2} (1 + \cos 2\alpha')$$

$$\sigma'_{yt} = \frac{n}{2} (1 - \cos 2\alpha')$$

Soit, dans notre cas, puisque $\sin 2\alpha' = 0,6$

$$\cos 2\alpha' = -0,8$$

$$\tau_t = -0,3 n$$

$$\sigma'_{xt} = 0,1 n$$

$$\sigma'_{yt} = 0,9 n$$

On a donc, pour l'état de contraintes résultant :

$$\tau = 3,66 - 0,3 n$$

$$\sigma'_x = 5,56 + 0,1 n$$

$$\sigma'_y = 0,9 n$$

et la formule de Chalos et Béteille modifiée s'écrit :

$$(3,66 - 0,3 n)^2 \leq (0,25)^2 \left(1 + \frac{5,56 + n}{33}\right)^2 (18,33 - 5,56 - n) (2,58 + 5,56 + n) + (5,56 + 0,1 n) \times 0,9 n$$

$$\text{Soit : } 13,40 \leq (0,25)^2 \left(1 + \frac{5,56 + n}{33}\right)^2 (12,77 - n) (8,14 + n) + 7,20 n$$

Par approximations successives, on aboutit à :

$$n \geq 0,57 \text{ MPa}$$

Supposons que l'on utilise comme armatures actives des monofils $\emptyset 12$ (système BBR par exemple) de classe II, sous classe RN :

$$\begin{aligned} T_g &= 1\,373 \text{ MPa} \\ R_g &= 1\,540 \text{ MPa} \\ \rho_{1000} &= 10 \% \end{aligned}$$

Un calcul rapide de tension montre que l'on a approximativement :

$$\begin{aligned} \sigma_p &= 875 \text{ MPa} \\ \sigma_{P_1} &= 980 \text{ MPa} \\ \sigma_{P_2} &= 770 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Soit pour un monofil :

$$\begin{aligned} F_t &= 9,89 \cdot 10^{-2} \text{ MN} \\ F_{t_1} &= 11,07 \cdot 10^{-2} \text{ MN} \\ F_{t_2} &= 8,70 \cdot 10^{-2} \text{ MN} \end{aligned}$$

C'est évidemment F_{t_2} qui conduit à l'état de contraintes le plus défavorable. On doit satisfaire à :

$$n_2 = \frac{F_{t_2}}{b_0 t' \sin \alpha'} \geq 0,57 \text{ MPa} \quad \text{soit, avec } \sin \alpha' = 0,949 :$$

$$t' \leq \frac{8,70 \cdot 10^{-2}}{0,40 \times 0,949 \times 0,57} = 0,40 \text{ m}$$

On peut donc disposer un monofil incliné par âme tous les 40 cm, tout en respectant l'espacement maximum admissible : $0,8 h_t$ pour les armatures actives (art. 29,24).

3.3. Etat limite ultime

Comme toujours, deux états de sollicitations extrêmes sont à considérer :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{\max} = 1,2 \left[1,1 (V_{G_1} + V_{G'_1}) + 1,33 V_R + V_{P_2} \right] = 6,63 \text{ MN} \\ 1,2 P_2 = 37,25 \text{ MN} \\ 1,2 F_{t_2} = 10,44 \cdot 10^{-2} \text{ MN} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{\min} = 1,2 \left[0,9 (V_{G_2} + V_{G'_2}) + V_{P_1} \right] = 1,61 \text{ MN} \\ 1,2 P_1 = 45,70 \text{ MN} \\ 1,2 F_{t_1} = 13,28 \text{ MN} \end{array} \right.$$

Nous ne vérifierons que le premier, le plus défavorable. Avec les mêmes notations que précédemment

$$1,2 n_2 = \frac{1,2 F_{t_2}}{b_0 t' \sin \alpha'} = \frac{10,44 \cdot 10^{-2}}{0,40 \times 0,40 \times 0,949} = 0,69 \text{ MPa}$$

Et :

$$\tau = \frac{V_{\max}}{b_n z} - 0,3 \times 1,2 n_2 = \frac{6,63}{0,66 \times 2,002} - 0,3 \times 0,69 = 4,81 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_x = \frac{1,2 P_2}{B_n} + 0,1 \times 1,2 n_2 = \frac{37,25}{5,580} + 0,1 \times 0,69 = 6,74 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_y = 0,9 \times 1,2 n_2 = 0,9 \times 0,69 = 0,62 \text{ MPa}$$

L'inclinaison des bielles est définie par :

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\tau}{\sigma'_x - \sigma'_y} = \frac{2 \times 4,81}{6,74 - 0,62} = 1,572$$

D'où : $\beta = 31,97 \text{ gr}$

3.3.1. Détermination des armatures d'âme verticales

Si l'on complète les étriers actifs par des armatures d'âme verticales en acier à haute adhérence, la règle des coutures de l'article 29.23 nous donne une première estimation de leur section :

$$\frac{A_t}{b_o t} \sigma_e \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta} \geq \tau \operatorname{tg} \beta - 0,15 \sqrt{\sigma'_j} - \frac{\overline{\Delta F_{t_2}}}{b_o t'} \frac{\sin(\alpha' + \beta)}{\cos \beta} - \sigma'_y$$

Soit avec : $\sigma_e = 412 \text{ MPa}$

$$\alpha = 100 \text{ gr}$$

$$\beta = 31,97 \text{ gr} \quad \operatorname{tg} \beta = 0,549 \quad \cos \beta = 0,877$$

$$\alpha' = 79,52 \text{ gr} \quad \sin(\alpha' + \beta) = \sin 111,49 \text{ gr} = 0,984$$

$$\overline{\Delta F_{t_2}} = 113 \cdot 10^{-6} \times \inf \left\{ \begin{array}{l} \sigma_e = 412 \text{ MPa} \\ T_g - \sigma_{P_2} = 1373 - 770 = 603 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

$$= 4,66 \cdot 10^{-2} \text{ MN}$$

$$\frac{A_t}{t} \times \frac{412}{0,40} \geq 4,81 \times 0,549 - 0,15 \sqrt{33} - \frac{4,66 \cdot 10^{-2}}{0,40 \times 0,40} \times \frac{0,984}{0,877} - 0,62 = 0,83$$

$$\text{Soit } \frac{A_t}{t} \geq \frac{0,83 \times 0,40}{412} = 8,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{m} = 8,1 \text{ cm}^2/\text{m} \quad (\text{pour 1 âme})$$

On peut par exemple prendre 2 brins HA 12 tous les 25 cm, soit :

$$\frac{A_t}{t} = \frac{2 \times 1,13}{0,25} = 9,04 \text{ cm}^2/\text{m}$$

La condition de l'article 29,22 fixant un minimum d'armatures d'âme

$$\sigma'_y + \frac{A_t}{b_o t} \sigma_e \sin \alpha \geq \inf. \begin{cases} \tau / 2 \\ 1 \text{ MPa} \end{cases}$$

n'est pas ici déterminante puisqu'elle conduit à :

$$\frac{A_t \times 412}{0,40 \times t} \geq 1 - 0,62$$

$$\text{Soit : } \frac{A_t}{t} \geq 3,69 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{m} = 3,69 \text{ cm}^2/\text{m}$$

3.3.2. Justification du béton des bielles

Les equations (A) et (B) de 1.2. permettent de calculer σ'_b connaissant soit ΔF_t soit σ_{at} :

$$\text{(A) } \sigma'_b = \frac{\tau \sin \alpha + \sigma'_y \cos \alpha - \frac{\Delta F_t}{b_o t} \sin (\alpha - \alpha')}{\sin (\alpha + \beta) \sin \beta} = \frac{4,81 - \frac{\Delta F_t}{0,4 \times 0,4} \times 0,316}{0,877 \times 0,481}$$

$$\text{(B) } \sigma'_b = \frac{\tau \sin \alpha' + \sigma'_y \cos \alpha' - \frac{A_t \sigma_{at}}{b_o t} \sin (\alpha' - \alpha)}{\sin (\alpha' + \beta) \sin \beta}$$

$$= \frac{4,8 \times 0,949 + 0,62 \times 0,316 + \frac{2 \times 1,13 \cdot 10^{-4}}{0,4 \times 0,25} \sigma_{at}}{0,984 \times 0,481}$$

Pour $\Delta F_t = 0$, (A) nous donne $\sigma'_b = 11,40 \text{ MPa}$

Pour $\sigma_{at} = \sigma_e = 412 \text{ MPa}$, (B) nous donne : $\sigma'_b = 10,86 \text{ MPa}$

Au pire, donc, $\sigma'_b = 11,40 \text{ MPa}$ et l'on a bien :

$$\sigma'_b = 11,40 \text{ MPa} \leq \frac{\sigma'_{28}}{2,5} = \frac{33}{2,5} = 13,20 \text{ MPa}$$

CHAPITRE V – HOURDIS

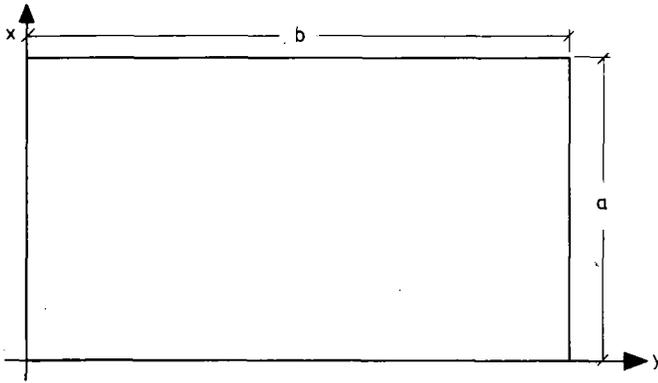
1 – GENERALITES SUR LE CALCUL DES HOURDIS

1.1. – Définitions

Nous nous bornerons à l'étude des hourdis rectangulaires.

Dans la quasi-totalité des cas, ce sont des dalles à simple précontrainte (c'est-à-dire précontraintes dans une seule direction et non dans deux directions perpendiculaires).

La direction mécanique principale de ces hourdis est celle de la petite portée (que nous désignerons systématiquement par a). Ces conventions coïncident souvent avec celles adoptées par M. THENOZ dans le bulletin technique n° 1 sur le calcul des hourdis de ponts : a désigne alors le côté perpendiculaire au sens de circulation qui peut ne point être le petit côté lorsqu'on a affaire à une dalle très large s'appuyant sur des pièces de pont (disposition peu fréquente dans les structures modernes en béton précontraint)



On appelle zone de répartition transversale, la zone dans laquelle :

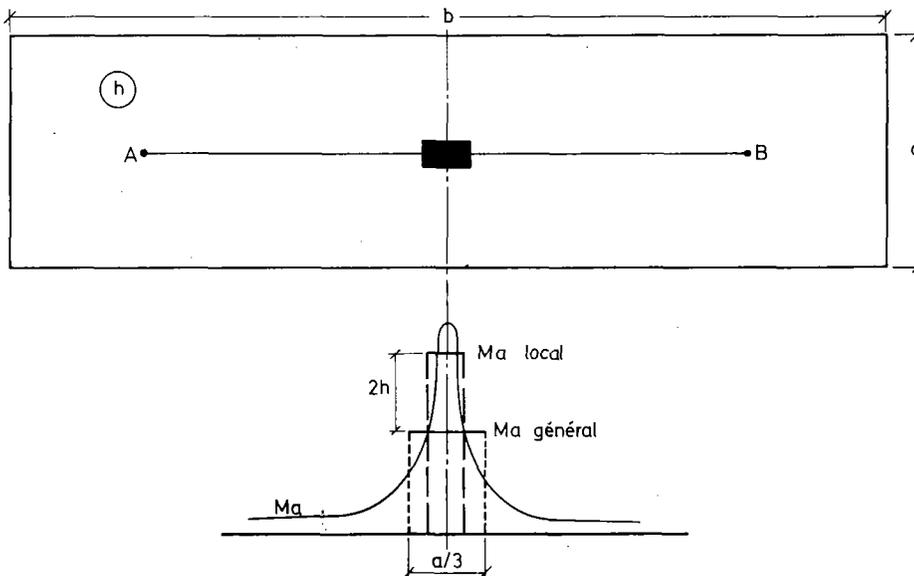
$$M_b(x, y) \leq \frac{1}{4} M_a(x_0, y_0), \quad x_0, y_0 \text{ étant le}$$

point où M_a est maximum (par convention, la direction d'un moment fléchissant est celle des contraintes qu'il engendre ; ainsi

M_a représente le moment qui engendre des contraintes parallèles au petit côté).

1.2. Evaluation des sollicitations

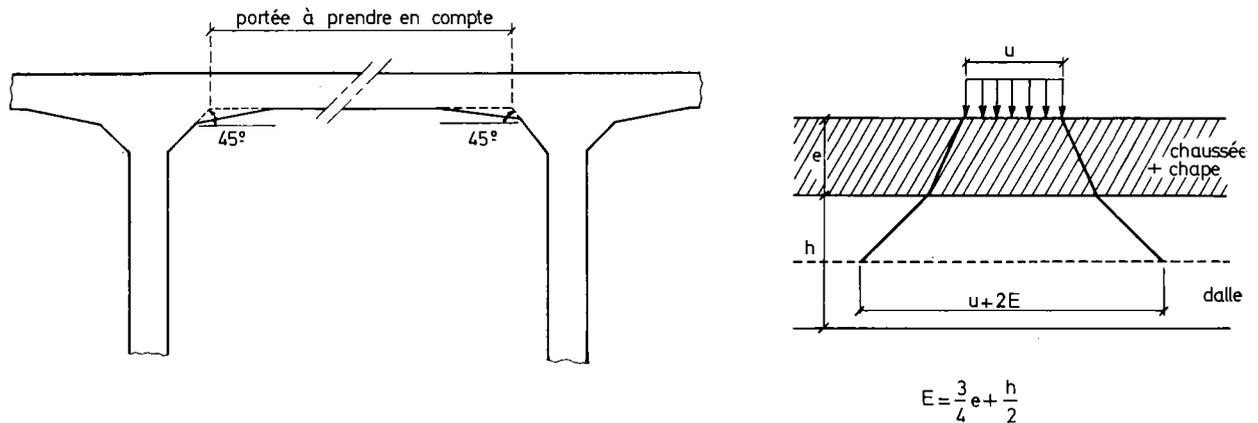
Le nouveau Règlement fait une distinction entre efforts généraux et efforts locaux.



Pour préciser cette notion, prenons l'exemple du moment M_a engendré par une charge concentrée placée au milieu d'une dalle. La distribution de M_a le long d'une coupure AB, a l'allure figurée ci-dessous (le moment deviendrait infini, au droit de l'impact, si celui-ci était de dimension nulle). Moment local, comme moment général représentent en réalité la valeur moyenne de M_a sur une certaine largeur, ($2h$ pour le moment local, $\frac{a}{3}$ pour le moment général).

Les abaques classiquement utilisés sont censés fournir les moments locaux.

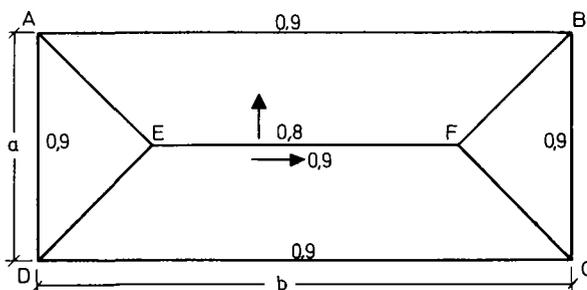
Précisons à cet égard que les conventions habituelles permettant de définir les portées des hourdis et les dimensions des impacts sur le feuillet moyen sont conservées.



Une fois connus ces moments locaux, on en déduit les moments généraux en leur appliquant des coefficients réducteurs forfaitaires.

Ainsi, on prendra comme moment général en un point :

- sous charge uniforme, le moment local au même point
- sous charge concentrée k fois ce moment local avec :



- $k = 0,8$ s'il s'agit de M_a en un point de E F
- $k = 0,9$ s'il s'agit de M_b en un point de E F
- $k = 0,9$ s'il s'agit de l'un quelconque des moments le long d'un des côtés.

1.3. Principe des justifications

Le plus souvent, on n'est tenu à justifier que les contraintes normales.

Il est logique d'adopter deux genres de vérification différents pour les efforts locaux et pour les efforts généraux. Par exemple :

- genre IIa pour les efforts généraux
- genre IIIa pour les efforts locaux.

Pratiquement il y aura lieu de faire des vérifications aux états limites d'utilisation :

- a – Sous efforts généraux (en genre IIa) : partout
- b – Sous efforts locaux (en genre IIIa) dans les directions les plus sollicitées : hors des zones de répartition transversale.
- c – Sous efforts locaux (en genre IIIa) dans les directions les moins sollicitées : partout.

Enfin, il y a lieu de faire une vérification à l'état limite ultime de fatigue sous l'effet d'un seul camion de 30 tonnes.

Les justifications à effectuer aux états limites d'utilisation pour un hourdis partiellement encastré sur son pourtour sont résumées ci-dessous.

Sollicitations	Configuration I			Configuration II		
	en k	en i	en j	en k	en i	en j
Moments généraux	M_a et M_b	M_b et $(M_a = \nu M_b)$	M_a et $(M_b = \nu M_a)$	M_a et M_b	M_b et $(M_a = \nu M_b)$	M_a et $(M_b = \nu M_a)$
Moments locaux dans la direction la plus sollicitée		M_b		M_a	M_b	
Moments locaux dans la direction la moins sollicitée	M_b	$(M_a = \nu M_b)$	$(M_b = \nu M_a)$	M_b	$(M_a = \nu M_b)$	$(M_b = \nu M_a)$

La surface hachurée sur les figures représente la zone de répartition transversale.

La configuration I où b est grand devant a est beaucoup plus fréquente que la configuration II où les deux dimensions du hourdis sont du même ordre de grandeur.

D'un autre côté, la précontrainte est presque toujours dirigée suivant le petit côté a .

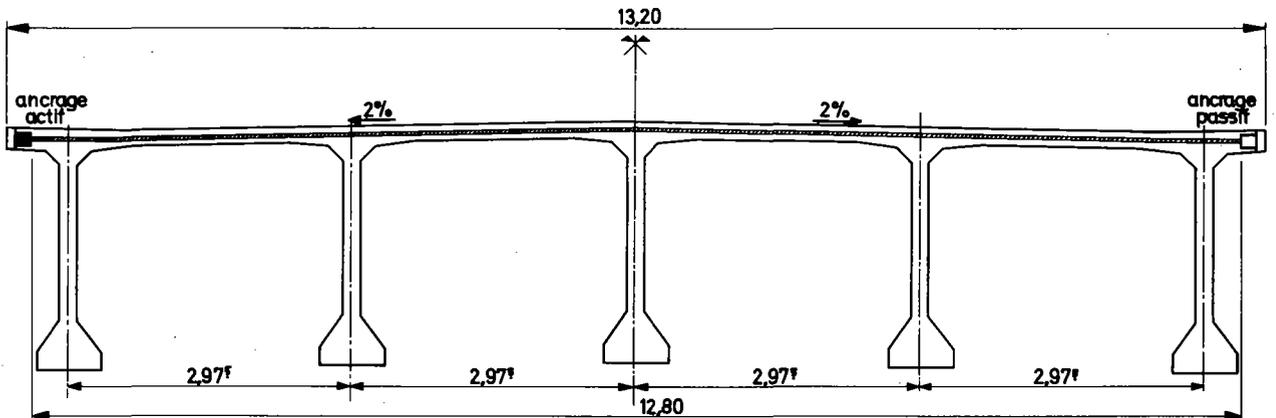
On voit alors sur le tableau précédent que seuls les moments locaux sont à considérer dans le sens de la grande portée b , puisque les justifications correspondantes se font en béton armé et que les moments généraux sont plus faibles que les moments locaux qui sont partout à prendre en compte.

Par contre, les justifications dans le sens de la petite portée ne se font pratiquement que sous moments généraux (et donc en genre IIa) sauf au milieu de la dalle (en k) lorsque a et b sont du même ordre de grandeur auquel cas il y a lieu de faire, en outre, une justification sous moments locaux (en genre IIIa).

2 – EXEMPLE D'APPLICATION

2.1. Evaluation des Sollicitations

2.1.1. Données générales



On reprend l'exemple traité en II.2. Il s'agit du hourdis d'un pont à poutres sous chaussée de 40 m de portée, solidarisées par des entretoises distantes de 10 m. On a donc le système suivant :

$$\text{avec } a = 2,975 - \underbrace{2 \times \frac{0,19}{2}}_{2 \frac{1}{2} \text{ épaisseurs d'âme}} - \underbrace{2 \times 0,15}_{2 \text{ goussets } \alpha > 45^\circ} - \underbrace{0,04 - 0,053}_{2 \text{ goussets à } 45^\circ} = 2,39 \text{ m}$$

$$b = 10 - 2 \times \frac{0,26}{2} = 9,74 \text{ m}$$

$2 \frac{1}{2}$ épaisseurs d'entretoise

et $h_t = 18 \text{ cm}$ en travée

$h_t = 22 \text{ cm}$ à l'encastrement

$$\text{d'où } E = \frac{h_t}{2} + \frac{3}{4} (\text{chape} + \text{chaussée}) =$$

$$\frac{18}{2} + \frac{3}{4} (1,5 + 4,5) = 13,5 \text{ en travée}$$

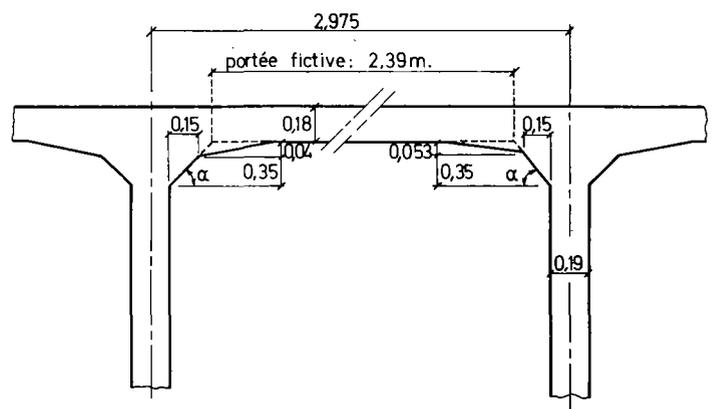
et 15,5 à l'encastrement

– le coefficient de majoration dynamique vaut : $\delta = 1,25$

avec G # 111,4 T

avec S # 119,7 T

(S représente la charge B maximale applicable au hourdis)



2.1.2. Evaluation des Moments locaux

On les calculera directement au moyen des abaques de M. THENOZ

a – au centre de la dalle :

sous charges permanentes :

La valeur probable du poids propre de la dalle est calculée comme suit :

$$g = 2,39 \times 9,74 \times \left[(0,18 \times 25\ 000) + (0,015 \times 21\ 000) + (0,045 \times 22\ 500) \right]$$

g probable = 136 000 N d'où les valeurs caractéristiques

maximale $g_1 = 1,06 g = 144\ 000$ N

et minimale $g_2 = 0,96 g = 130\ 000$ N

avec l'abaque 61 du Bulletin Technique n° 1 (abaque Pigeaud) on a

$$\text{avec } \rho' = 4,075 \text{ et } \rho = \frac{1}{\rho'} = 0,245$$

$$M_1 = 0,0295 \text{ et } M_2 = 0,0025 \quad \text{d'où} \quad M_a = M_1 + \nu M_2$$

$$M_b = M_2 + \nu M_1$$

avec $\nu = 0,20$

Compte tenu d'un coefficient de réduction de 0,8 dû à un encastrement partiel de la dalle sur la poutre, on aura les valeurs caractéristiques de M_a et M_b

$$M_{a\ G1} = (0,0295 + 0,2 \times 0,0025) \times 144\ 000 \times 0,8 = 3450 \text{ mN/m}$$

$$M_{a\ G2} = 0,03 \times 130\ 000 \times 0,8 = 3130 \text{ mN/m}$$

$$M_{b\ G1} = (0,025 + 0,2 \times 0,0295) \times 144\ 000 \times 0,8 = 966 \text{ mN/m}$$

$$M_{b\ G2} = (0,0025 + 0,2 \times 0,0295) \times 130\ 000 \times 0,8 = 875 \text{ mN/m}$$

charges d'exploitation

$$E = 13,5 \text{ cm} \quad \begin{matrix} M_a \\ M_b \end{matrix} \text{ avec 2 files de camions } B_c \quad b_c = 1,1$$

$$\text{on a donc :} \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{aR} = 29\ 200 \times \underset{b_c}{1,1} \times \underset{\delta}{1,25} \times \underset{\text{coefficient}}{0,8} = 32\ 100 \text{ mN/m} \\ M_{bR} = 15\ 300 \times 1,1 \times 1,25 \times 0,8 = 16\ 800 \text{ mN/m} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{valeurs caractéristiques des} \\ \text{sollicitations} \end{array}$$

b – Moments de continuité sur les poutres principales (grands côtés de la dalle).

charges permanentes

On suppose un encastrement parfait de la dalle fictive sur les goussets des poutres, vis à vis des charges permanentes et on calcule la dalle fictive comme une poutre dans le sens de la petite portée ($\frac{b}{a}$ # 4)

$$\text{d'où } M_{aG} = -\frac{ga^2}{12} \quad \text{avec } \underset{\text{probable}}{g} = 0,18 \times 25\ 000 + 0,015 \times 21\ 000 + 0,045 \times 22\ 500 = 5830 \text{ N/m}^2$$

$$\left. \begin{aligned} \text{c'est à dire } M_{aG} &= -\frac{5830}{12} \times \overline{2,39}^2 = -2780 \text{ mN/m} \\ \text{et } M_{bG} &= \nu M_{aG} = -0,2 \times 2780 = -556 \text{ mN/m} \end{aligned} \right\} \text{valeurs probables}$$

donc les valeurs caractéristiques seront :

$$\begin{aligned} M_{aG1} &= 1,06 M_{aG} = -2940 \text{ mN/m} & \text{et} & & M_{bG1} &= -588 \text{ mN/m} \\ M_{aG2} &= 0,96 M_{aG} = -2660 \text{ mN/m} & & & M_{bG2} &= -533 \text{ mN/m} \end{aligned}$$

charges d'exploitation

$$E = 15,5 \text{ cm et } A = \frac{2,975 - 2,39}{2} = 0,29 \text{ m}$$

$$\text{soit } B_c \text{ en 2 files} \quad b_c = 1,1$$

$$M_{aR} = -30\,900 \times 1,1 \times 1,25 = -42\,500 \text{ mN/m}$$

$$\text{et } M_{bR} = \nu M_{aR} = -8500 \text{ mN/m qui est négligeable}$$

c – Moments de continuité sur entretoise

charges permanentes

$$M_{bG} = -\frac{1}{12} \frac{\rho'^2}{1 + \rho'^4} g a^2 \quad \text{avec } \rho' = \frac{b}{a} \quad (\text{Résultat de Marcus})$$

$$M_{aG} \text{ est négligeable } (M_{aG} = \nu M_{bG})$$

$$\text{on a donc } M_{bG1} = -1,06 \times 128,5 = -136 \text{ mN/m}$$

$$M_{bG2} = -0,96 \times 128,5 = -123 \text{ mN/m}$$

charges d'exploitation

$$2 \text{ files de camions } B_c, \text{ donc } b_c = 1,1$$

$$A = 0,13 \text{ et } E = 13,5 \text{ cm}$$

$$M_{bR} = -35\,000 \times \underbrace{1,1}_{b_c} \times \underbrace{1,25}_{\delta} = -48\,000 \text{ mN/m}$$

d – Récapitulation des Moments locaux :

Section	Moment Charges	Transversal (M_a) mN/m		Longitudinal (M_b) mN/m	
		permanente	d'exploitation	permanente	d'exploitation
Au centre de la dalle		3 450 3 130	32 100	966 875	16 800
Encastrement sur poutre		- 2 940 - 2 660	- 42 500	négligeable	négligeable
Encastrement sur entretoise		négligeable	négligeable	- 136 - 123	- 48 000

N.B. Les charges d'exploitation ne sont pas encore pondérées par 1,2 pour l'état limite d'Utilisation

2.1.3. Evaluation des Moments Généraux

On utilise les coefficients k du paragraphe .2. et on obtient :

Sections	Moment Charges	Transversal (M_a) en mN/m		Longitudinal en mN/m	
		permanente	d'exploitation	permanente	d'exploitation
Au centre de la dalle		3 450 3 130	25 700	966 875	15 100
Encastrement sur poutre		-2 940 -2 660	- 38 200		
Encastrement sur entretoise				- 136 - 123	- 43 300

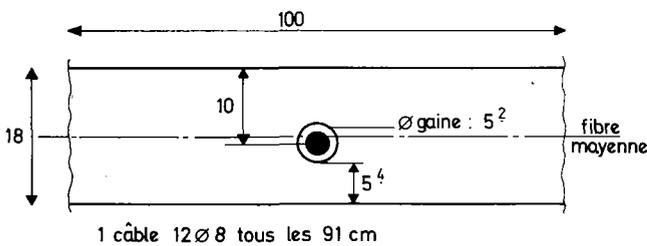
2.2. Sections à justifier

2.2.1. en Béton précontraint

- Les câbles (STUP 12 Φ 8) sont disposés parallèlement au petit côté, et espacés de 0,91 m. Ils sont parallèles à la fibre supérieure, et distants de 10 cm de celle-ci.

- Les valeurs des Section et Inertie nettes, pour une bande d'un mètre de largeur sont les suivantes :

au centre de la dalle (\perp petit côté)



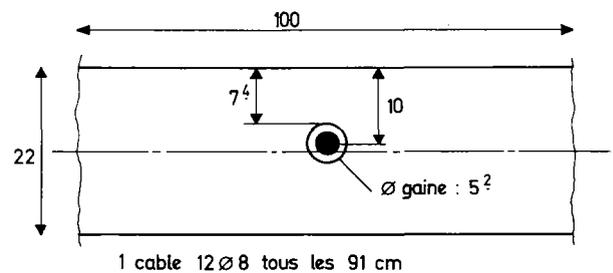
$$B_n = \left(100 \times 18 - \frac{\pi \cdot 5,2^2}{0,91 \times 4}\right) \cdot 10^{-4} = 0,1777 \text{ m}^2$$

$$I_n = \left[\frac{100 \times 18^3}{12} - \frac{1}{0,91} \left(\frac{\pi \cdot 5,2^4}{4} + 21 \times 1^2 \right) \right] 10^{-8}$$

$$I_n = 479,46 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

et $v \# v' \# 9 \text{ cm}$

Encastrement sur poutre



$$B_n = \left(100 \times 22 - \frac{\pi \cdot 5,2^2}{0,91 \times 4}\right) \cdot 10^{-4} = 0,2177 \text{ m}^2$$

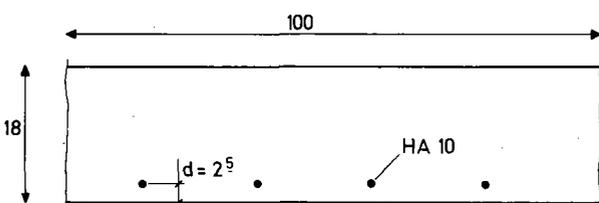
$$I_n = \left[\frac{100 \times 22^3}{12} - \frac{1}{0,91} \left(\frac{\pi \cdot 5,2^4}{4} + 21 \times 1^2 \right) \right] 10^{-8}$$

$$I_n = 880,79 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

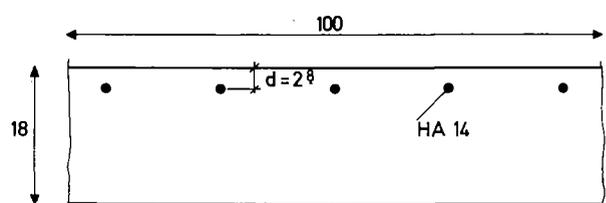
et $v \# v' \# 11 \text{ cm}$

2.2.2. en Béton Armé

au centre de la dalle (\perp grand côté)



Encastrement sur entretoise



2.3. Justification sous Moments Généraux

Cette justification est effectuée dans le genre II. Nous utiliserons plus particulièrement le sous genre IIa, qui admet pour contraintes limites les valeurs suivantes :

$$\text{- à la compression} \quad \frac{\sigma'_j}{\gamma_b} \text{ avec } \begin{cases} \gamma_b = 1,5 \text{ en phase de construction} \\ \gamma_b = 1,8 \text{ en service} \end{cases}$$

- à la traction

	à la construction	actions de longue durée seules	autres cas
dans la section d'enrobage	σ_j	0	σ_j
hors section d'enrobage	σ_j	σ_j	σ_j

Nous avons un béton dont la résistance caractéristique à 28 jours est :

$$\sigma'_{28} = 30 \text{ MPa} \text{ donc } \sigma_{28} = 0,6 + 0,06 \sigma'_{28} = 0,6 + 0,06 \times 30 = 2,4 \text{ MPa}$$

les contraintes limites sont donc :

$$\text{- en compression} \quad \frac{30}{1,8} = 16,7 \text{ MPa en Service}$$

- en traction : soit 0 ; soit 2,4 MPa, suivant le cas.

2.3.1 Moments généraux au centre de la dalle

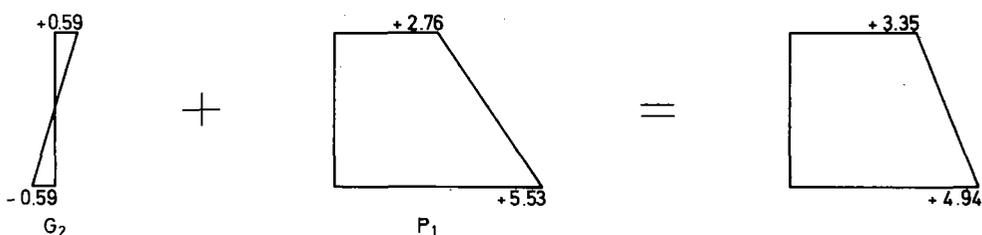
on a $P_1 = 0,670 \text{ MN}$ (Cf. calcul de l'exemple II.2)

$$P_2 = 0,574 \text{ MN}$$

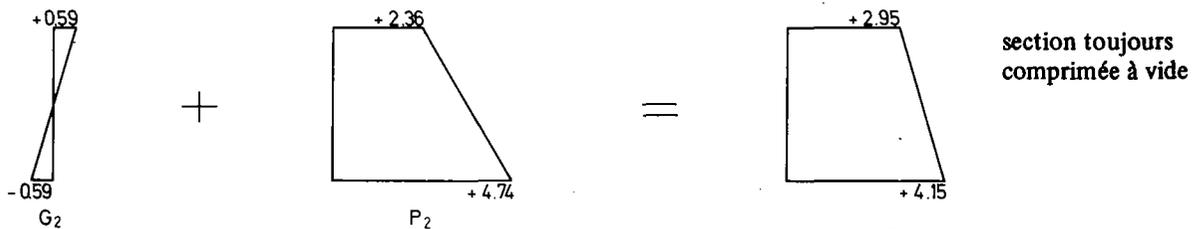
on a donc le tableau suivant, représentant les contraintes dues aux différentes actions, pondérées comme nécessaire, sur les fibres supérieure et inférieure d'une section de 1 m de largeur :

Fibre \ Actions	G_1	G_2	P_1	P_2	1,2 R
Supérieure	+ 0,65	+ 0,59	+ 2,76	+ 2,36	+ 5,79
Inférieure	- 0,65	- 0,59	+ 5,53	+ 4,74	- 5,79

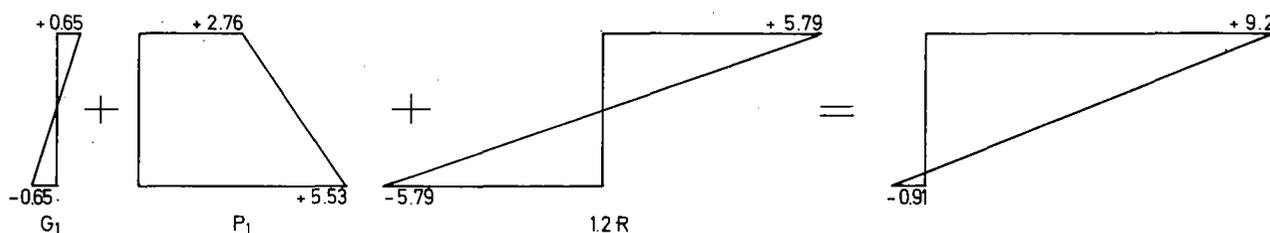
à vide ① Vérification de compression sur la fibre inférieure avec G_2 et P_1



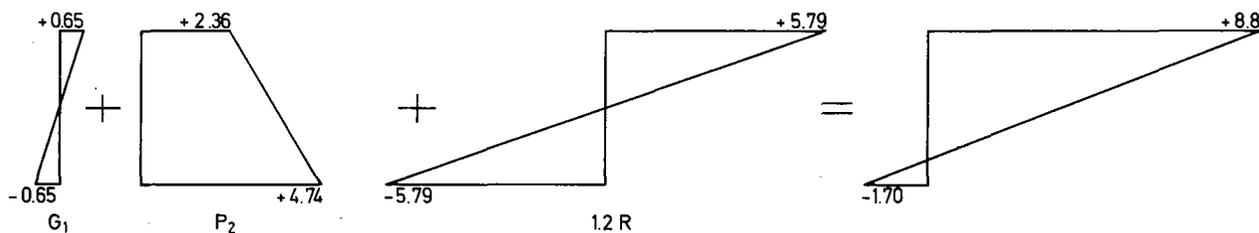
② Vis à vis d'une traction éventuelle sur la fibre supérieure, la sécurité est assurée, car la précontrainte est à peu près centrée; avec G_2, P_2 on a en effet :



en charge ① Vis à vis de la compression sur fibre supérieure avec $G_1; P_1; 1,2 R$



② Traction sur fibre inférieure avec $G_1; P_2; 1,2 R$



2.3.2. Moments généraux d'encastrement sur les poutres principales

On refait un tableau des contraintes comme précédemment :

Fibre \ Actions	G_1	G_2	P_1	P_2	1,2 R
Supérieure	- 0,37	- 0,33	+ 4,31	+ 3,69	- 5,72
Inférieure	+0,37	+ 0,33	+2,46	+ 2,11	+ 5,72

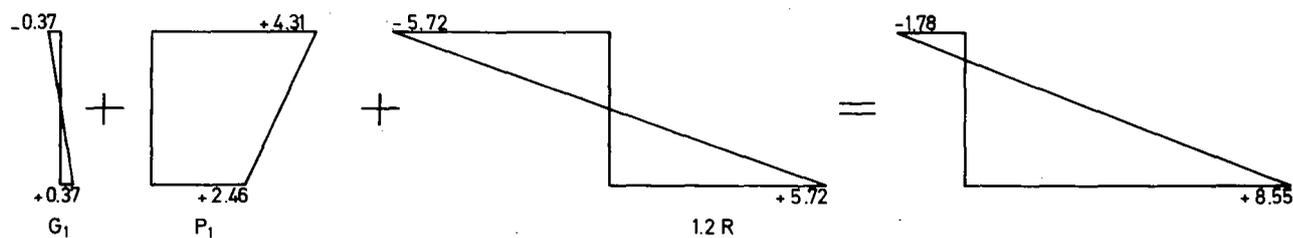
à vide ① Compression sur fibre supérieure (G_2, P_1)

La contrainte due à P_1 est déjà inférieure à la valeur limite. L'addition d'un terme négatif ne sera donc pas plus défavorable.

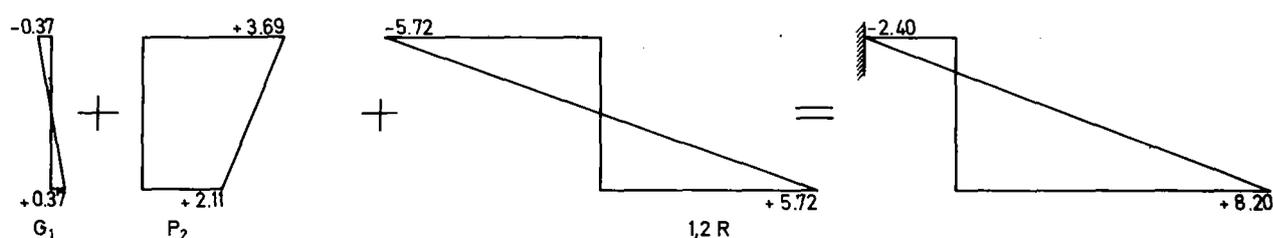
② Traction éventuelle sur fibre inférieure (G_2, P_2)

La précontrainte n'introduit pas de traction : la section reste donc comprimée.

en charge ① Compression sur fibre inférieure G_1 ; P_1 ; $1,2 R$



② Traction fibre supérieure G_1 ; P_2 ; $1,2 R$



2.4. Justification sous Moments locaux

2.4.1. Justification vis à vis de l'état limite d'utilisation

D'après le tableau récapitulatif du paragraphe 1.3., il y a lieu de faire cette justification pour le moment au centre de la dalle dans la direction la moins sollicitée b et pour le moment d'encastrement sur entretoise.

Comme nous avons un hourdis simplement précontraint transversalement, les 2 justifications se feront en Béton Armé sous efforts locaux.

a – au centre

$$M_b = M_{bG} + 1,2 M_{bR}$$

$$M_b = 966 + 1,2 \times 16\,800 = 21\,100 \text{ mN/m}$$

avec des HA 10, $h_t = 18 \text{ cm}$, $Z = 13,6 \text{ cm}$

$$\text{on a } A = \frac{21\,100}{0,136 \times 275 \cdot 10^{-6}} = 0,000564 \text{ m}^2/\text{m} \text{ soit } 5,64 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$\text{c'est à dire } 1 \text{ HA } 10 \text{ tous les } \frac{0,785}{5,64} = 0,14 \text{ m}$$

b – à l'encastrement sur entretoise

$$M_b = -136 - 1,2 \times 48\,100 = -57\,900 \text{ mN/m}$$

avec des HA 14, $h_t = 18 \text{ cm}$, $Z = 13,3 \text{ cm}$

$$\text{on a } A = \frac{57\,900}{0,133 \times 275 \cdot 10^{-6}} = 0,001583 \text{ m}^2/\text{m} \text{ soit } 15,83 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$\text{c'est à dire } 1 \text{ HA } 14 \text{ tous les } \frac{1,54}{15,83} = 0,09 \text{ m}$$

2.4.2. Justification vis à vis de l'état limite de fatigue

Cette justification est à faire sous efforts locaux produits par un camion de 30 t ; le poids du camion n'est à multiplier par aucun coefficient majorateur ou minorateur ou coefficient γ autre que le coefficient de majoration dynamique (annexe VI, art. 9).

Il faut s'assurer alors que la variation de contrainte dans les câbles est inférieure à $0,10 R_g$ ou $0,05 R_g$ suivant que la fréquence maximale annuelle d'application de la charge est de l'ordre de 1 000 ou de 10 000.

Les surtensions sont à estimer à partir des valeurs correspondant aux actions probables de longue durée (art. 25.2.).

Dans le cas présent, nous allons faire ces justifications non pas sous l'effet d'un seul camion B_c mais sous l'effet de 2 camions B_c (pour profiter des calculs d'efforts déjà effectués sous ce cas de charge en 2.1.2. a et 2.1.2. b).

a – Justification au centre de la dalle.

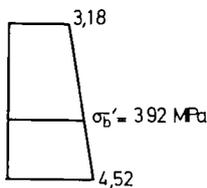
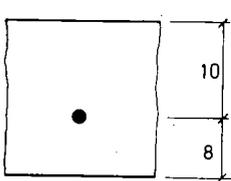
On a :

$$M_{aG} = 3260 \text{ mN/m}$$

$$M_{aR} = 29\,200 \times 1,25 \times 0,8 = 29\,200 \text{ mN/m} \left(= \frac{32\,100}{1,1} \right)$$

$$P = 0,622 \text{ MN}$$

à vide, le diagramme des contraintes probables est donc défini par :



$$\frac{0,622}{0,91 \times 0,1777} \pm (3260 \cdot 10^{-6} - \frac{0,622}{0,91} \times 0,01) \times \frac{0,09}{479 \cdot 10^{-6}}$$

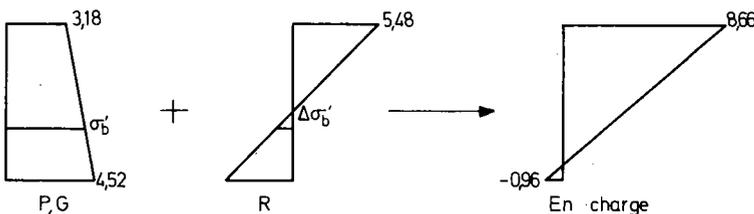
$$= 3,85 \pm 0,67 \text{ MPa}$$

Au niveau des câbles :

$$= 3,85 + \frac{0,67}{9} = 3,92 \text{ MPa}$$

en charge :

$$\Delta \sigma' = \pm \frac{29\,200 \cdot 10^{-6} \times 0,09}{479 \cdot 10^{-6}} = \pm 5,48 \text{ MPa}$$



et, au niveau des câbles :

$$\Delta \sigma'_b = - \frac{5,48}{9} = -0,61 \text{ MPa}$$

On voit qu'en charge la section est partiellement tendue. En toute rigueur, le calcul précédent n'est donc pas valable et l'on devrait refaire un calcul en section fissurée. On peut remarquer, cependant que la contrainte de traction est faible et que par conséquent, l'équilibre de la section fissurée doit être très voisin de celui qu'on a obtenu.

Dans ces conditions :

$$\Delta\sigma_p = -6 \Delta\sigma'_b = 6 \times 0,61 = 3,66 \text{ MPa} < 0,05 R_g = 83 \text{ MPa}$$

La sécurité est donc très largement assurée et ce d'autant plus que le cas de charge que l'on a pris en compte (2 camions B_c) est nettement plus sévère que le cas de charge réglementaire (1 seul camion B_c).

b – Justification à l'encastrement sur la poutre principale.

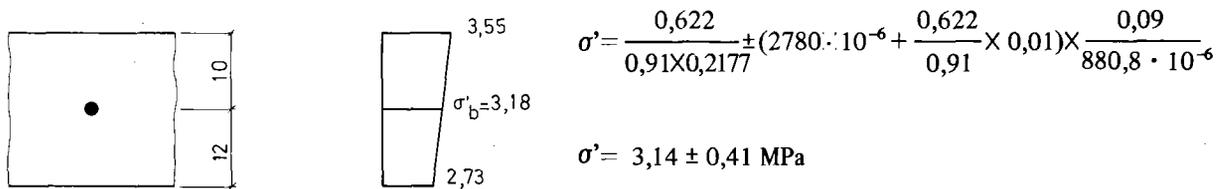
Alors :

$$M_{aG} = 2780 \text{ mN/m}$$

$$M_{aR} = -30\,900 \times 1,25 = -38\,600 \text{ mN/m} \left(= -\frac{42\,500}{1,1} \right)$$

$$P = 0,622 \text{ MN}$$

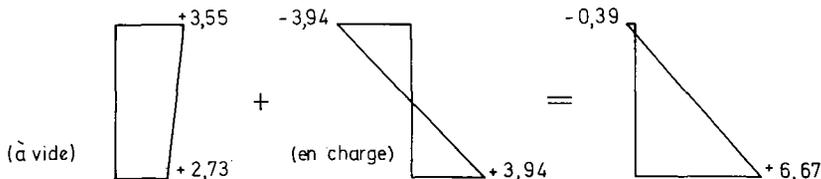
A vide on a donc les contraintes :



Au niveau des câbles : $\sigma'_b = 3,14 + \frac{0,41}{11} = 3,18 \text{ MPa}$

En charge :

$$\Delta\sigma' = \mp \frac{38\,600 \cdot 10^{-6} \times 0,09}{880,8 \cdot 10^{-6}} = \pm 3,94 \text{ MPa}$$



Donc au niveau des câbles : $\Delta\sigma'_b = -\frac{3,94}{11} = -0,36 \text{ MPa}$

Comme précédemment, on peut estimer que le calcul rigoureux, en section fissurée donnerait un diagramme de contraintes très voisin de celui qu'on a obtenu.

D'où : $\Delta\sigma_p = -6 \Delta\sigma'_b = 6 \times 0,36 = 2,16 \text{ MPa}$

Là encore, la condition de sécurité $\Delta\sigma_p \leq 0,05 R_g$ est très largement vérifiée et il semble bien que ce calcul à la fatigue ne sera pratiquement jamais déterminant dans les hourdis de ponts car :

- les contraintes restent presque toujours du côté des compressions sous l'effet d'un seul camion B_c ,
- les câbles sont peu excentrés et subissent donc des variations de tension très limitées.

NOTATIONS

A	: aire d'une section d'acier
A_a	: aire de la section des armatures passives supérieures
A'_a	: aire de la section des armatures passives inférieures
A_p	: aire de la section des armatures de précontrainte supérieures
A'_p	: aire de la section des armatures de précontrainte inférieures
A_t	: somme des aires des sections droites d'un cours d'armatures transversales
B	: Aire d'une section de béton
B_t	: aire d'une section de béton tendu
B_n	: aire d'une section nette de béton
E	: module d'élasticité en général
E_a	: module d'élasticité de l'acier passif
E_p	: module d'élasticité de l'acier de précontrainte
E_{ij}	: module de déformation instantanée à l'âge de j jours
I	: moment d'inertie
I_n	: moment d'inertie nette
K_{fl}	: coefficient de fluage
M	: moment en général
M_{fl}	: moment de fluage
M_G	: moment fléchissant dû au poids propre
$M_{G'}$: moment fléchissant dû aux superstructures
$M_{\Delta\theta}$: moment dû au gradient thermique
M_R	: moment dû aux charges routières d'exploitation
M_H	: moment hyperstatique de précontrainte
M_Q	: moment fléchissant développé par une charge ou action quelconque
M_{QL}	: moment dû à une action de "longue durée"
M_{Qc}	: moment dû à une action de "courte durée"
\mathcal{M}	: moment réduit au niveau des aciers de précontrainte
$\frac{\mathcal{M}_{ul}}{\mathcal{M}_{ul}}$: moment de calcul ultime (réduit au niveau des aciers de précontrainte)
$\overline{\mathcal{M}}_{ul}$: moment limite ultime
N	: effort normal
N_{Bt}	: résultante des contraintes de traction dans la section droite.

P	: valeur probable de la précontrainte
P_1, P_2	: valeur caractéristique de la précontrainte respectivement maximale et minimale
Q	: action ou charge quelconque
Q_{L1}, Q_{L2}	: action de "longue durée" défavorable (favorable)
Q_{c1}, Q_{c2}	: action de "courte durée" défavorable (favorable)
Q_{Ac}	: action accidentelle
R_g	: contrainte de rupture garantie de l'acier de précontrainte
S	: sollicitation quelconque ou moment statique
S_{QL}	: sollicitation due aux actions de longue durée seules
$S_{QL} Q_c$: sollicitation due aux actions de longue durée et de courte durée
T_g	: valeur garantie de la limite d'élasticité conventionnelle d'un acier de précontrainte
T_o	: contrainte maximale sous l'ancrage, à la mise en tension
V	: effort tranchant
Z	: excentricité par rapport aux aciers de précontrainte de la résultante de compression du béton à l'état limite ultime.
b_o	: épaisseur brute d'âme
b_n	: épaisseur nette d'âme
d	: distance d'une armature à la fibre supérieure
d'	: distance d'une armature à la fibre inférieure
e	: excentricité par rapport au centre de gravité de la section
g_1, g_2	: densités probables caractéristiques maxi et mini de la charge de poids propre.
g'_1, g'_2	: densités probables caractéristiques maxi et mini de la charge de superstructures
$z = \frac{I}{S}$: bras de levier du couple élastique
$\Delta\sigma_d$: perte de tension différée
$\Delta\sigma_e$: perte de déformation instantanée du béton
$\Delta\sigma_g$: perte par frottement
$\Delta\sigma_r, \Delta\sigma_{fl}, \Delta\sigma_p$: perte par retrait, fluage, relaxation
$\Delta\sigma_p$: perte de tension
$\Delta\sigma_i$: perte de tension instantanée
$\Delta'\sigma_{Pk}$: surtension d'un acier de précontrainte (de contrainte caractéristique σ_{pk}) accompagnant le retour à 0 de la contrainte du béton à son niveau.
$\Delta''\sigma_{Pk}$: surtension de l'acier de précontrainte au-delà de la décompression du béton.

- $\Delta\sigma_{P_k} = \Delta'\sigma_{P_k} + \Delta''\sigma_{P_k}$: surtension totale de l'acier de précontrainte.
 $\Delta'\epsilon_{P_k}$: complément d'allongement d'un acier de précontrainte (de contrainte caractéristique σ_{P_k}) accompagnant le retour à 0 de la contrainte du béton à son niveau.
 $\Delta''\epsilon_{P_k}$: complément d'allongement de l'acier de précontrainte au-delà de la décompression du béton
 $\Delta\epsilon_{P_k} = \Delta'\epsilon_{P_k} + \Delta''\epsilon_{P_k}$: complément d'allongement total de l'acier de précontrainte

- ϵ : allongement
 $\epsilon_a, \epsilon_{ae}, \epsilon_{aul}$: allongements des aciers passifs
 ϵ_p : allongement des aciers de précontrainte
 $\epsilon'_b, \epsilon'_{bul}$: raccourcissements du béton
 ϵ_r : raccourcissement dû au retrait
 δ : excentrement du centre de pression par rapport aux aciers de précontrainte
 σ_a : contrainte de tension d'une armature passive
 $\bar{\sigma}_a$: contrainte limite d'une armature passive
 σ_j : résistance caractéristique à la compression du béton âgé de j jours
 σ_t : résistance caractéristique à la traction du béton âgé de j jours
 σ'_{bj} : contrainte probable du béton à j jours
 σ'_b : contrainte finale probable du béton
 σ'_{bL_k} : contrainte du béton au niveau des câbles sous l'effet des seules actions de longue durée, la précontrainte ayant sa valeur caractéristique P_k ($k = 1$ ou 2)
 $\bar{\sigma}'_{bul}$: contrainte limite du béton à l'état ultime
 σ_{Po} : contrainte de tension d'une armature "à l'origine" (sous ancrage, à la mise en tension)
 σ_{Pi} : contrainte de tension initiale (après blocage de l'ancrage fonction de l'abscisse).
 σ_p : contrainte de tension probable
 σ_{P_k} : ($k = 1$ ou 2) contrainte de tension caractéristique maximale et minimale
 $\bar{\sigma}_p$: contrainte limite d'une armature active
 τ : contrainte de cisaillement du béton.