CENTRE DE HAUTES ETUDES DE LA CONSTRUCTION

C.H.E.C.

OUVRAGES D'ART

APPUIS ET FONDATIONS

J. MATHIVAT

Mars 1976

SOMMAIRE

CHAPITRE I

APPUIS ET FONDATIONS

NOTIONS DE BASE

1- APPUIS ET FONDATIONS - DEFINITIONS

Les appuis sont les éléments d'une structure destinés à transmettre les charges appliquées au terrain sur lequel elle repose. Ce sont, par exemple, les piles ou les culées d'un pont, les poteaux ou les murs-porteurs d'un bâtiment.

La fondation est la partie de l'appui en contact direct avec le sol.

L'étude des fondations revêt deux aspects complémentaires qui sont :

- l'analyse des contraintes au contact entre la fondation et le sol, c'est-à-dire la détermination de la force portante de la fondation. Ceci revient à vérifier que les charges appliquées à la fondation, multipliées par un certain coefficient de sécurité, ne provoquent pas la rupture d'ensemble du terrain.
- l'analyse des déplacements du sol, c'est-à-dire l'estimation de la déformabilité de la fondation qui doit demeurer compatible avec la rigidité de la structure.

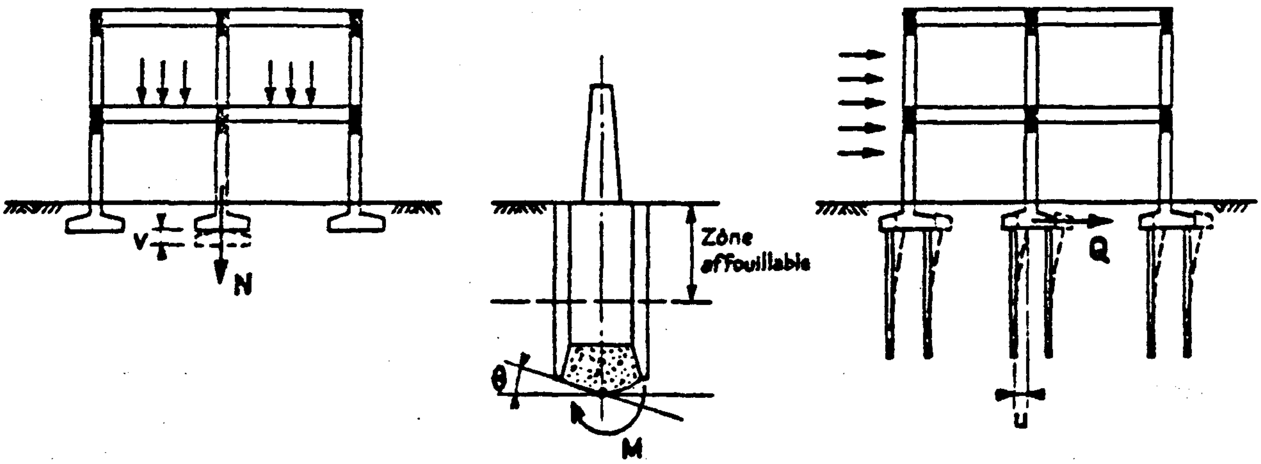
Ces deux aspects ne sont d'ailleurs pas indépendants. En effet, dans le calcul d'une structure on doit tenir compte de la déformabilité des appuis, que ceux-ci soient solidaires mécaniquement de la structure et participent à sa flexion (portiques) ou qu'ils en soient indépendants (poutres continues), leurs déformations n'intervenant alors que dans la répartition des efforts verticaux (et parfois horizontaux) appliqués à l'ouvrage.

On ne s'intéresse trop souvent qu'au déplacement vertical de la fondation, appelé tassement, alors que la rotation et le déplacement horizontal interviennent également de façon notable dans la déformabilité des appuis et par conséquent dans la détermination des efforts qui leur sont transmis.

L'effet des tassements est surtout prépondérant dans les structures hyperstatiques très rigides qui sont sensibles aux dénivellations relatives des appuis. Mais il serait inexact de négliger la rotation des fondations massives et profondes, du type colonne ou caisson, ainsi que le déplacement horizontal des fondations sur pieux ou sur puits.

Dans certains cas d'ailleurs, le dimensionnement d'une fondation peut être limité par sa déformabilité et non par sa portance. Nous citerons comme exemple les colonnes de fondation des pylones du pont de Brotonne dont les dimensions auraient pu être réduites si l'on n'avait pas craint d'augmenter la souplesse de l'appui et les mouvements qui en auraient résulté au niveau du tablier.

./.



2- <u>CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES D'UNE FONDATION - NOTATIONS</u>

Nous utiliserons dans la suite des notations suivantes pour définir les caractéristiques géométriques d'une fondation :

D : profondeur de la base de la fondation au dessous de la surface libre du terrain environnant ou encastrement de la fondation.

B : plus petite dimension transversale de la surface d'appui (largeur de la fondation)

L : autre dimension transversale de la surface d'appui (longueur de la fondation) $L > B$

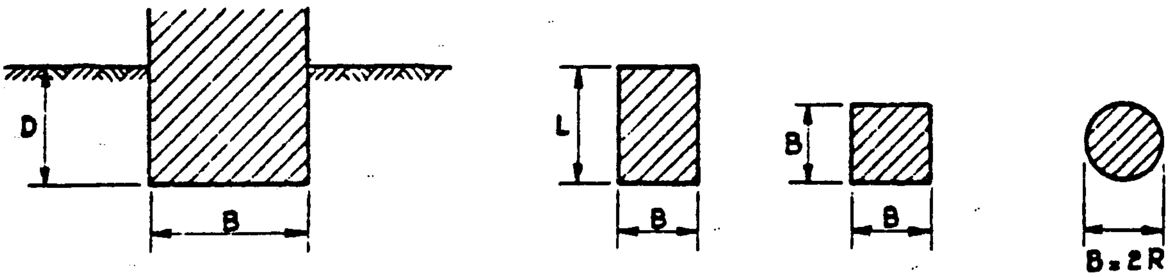
A : aire de la surface d'appui

P : périmètre de la surface d'appui

R_m : rayon moyen de la fondation, rapport de la surface au périmètre

$$R_m = \frac{A}{P}$$

Section d'appui



rectangulaire carrée circulaire

Si L ∞ $R_m = \frac{B}{2}$

$R_m = \frac{BL}{2\,(B + L)}$ $R_m = \frac{B}{4}$ $R_m = \frac{R}{2}$

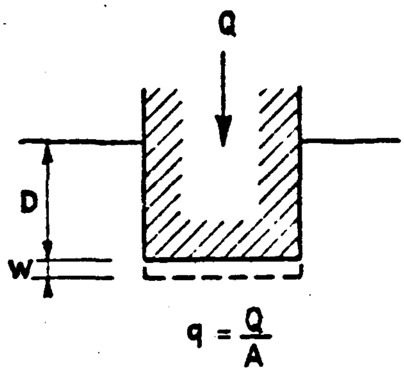
3- NOTIONS DE CHARGES ADMISSIBLES ET DE CHARGES LIMITES. CRITERES DE POINCONNEMENT (PORTANCE) ET DE TASSEMENT (DEFORMABILITE)

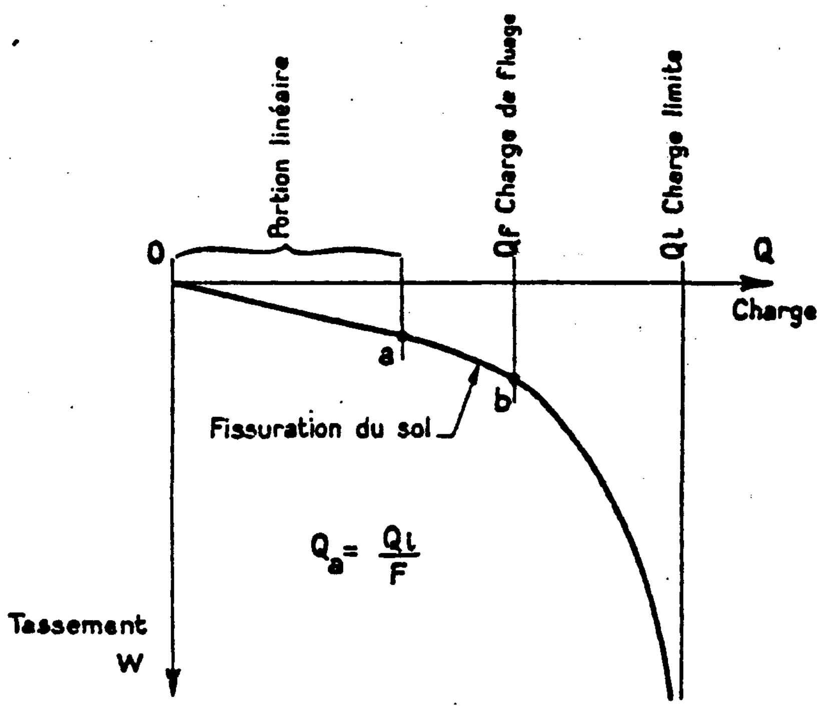
Considérons une fondation quelconque plus ou moins enterrée dans un sol homogène et appliquons lui une charge croissante Q. Sous l'effet de Q la fondation tasse. Au début les tassements sont approximativement proportionnels aux charges, puis à partir d'une certaine valeur de Q, la courbe de chargement s'incurve rapidement jusqu'à donner des enfoncements très importants pour des variations de charge très faibles : Q tend alors vers une valeur limite appelée charge limite ou charge de rupture . . Elle est désignée par Q_l ou q_l selon qu'il s'agit d'efforts totaux ou unitaires.

./.

En général, on fait travailler les fondations, éléments relativement rigides, et qui ont eux-mêmes à supporter une superstructure plus ou moins rigide, dans la première zone de la courbe de chargement approximativement linéaire (oa), pour laquelle les tassements restent assez faibles, en tout cas contrôlables et à peu près réversibles.

Le coefficient de réduction à apporter en service à la charge de rupture est désigné par F; on l'appelle communément coefficient de sécurité. Ce coefficient est généralement égal à 3 (sauf pour le terme de frottement latéral des pieux pour lequel il est égal à 2).





La charge de fluage Q_f marque le seuil des tassements croissant rapidement. On lui applique des coefficients de sécurité plus faibles (1,25 à 1,6).

On appelle charge admissible Q_a le quotient de la charge de rupture par le coefficient de sécurité. La charge admissible est la charge qu'on s'impose de ne pas dépasser en service.

./.

$$Q_a = \frac{Q_1}{F}$$

La condition précédente constitue le <u>critère de poinçonnement</u> ou <u>portance</u>.

On obtient donc ainsi une première limitation de la charge de service de la fondation. Une deuxième est constituée par le <u>critère de tassement ou de déformabilité</u>.

On se fixe la valeur du <u>tassement admissible</u> de la fondation. La difficulté vient de ce qu'une superstructure est généralement plus sensible aux <u>tassements différentiels</u> de ses différents éléments de fondation qu'aux <u>tassements absolus</u> et que la relation entre ces deux sortes de tassements est souvent imprécise.

On vérifie ensuite que la charge $Q_a = \frac{Q_1}{F}$ ne donne pas de tassement supérieur à ce tassement admissible. S'il n'en est pas ainsi on limite la valeur de Q à une valeur inférieure à Q_a.

Pour les fondations de <u>faible largeur</u> (semelles, pieux), le critère le plus important est le <u>critère de poinçonnement</u>. C'est même le seul applicable aux pieux pris isolément.

Pour les fondations de très grande largeur (radiers), le <u>critère de tassement</u> est prépondérant. Il concerne également les groupes de pieux. On notera que la charge de rupture, et par conséquent la <u>force portante</u>, ne sont pas des <u>propriétés intrinsèques du sol</u>; elles sont fonction des caractéristiques du <u>système formé d'une fondation et de son sol d'appui</u>.

./.

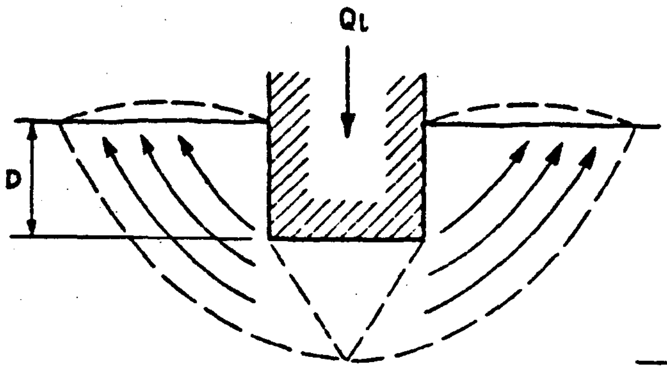
4- CLASSIFICATION DES FONDATIONS - PROFONDEUR CRITIQUE - FONDATIONS SUPERFICIELLES ET FONDATIONS PROFONDES - NOMENCLATURE DES PRINCIPALES FONDATION

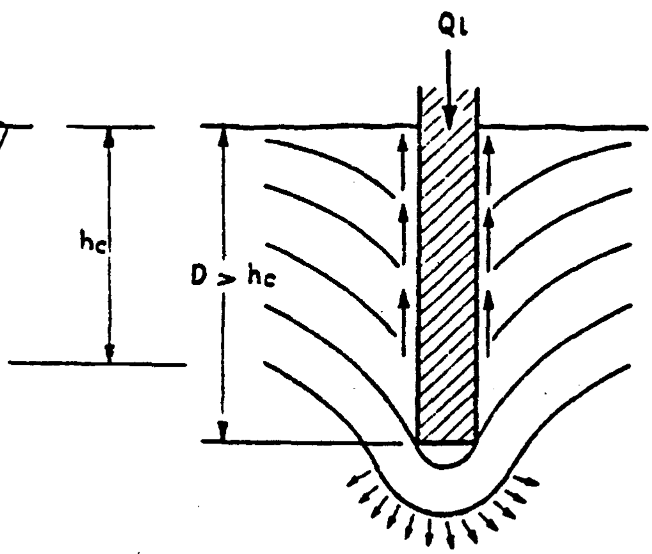
Considérons une fondation faiblement encastrée dans le terrain environnant. Lorsque la charge appliquée à la fondation varie jusqu'à sa valeur limite, on peut observer que la rupture s'accompagne de déformations importantes de la surface du sol (gonflement et bourrelets de part et d'autre de la fondation). On dit qu'il s'agit d'une fondation superficielle. La charge limite Q_l augmente à peu près proportionnellement à la profondeur D.

Au-delà d'une certaine profondeur h_c dite profondeur critique, la rupture est due essentiellement à un refoulement du sol dans la masse, sans que la surface en soit affectée. On dit alors qu'il s'agit d'un mécanisme de fondation profonde.

On n'observe plus d'augmentation sensible de la charge limite Q_l avec la profondeur.

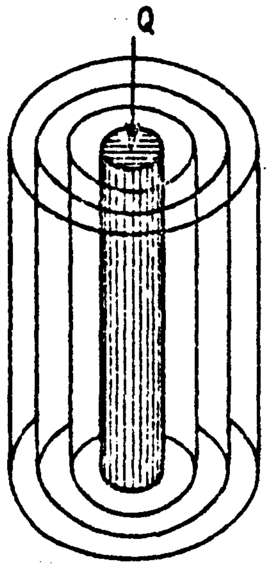
Fondation superficielle | Fondation profonde





Profondeur critique : h_c

On voit que dans le cas d'une fondation profonde la résistance due au frottement du sol le long du fût, au frottement latéral, vient s'ajouter à la résistance due au poinçonnement de la base, alors que ce terme est faible et généralement négligé dans le cas des fondations superficielles. Le phénomène de frottement latéral est fort différent du phénomène de poinçonnement : il s'agit essentiellement d'un cisaillement simple d'anneaux de sol concentriques et les caractéristiques de résistance de l'anneau situé immédiatement au contact du fût - qui est le plus sollicité - sont déterminantes.



On peut donc classer les fondations, suivant le mécanisme du transfert de la charge appliquée au sol d'appui, en :

- fondations superficielles, dont la charge est entièrement reportée au sol par pression sous la base, sans intervention des frottements latéraux (ou quand leur intervention est négligeable),

- fondations profondes, dont la charge est reportée au sol par pression sous la base et frottement sur le fût.

La distinction entre fondations superficielles ($D = 0$) ou semi-enterrées ($D \neq 0$) parait inutile, car il n'existe guère de semelles absolument superficielles. En pratique, une fondation peut être considérée comme superficielle quand sa profondeur n'excède pas quatre fois sa largeur

$$D \leqslant 4B$$

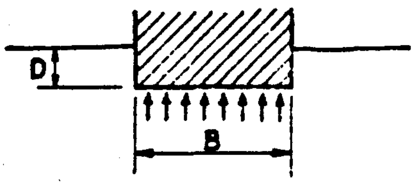
./.

En fait, quand le sol est inaffouillable et présente des caractéristiques mécaniques suffisantes, on peut tenir compte des frottements latéraux même si la profondeur de la fondation est inférieure à sa largeur ($D < B$).

Une fondation est généralement située à une profondeur supérieure à celle du gel normal, appelée garde au gel, qui est comprise en France entre 0,5 m. et 1 m. Elle peut atteindre 1,5 m en haute altitude.

On néglige enfin habituellement les couches superficielles du sol, appelées mort-terrain, dans la détermination de la portance et de la déformabilité de la fondation.

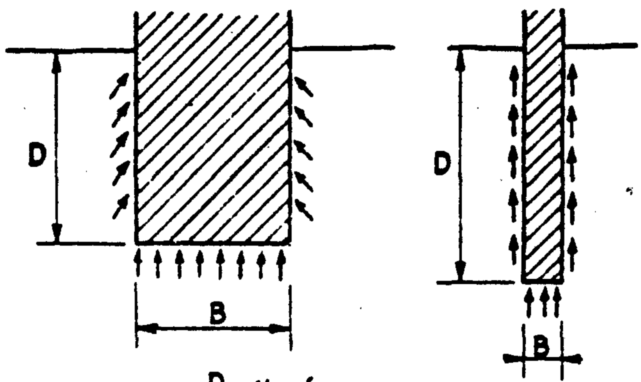
Fondation superficielle



$\frac{D}{B}$ faible

$D < 4\ B$

Fondations profondes



$\frac{D}{B}$ élevé

Parmi les fondations profondes , on distingue aussi parfois entre :

- fondations profondes massives comme les caissons ou les colonnes;
- fondations profondes discontinues, comme les systèmes de pieux.

./.

Les fondations superficielles, quant à elles, se composent de semelles et de radiers.

Les semelles sont de dimensions limitées. Si elles ont la forme de dalles rectangulaires, carrées ou circulaires, elles constituent alors des semelles isolées. Si elles ont une grande longueur L ($L > 5B$) ce sont des semelles filantes (supportant un mur ou une paroi).

Les radiers ont des dimensions notables aussi bien en largeur qu'en longueur. Ils s'imposent :

- si la résistance du sol est faible
- si les ouvrages transmettent des charges importantes conduisant à des semelles dont la surface est voisine de la moitié de la construction.

Ils sont parfois nécessaires pour constituer un fond, étanche ou non, à la construction (réservoirs, sous-sol de bâtiment, par exemple). Ils peuvent alors être fondés sur pieux et relèvent, dans ce cas, des fondations profondes.

Nous donnons à la page suivante un tableau schématique des principaux types de fondations.

./.

NOMENCLATURE DES PRINCIPALES FONDATIONS

(1) **FONDATIONS SUPERFICIELLES**

- Semelles superficielles D = 0
- Semelles semi-enterrées D ≠ 0
- Radier

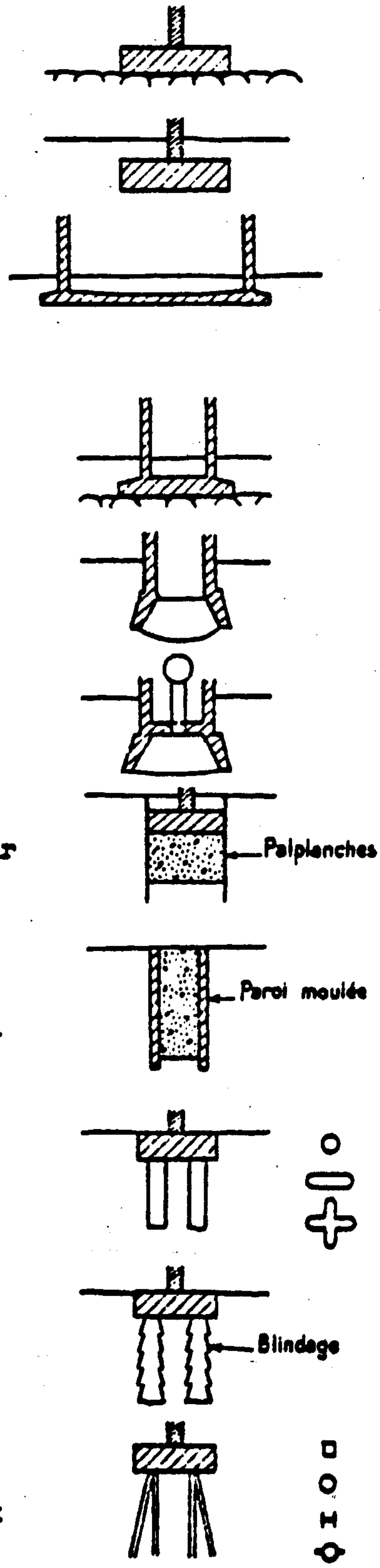
(2) **FONDATIONS PROFONDES**

FONDATIONS MASSIVES

- Caissons posés
- Caissons havés à l'air libre ou dans l'eau
- Caissons foncés à l'air comprimé
- Massif de fondation à l'intérieur d'une enceinte de palplanches
- Colonne massive à l'intérieur d'une enceinte de palplanches ou d'une paroi moulée

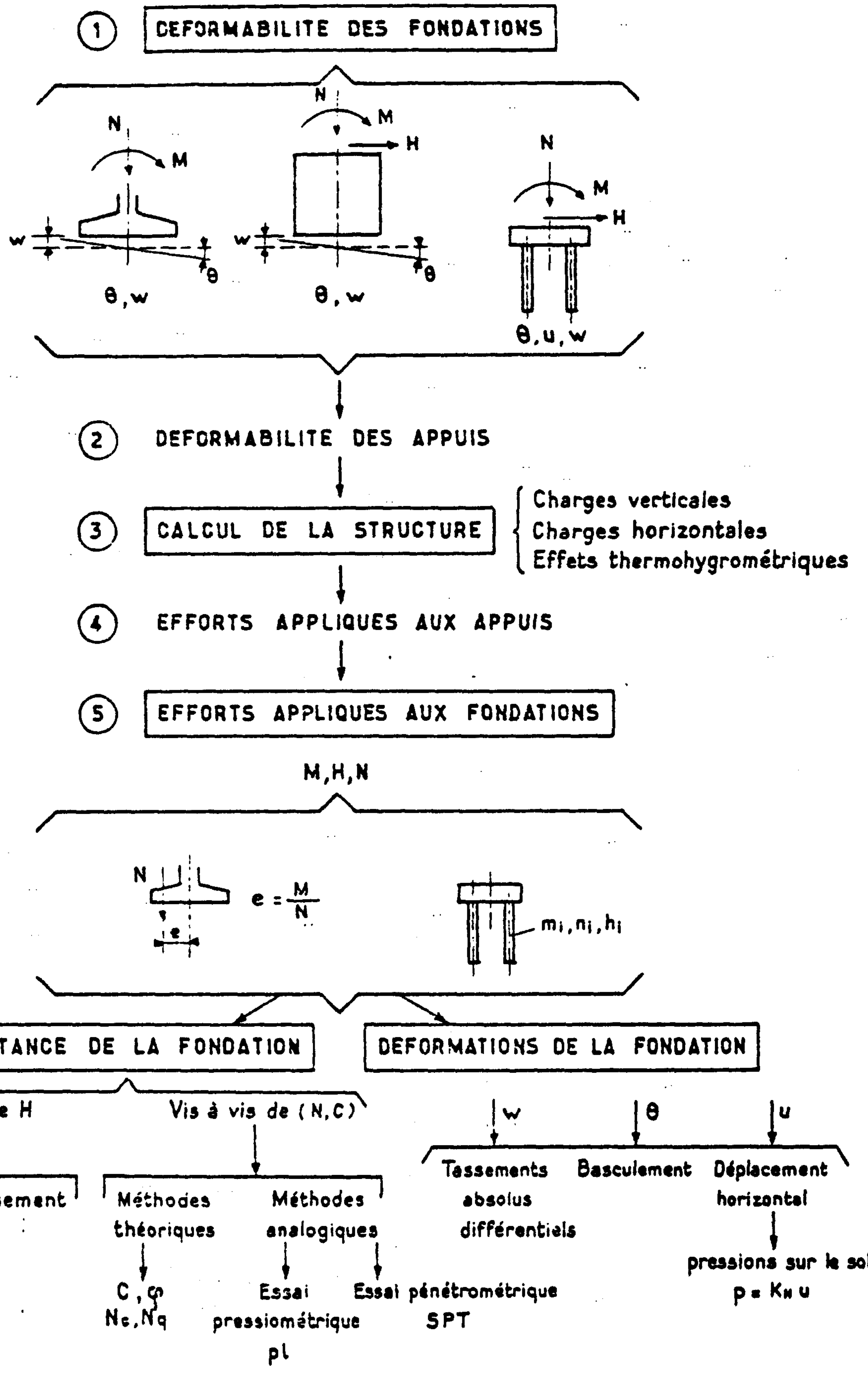
FONDATIONS DISCONTINUES

- Puits ou parois moulées dans le sol. Barrettes, croix
- Puits marocains exécutés à la main à l'air libre
- Pieux battus ou forés de petits diamètres, inclinés et verticaux



8- SCHEMA DE CALCUL D'UNE FONDATION

Le schéma de calcul d'une fondation est résumé ci-après :



CHAPITRE II

DEFORMABILITE DES APPUIS ET DES FONDATIONS

1- DEFORMABILITE DU SOL

La déformabilité du sol intervient à deux stades de l'étude des fondations.

Dans un premier temps, il est nécessaire de déterminer la déformabilité des fondations et des appuis avant de procéder au calcul de la structure. A ce stade, il est souhaitable d'assimiler le sol à un milieu élastique afin que son comportement soit homogène avec celui du matériau dans lequel est construite la structure, auquel on applique généralement les lois de l'élasticité. La méthode la plus couramment utilisée revient à assimiler le sol à un liquide dense, c'est-à-dire à admettre en tout point de contact avec la fondation, la proportionnalité entre les pressions et les déplacements. Cette méthode, due à Westergaard , est assurément grossière mais suffisante pour calculer les efforts appliqués à la fondation.

Dans une seconde étape, il faut estimer les déformations des fondations sous les charges de service, afin de s'assurer que ces déformations sont compatibles avec la rigidité de la structure et n'entrainent pas des pressions sur le sol supérieures à celles qu'il peut tolérer en raison de ses caractéristiques mécaniques. A défaut de méthode plus élaborée, l'hypothèse de Westergaard est encore utilisée pour le calcul des déformations des fondations profondes, qu'elles soient massives ou discontinues.

./.

On évite toutefois de l'employer pour la détermination des déformations verticales des fondations ou tassements. Ces derniers dépendent en effet non seulement des pressions de contact entre la face inférieure de la fondation et le sol, mais aussi de la distribution des pressions effectives au sein du massif de terrain sous-jacent.

L'évaluation des tassements se fait donc en assimilant le terrain à une superposition de couches élémentaires, caractérisées chacune par un module oedométrique et soumises à des pressions verticales obtenues à partir de la répartition de Boussinesq.

Nous nous limiterons dans la suite à la détermination de la déformabilité des fondations, l'estimation des tassements faisant l'objet d'un chapitre ultérieur.

2- RAIDEUR D'UN SOL DE FONDATION, HYPOTHESE DE WESTERGAARD, MODULE DE REACTION

On appelle module de réaction ou coefficient de raideur (ou coefficient de ballast), le rapport de la pression de contact p en un point de l'interface de la fondation et du sol avec le déplacement correspondant W, soit :

$$K_s = \frac{p}{W} \quad \text{ou} \quad \boxed{p = K_s\, W}$$

La méthode de Westergaard est basée sur l'hypothèse qu'en tout point de contact entre le sol et la fondation les déplacements sont proportionnels à la pression, c'est-à-dire que K_s est constant.

Le coefficient K_s a les dimensions d'un poids spécifique et s'exprime en général en kg/cm3 ou en t/m3 (ou bar/cm)

$$1 \text{ kg/cm3} = 10^3 \text{ t/m3}$$

L'hypothèse de Westergaard serait exacte si le sol pouvait être assimilé à une série de ressorts indépendants accolés. En fait, il n'en est rien, parce que le tassement en un point est provoqué, non

./.

seulement par les charges directes, mais encore par les charges agissant au voisinage.

D'autre part, les sols n'ont un comportement d'apparence élastique que dans un domaine limité.

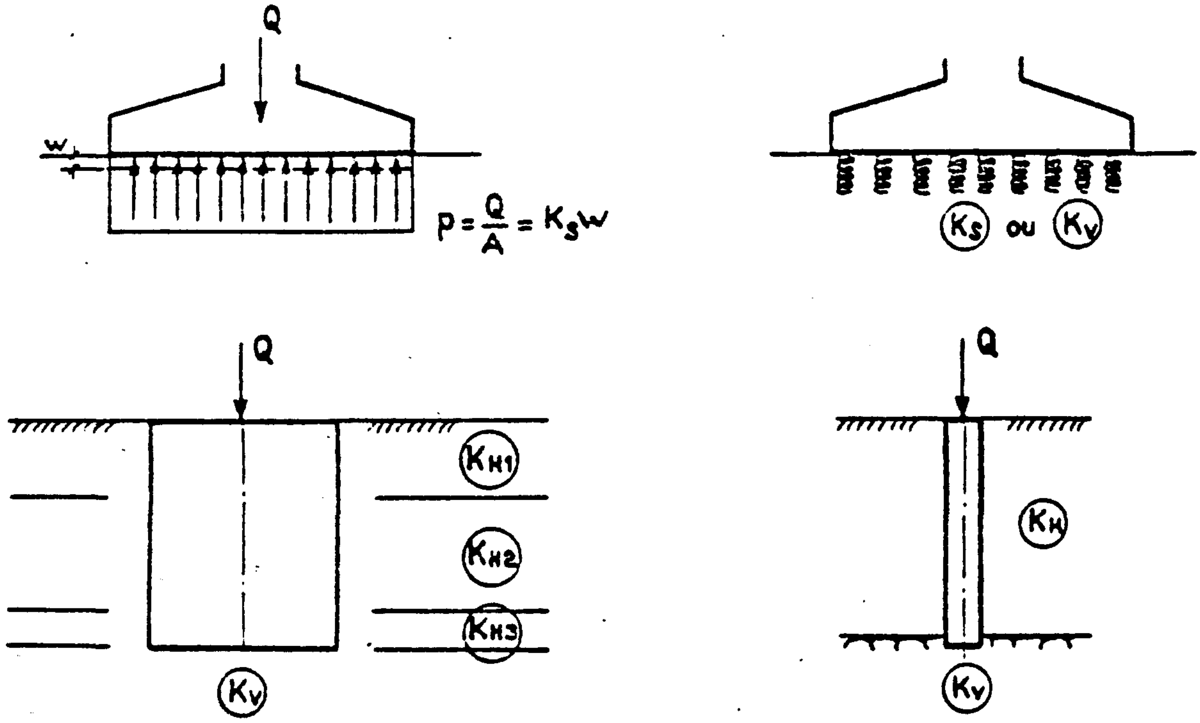
Cette notion est cependant applicable pour l'étude en service de l'action réciproque d'un sol et de la structure qui le charge, puisqu'on est assez loin des charges de rupture (la méthode de Westergaard est applicable si la pression de contact demeure inférieure à la moitié de la contrainte de rupture : $p \leqslant \frac{q1}{2}$), à condition que la valeur du coefficient K_s tienne compte des dimensions réelles de la surface de contact. On définit ainsi deux coefficients de raideur :

- l'un pour une semelle étalon de dimension constante, soit un carré de 0,30 m (un pied) de côté; on le désigne par K_{s1}, c'est un coefficient unitaire ne dépendant que du sol.
- l'autre calculé pour chaque dimension de semelle à partir de K_{s1}. On le désigne par K_s. Il dépend à la fois du sol et de la fondation.

Dans le cas d'une fondation profonde, on distinguera deux modules de réaction : le module de réaction verticale K_V du terrain situé sous la base de la fondation ($K_V = K_S$) et le module de réaction horizontale K_H du terrain entourant la fondation qui peut prendre plusieurs valeurs selon la nature des horizons traversés.

La valeur du module de réaction du sol peut être obtenue soit à partir d'un essai de chargement (essais de plaque), soit à partir d'essais pressiométriques.

./.



3- VALEURS USUELLES DE K_{s1} - VARIATIONS DU MODULE DE REACTION AVEC LA DIMENSION DE LA FONDATION

3.1- Valeurs usuelles de K_{s1}

A défaut de données expérimentales réelles, on peut utiliser des valeurs moyennes proposées par Terzaghi. Elles sont liées, pour les sables, à la densité sèche et, pour les argiles, à la résistance à la compression simple.

Sols sans cohésion - sables

Consistance du sable		Lâche	Moyenne	dense
densité sèche t/m3		1,3	1,6	1,9
K_{S1} kg/cm3	sable sec ou humide	1,3 (0,6 à 1,9)	4 (1,9 à 9,6)	16 (9,6 à 3[illegible])
	sable noyé	0,8	2,5	10

Sols cohérents - argiles

Consistance de l'argile	Raide	Très raide	Dure
Résistance à la compression kg/cm2	1 à 2	2 à 4	> 4
K_{S1} kg/cm3	1,5 à 3,5	3,5 à 7	> 7

3.2- Variation du coefficient de raideur avec la dimension de la fondation (semelles)

- Sols sans cohesion - sables

K_s ne dépend pratiquement que de la largeur B de la semelle.

Il est donné par :

$$\boxed{K_s = K_{s1} \left(\frac{B + 0,30}{2\,B} \right)^2} \quad \text{(B en mètres)}$$

Cette formule est due à Terzaghi. Des essais récents effectués aux E.U. ont montré que le dénominateur 2B devrait être remplacé par 2,5 B (Formule de Lacroix).

- Sols cohérents

K_s dépend à la fois de la largeur B et de la longueur L de la semelle.

Il est donné par :

$$\boxed{K_s = K_{S1} \times \frac{0,30}{B} \quad \frac{2 + \frac{B}{L}}{3}} \quad \text{(B en mètres)}$$

ou $K_s = K_{S1} \times \dfrac{0,30}{B} \times \alpha$

α ayant les valeurs ci-dessous en fonction de $\frac{B}{L}$:

$\frac{B}{L}$	1	0,67	0,50	0,33	0,25	0,20	0,10	0
α	1	0,89	0,83	0,78	0,75	0,73	0,70	0,67

Pour une semelle filante $\frac{B}{L} = 0$ $\qquad \alpha = 0,67$

$$\boxed{K_S = K_{S1} \times \frac{0,20}{B}}$$

4- DETERMINATION DES MODULES DE REACTION DU SOL A PARTIR D'ESSAIS PRESSIOMETRIQUES

(on pourra se référer aux documents MENARD : Normes pressiométriques, Notice spéciale N° 2)

4.1- Module de réaction verticale K_v

On adoptera la relation ci-dessous proposée par MENARD, déduite directement des formules de tassements pressiométriques.

$$\boxed{K_v = \frac{9\,E}{\alpha\ B\ \lambda' + 1{,}5\,(1+\nu)\,B_o\left(\lambda\,\frac{B}{B_o}\right)^{\alpha}}}$$

où : α désigne le coefficient de structure du sol

B_o la largeur d'un massif de référence (en général 30 cm pour l'essai pressiométrique standard)

B la largeur du massif réel

ν le coefficient de Poisson ($\nu = 1/3$)

λ et λ' des coefficients de forme (domaines isotropiques et déviatoriques)

Le tableau ci-dessous donne les valeurs à prendre pour le coefficient α :

Type	Tourbe	Argile		Limon		Sable		Sable et gravier		Type	Roche
	α	E/p_l	α	E/p_l	α	E/p_l	α	E/p_l	α		α
surconsolidé ou très serré	-	> 16	1	> 14	2/3	> 12	1/2	> 10	1/3	très peu fracturé	2/3
normalement consolidé ou normalement serré	1	9.16	2/3	8.14	1/2	7.12	1/3	6.10	1/4	normal	1/2
sousconsolidé altéré et remanié ou lâche	-	7.9	1/2	5.8	1/2	5.7	1/3		-	très fracturé	1/3
										très altéré	2/3

Les coefficients λ et λ' dépendent des dimensions B et L de la fondation et sont tirés de l'abaque de la page suivante.

4.2- Module de réaction horizontal K_H

Dans le cas d'un sol homogène, le module de réaction horizontal K_H est donné par la relation :

$$\boxed{K_H = \frac{6\,E}{\alpha\,B + (1+\nu)\,B_0\,\left(2{,}7\,\frac{B}{B_0}\right)^{\alpha}}}$$

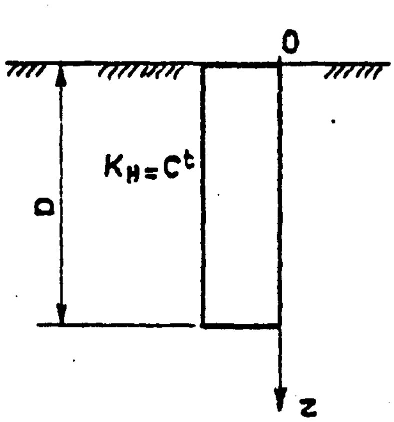
(cf Abaque dans le cas d'un pieu) (page II.9)

avec les mêmes notations que précédemment.

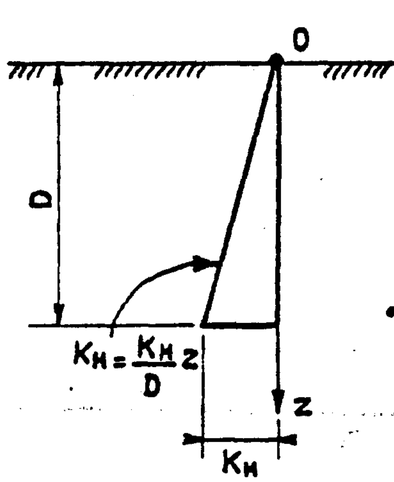
Le problème se pose souvent de savoir si le module de réaction horizontal K_H doit être considéré comme constant sur la hauteur du terrain ou croissant linéairement avec la profondeur.

Le second schéma convient surtout pour les sols pulvérulents, ainsi que pour les limons et tourbes normalement consolidés. Au contraire, pour les sols cohérents, le schéma d'un module constant est plus réaliste.

Sols cohérents



Sols pulvérulents

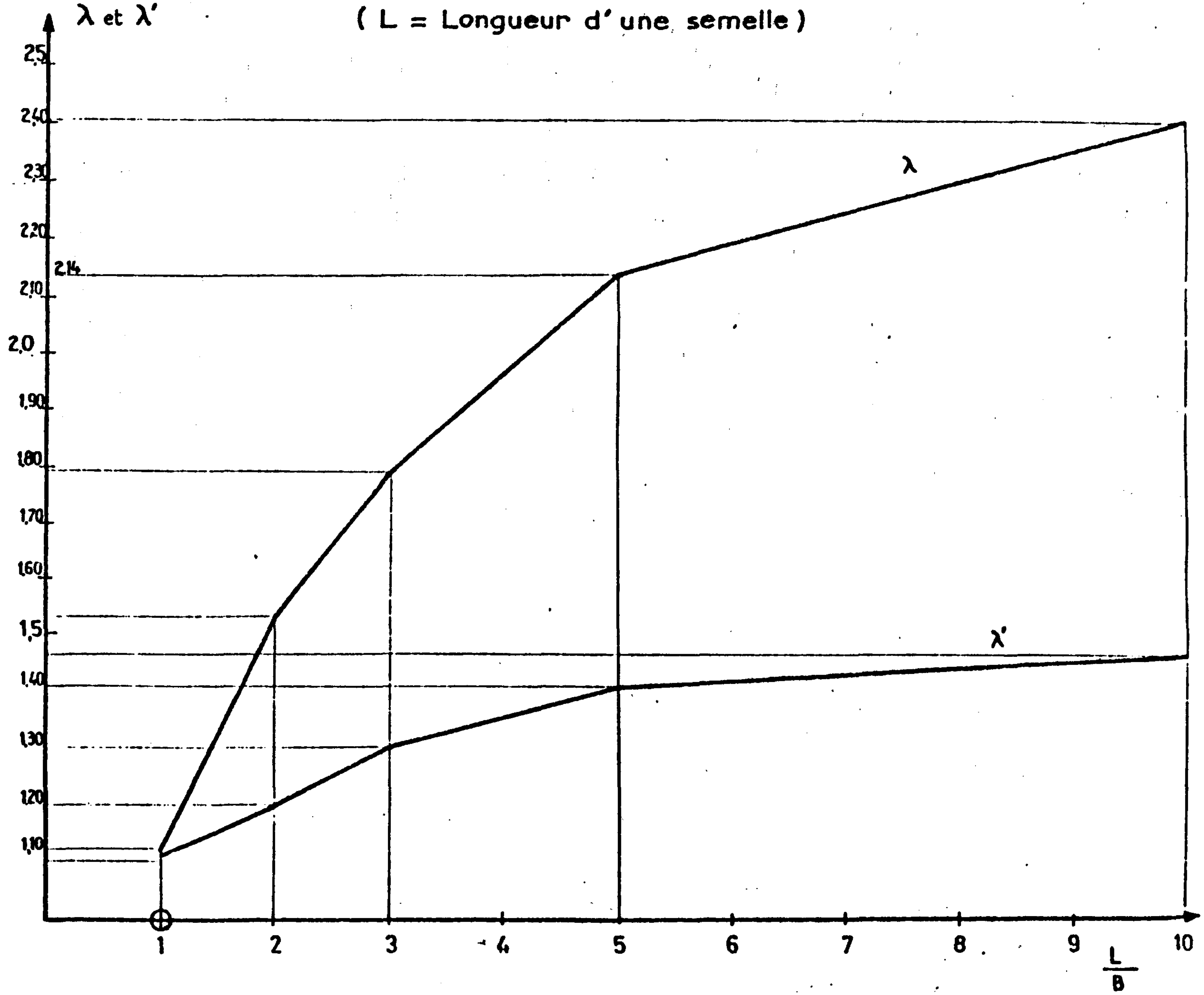


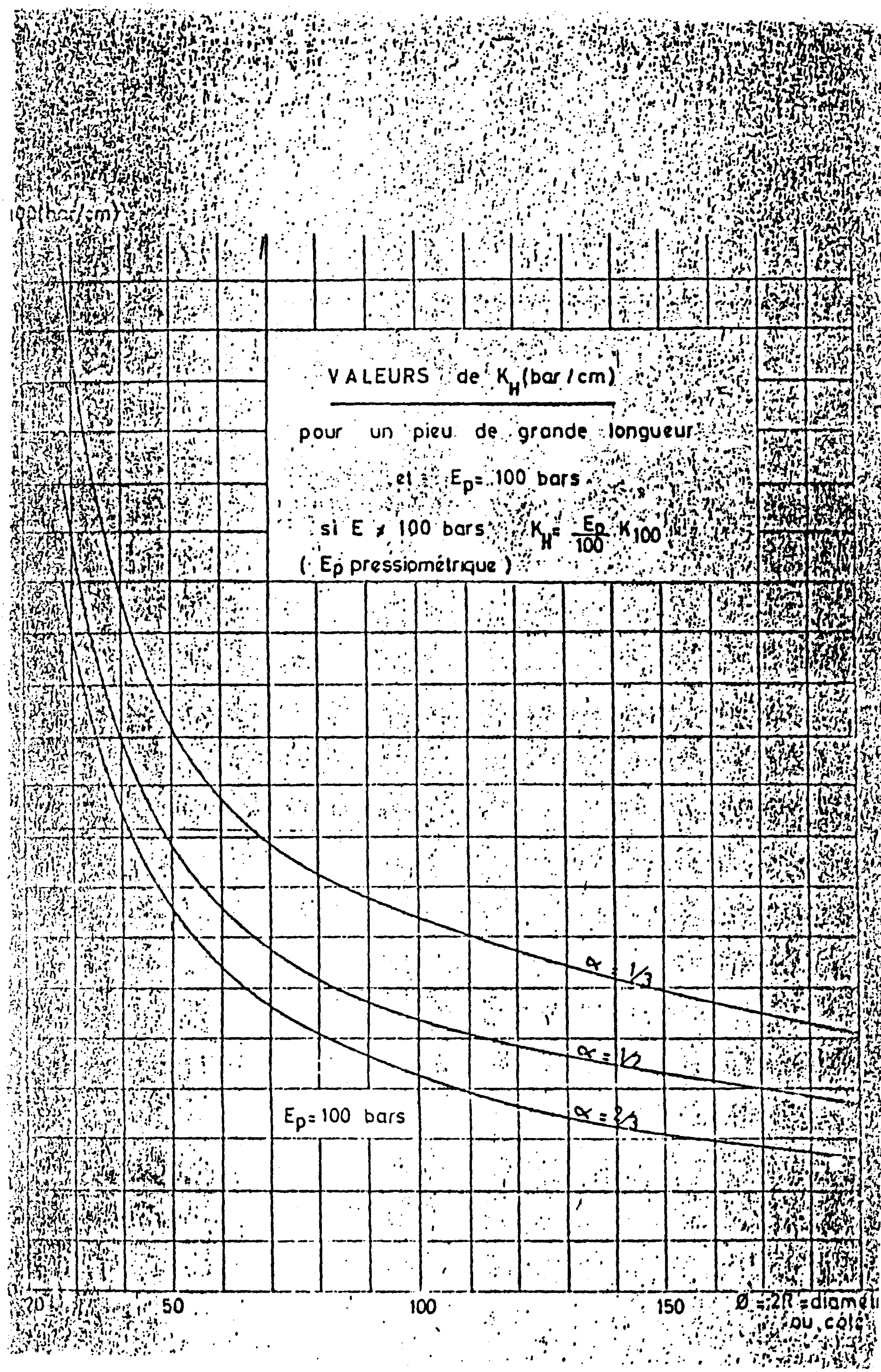
./.

Détermination de λ et λ'

(B = Largeur d'une semelle)

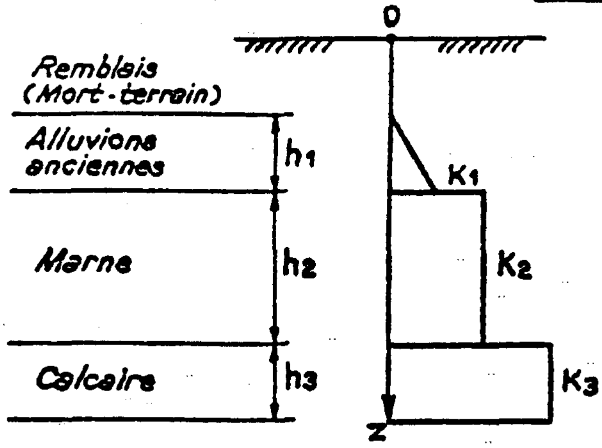
(L = Longueur d'une semelle)





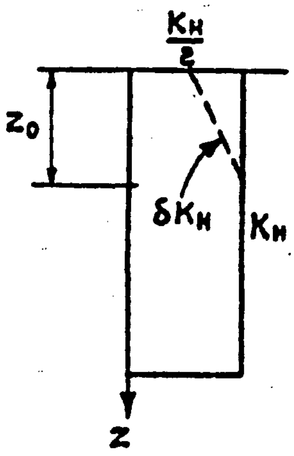
100 (bar/cm)
VALEURS de K_H (bar/cm)
pour un pieu de grande longueur
et E_p = 100 bars
si E ≠ 100 bars $K_H = \frac{E_p}{100} K_{100}$
(Ep pressiométrique)
α = 1/3
α = 1/2
α = 2/3
E_p = 100 bars
20
50
100
150
Ø = 2R = diamètre ou côté

Dans le cas d'une fondation profonde traversant des horizons différents, on considère un <u>schéma multicouches</u> comme indiqué ci-contre.



<u>schéma multicouches</u>

Les valeurs de K_H obtenues par la relation précédente doivent être <u>corrigées</u> dans certains cas particuliers :



- Si le pieu est <u>isolé</u>, sans être coiffé en tête par une semelle, le coefficient K_H sera réduit dans le rapport suivant δ variant avec la profondeur, sur la hauteur Z_0

$$\delta = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{Z}{Z_0}\right)$$

$Z_0 = B$ pour les sols cohérents

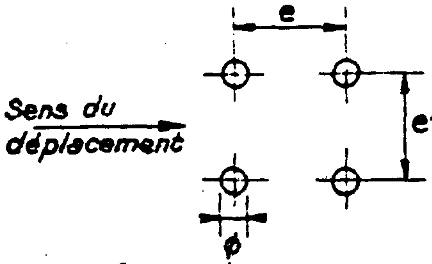
$Z_0 = 2B$ pour les sols pulvérulents

- Si la <u>teneur en eau</u> du terrain peut varier dans de fortes proportions, le coefficient de structure du sol α retenu sera celui correspondant à la plus faible valeur envisageable pour le rapport $\frac{E}{pl}$. On conçoit en effet qu'une vase n'a pas la même réaction horizontale si elle est saturée en eau ou si elle ne l'est pas.

- Si le pieu appartient à un <u>groupe</u>, la valeur de K_H peut être réduite si les pieux sont proches les uns des autres.

./.

Le coefficient de réduction δ' est :*



$\delta' = 0{,}25$ si $e = 3\,ø$ ou 3B

$\delta' = 1$ si $e = 8\,ø$ ou 8B

δ'	0,25	0,40	0,55	0,70	0,85	1
$\frac{e}{B}$, $\frac{e}{ø}$	3	4	5	6	7	$\geqslant 8$

L'entraxe e' dans la direction perpendiculaire au déplacement ne semble pas avoir d'influence tant qu'il est supérieur à 2,5 ø.

- Dans le cas où les charges appliquées sont <u>permanentes</u>, on utilisera des valeurs de K_H <u>moitié</u> de celles calculées.

5- <u>LIMITES D'UTILISATION DE L'HYPOTHESE DE WESTERGAARD - REPARTITION DES CONTRAINTES SOUS UNE FONDATION</u>

Quelle est la répartition des <u>pressions de contact</u> sous une fondation, c'est-à-dire des contraintes réelles que la fondation exerce sur le sol ? Cette répartition dépend de la <u>rigidité relative</u> de la semelle et du sol.

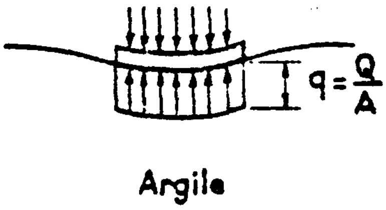
Si la semelle est <u>flexible</u>, elle épouse les déformations du sol sans modifier la distribution des charges. Si la distribution est uniforme, on aura le schéma suivant, selon la nature du sol :

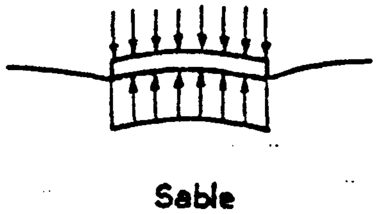
---

* valeurs proposées par Davisson

./.

Semelle flexible

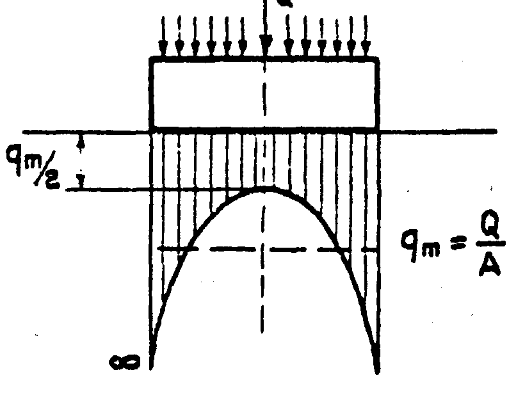




Si au contraire la semelle est rigide, c'est-à-dire indéformable par rapport au sol, elle lui impose une déformation constante sur toute la surface de charge et la distribution des pressions de contact n'est pas uniforme.

Dans le cas d'un sol idéal parfaitement élastique, Boussinesq a déterminé la répartition théorique de cette pression sous une semelle rigide circulaire chargée uniformément. La pression de contact est égale à la moitié de la pression moyenne au centre de la plaque et est infinie sur les bords.

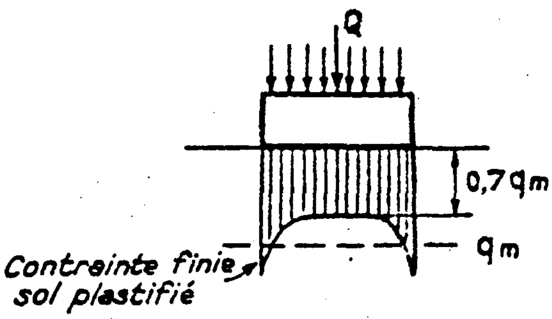
Semelle rigide circulaire
(Boussinesq)



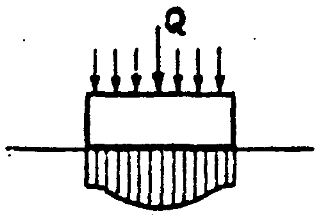
Dans un sol <u>réel</u>, la répartition est différente selon que le sol est <u>cohérent</u> ou <u>pulvérulent</u>.

Si le sol est <u>cohérent</u>, la répartition est très voisine de la répartition théorique ci-dessus. Bien que le terrain ne soit pas chargé sur les bords, les contraintes y sont cependant élevées.

<u>Semelle rigide</u>



<u>sol cohérent</u>



<u>sol pulvérulent</u>

Dans le cas d'un sol <u>pulvérulent</u>, la répartition est tout à fait différente, ce qui prouve que le comportement d'un tel matériau n'a rien d'élastique.

Sur les bords de la semelle, la pression de contact est très faible puisque la contrainte sur une facette verticale est pratiquement nulle et que la résistance au cisaillement est due au seul frottement interne.

Dans la <u>réalité</u>, la fondation est plus ou moins flexible et on se trouve dans un cas <u>intermédiaire</u> : la distribution de la pression de contact n'est pas uniforme, mais elle n'a pas non plus une allure aussi marquée que dans le cas d'une fondation très rigide. La répartition observée s'adapte à la fois aux caractéristiques de la fondation et du terrain pour que les déformations verticales de l'une soient identiques aux tassements de l'autre. C'est cette <u>interaction du sol et de la fondation</u> qui rend l'étude de la pression de contact si difficile.

./.

On voit donc que l'hypothèse de Westergaard est loin de traduire la déformabilité réelle du sol.

Elle s'applique cependant de façon satisfaisante aux fondations profondes massives (donc rigides) ou discontinues.

Quand la fondation est infiniment rigide (caisson ou colonne de grandes dimensions), elle ne peut se déformer et est simplement sujette à un déplacement d'ensemble. Le déplacement en un point est donc une fonction linéaire de l'abscisse de ce point et il en va de même pour la pression de contact qui lui est proportionnelle.

Nous verrons que l'intensité du coefficient de raideur ne joue aucun rôle (seul intervient le rapport $\mu = \frac{K_H}{K_V}$), mais il faut néanmoins postuler l'existence de ce coefficient avec l'approximation que cela comporte.

Dans le cas des fondations profondes discontinues, c'est-à dire des pieux, la théorie de Westergaard donne d'assez bons résultats pour le calcul des efforts dans la fondation.

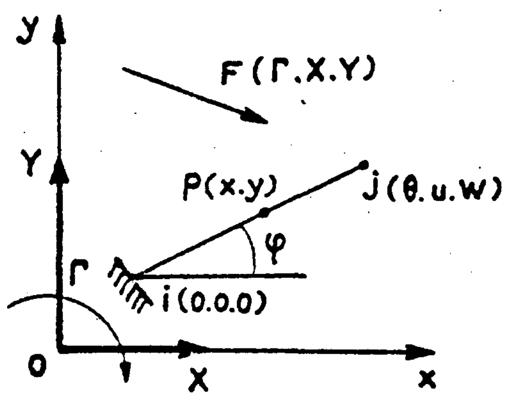
Certains auteurs, Terzaghi, en particulier, évitent de donner le nom de pression de contact à la contrainte calculée de cette manière et préfèrent l'appeler réaction du sol, pour bien mettre en évidence qu'elle peut différer de façon notable de la pression de contact réelle.

./.

6- COEFFICIENTS DE DEFORMABILITE D'UN APPUI ET DE SA FONDATION

La déformabilité d'un appui se traduit par les équations linéaires reliant les déplacements en tête de l'appui aux efforts qui lui sont appliqués. Elle est caractérisée par la matrice de souplesse de l'appui.

6.1- Matrice de souplesse ou d'élasticité d'un appui



6.11- Considérons d'abord un élément rectiligne, de fibre moyenne ij, d'inertie I et de section S, faisant partie d'une structure hyperstatique plane et dont l'appui i est supposé fixe dans le plan de la structure (encastrement)

Les coordonnées (x, y) d'un point de la fibre moyenne, I et S sont des fonctions de l'abscisse s de la fibre moyenne comptée à partir de l'appui i.

Appliquons en j à l'élément un système de forces F dont les éléments de réduction par rapport aux axes Oxy sont un moment résultant Γ par rapport à O et une résultante générale de composantes X et Y suivant ox et oy.

Le moment fléchissant M, l'effort normal N et l'effort tranchant T en un point P (x y) de la fibre moyenne ont pour valeurs (φ désignant l'angle que fait l'élément ij avec l'axe ox):

$$\begin{cases} M = \Gamma + yX - xY \\ N = - \cos\varphi\, X - \sin\varphi\, Y \\ T = \sin\varphi\, X - \cos\varphi\, Y \end{cases}$$

./.

L'extrémité j de l'élément subit un déplacement D de composantes (Θ, u, v). En négligeant les déformations dues à l'effort tranchant, les formules de Bresse donnent alors :

$$\left| \begin{array}{l} \Theta = \int \frac{M\,ds}{EI} \\ u = \int \frac{My\,ds}{EI} - \int \frac{N}{ES} \cos \varphi \, ds \\ v = \int \frac{Mx\,ds}{EI} - \int \frac{N}{ES} \sin \varphi \, ds \end{array} \right.$$

Si nous remplaçons M, T, N par leurs valeurs, nous obtenons les relations suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} \Theta = S_{11} \Gamma + S_{12} X + S_{13} Y \\ u = S_{21} \Gamma + S_{22} X + S_{23} Y \\ v = S_{31} \Gamma + S_{32} X + S_{33} Y \end{array} \right.$$

qui s'écrivent en représentation matricielle :

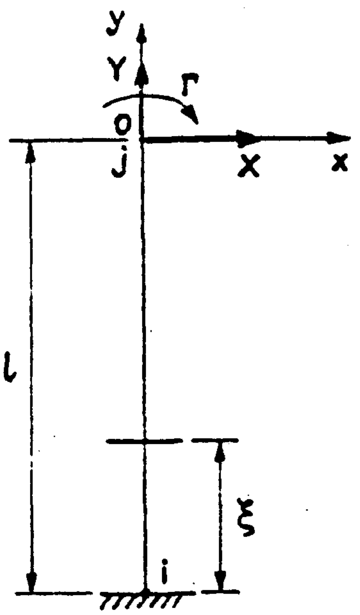
$$D = \Sigma P$$

La matrice carrée Σ est la <u>matrice de souplesse</u> (ou d'élasticité) de l'élément. Elle est symétrique - ce qui résulte du théorème de réciprocité de Maxwell - et ses coefficients sont égaux à :

$$\left| \begin{array}{l} S_{11} = \int \frac{ds}{EI} \\ S_{12} = S_{21} = \int \frac{y\,ds}{EI} \\ S_{13} = S_{31} = -\int \frac{x\,ds}{EI} \\ S_{22} = \int \frac{y^2\,ds}{EI} + \int \frac{\cos^2 \varphi}{ES} ds \\ S_{23} = S_{32} = -\int \frac{xy\,ds}{EI} + \int \frac{\sin \varphi \cos \varphi \, ds}{ES} \\ S_{33} = \int \frac{x^2\,ds}{EI} + \int \frac{\sin^2 \varphi \, ds}{ES} \end{array} \right.$$

./.

L'inverse de la matrice de souplesse est la <u>matrice de rigidité</u>.



Si l'élément ij, de longueur l, est orienté suivant l'axe oy, l'origine O étant confondue avec l'extrémité j, on a :

$$x = 0 \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad s = \xi = l + y \quad ds = d\xi = d$$

et :

$$S_{13} = 0 \qquad S_{23} = 0$$

La matrice de souplesse de l'élément se réduit alors à :

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{vmatrix}$$

AVEC $\quad S_{11} = \int \frac{dy}{EI} \qquad S_{12} = \int \frac{y\,dy}{EI} \qquad S_{22} = \int \frac{y^2\,dy}{EI}$

$$S_{33} = \int \frac{ds}{ES}$$

Les 4 coefficients S_{11}, S_{12}, S_{22} et S_{33} sont les <u>coefficients de souplesse</u> ou de <u>déformabilité</u> de l'élément. On les appelle :

S_{11} ou S_R : <u>souplesse de rotation</u>

S_{22} ou S_T : <u>souplesse de translation</u> (ou souplesse horizontale)

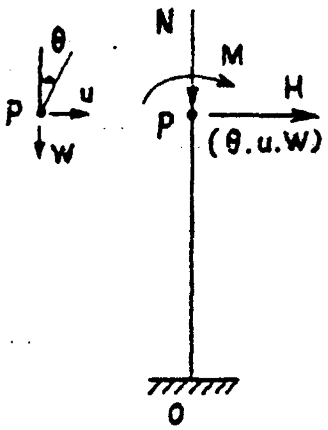
S_{12} ou S_{TR} : <u>souplesse croisée</u> (ou de translation - rotation)

S_{33} ou S_V : <u>souplesse verticale</u>

./.

Ces coefficients peuvent s'exprimer en fonction des coefficients de forme a, b, c de l'élément :

$$\left| \begin{array}{l} S_R = S_{11} = a + 2\,b + c \\ S_{TR} = S_{12} = -\,l\,(a + b) \\ S_T = S_{22} = l^2\,a \end{array} \right.$$



Les déplacements θ, u, V, sous l'effet des efforts appliqués M, H et N, de l'extrémité P d'un élément rectiligne vertical OP, dont la base O est fixe, sont donc donnés (avec les conventions de signes ci-contre) par :

$$\boxed{\begin{array}{l} \theta = S_R\,M + S_{TR}\,H \\ u = S_{TR}\,M + S_T\,H \\ V = S_V\,N \end{array}}$$

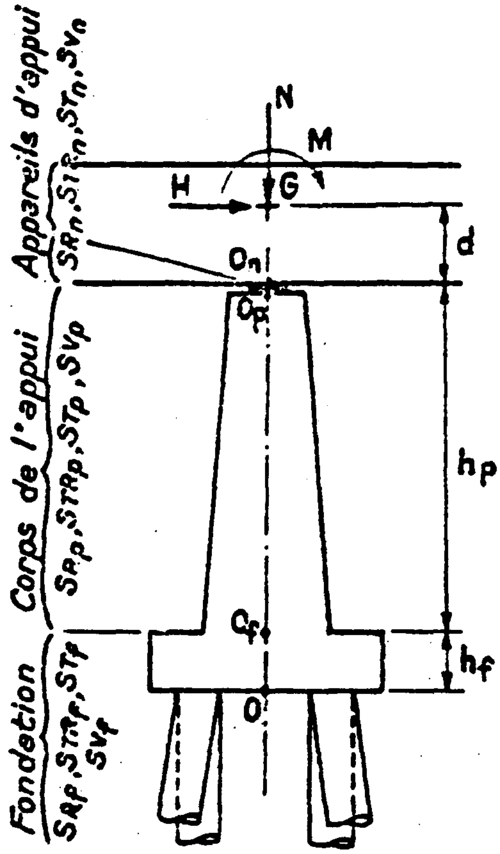
Les équations précédentes représentent les équations de déformabilité de l'élément. Les deux premières équations traduisent la déformabilité de l'élément sous les efforts M et H, alors que la troisième équation est relative à sa déformabilité verticale sous l'effet de N.

6.2- Calcul des coefficients de déformabilité d'un appui

Un appui (pile, poteau, etc...) se compose essentiellement de trois éléments :

- une fondation (semelles, pieux, caissons, etc...)
- le corps de l'appui
- éventuellement des appareils d'appui

./.

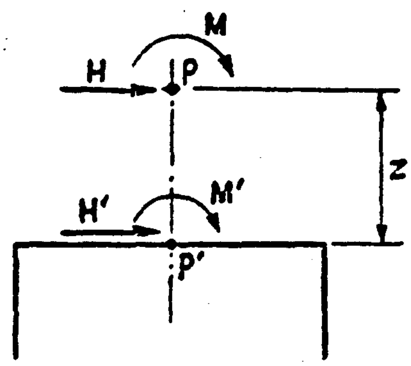


Pile de Pont

Les déplacements en tête de l'app s'obtiennent par superposition de déplacements relatifs à chaque élément.

Supposons connues, à un niveau donné P' les déformations θ', u', de l'appui dues aux éléments situé au dessous de P' sous l'effet de M', H', N' appliqués en ce point.

Il est facile d'en déduire les déformations θ, u, v au niveau P situé à la distance Z de P' sous l'effet des efforts M, H, N appliqués à ce niveau :



Les équations de déformabilité en P' s'écrivent :

$$\left|\begin{array}{l} \theta' = S_{R'}\ M' + S_{TR'}\ H' \\ u' = S_{TR'}\ M' + S_{T'}\ H' \\ V' = S_{V'}\ N' \end{array}\right.$$

La compatibilité des déformations et l'équilibre des efforts donnent :

$M' = M + HZ \qquad H' = H \qquad N' = N$

$\theta = \theta' \qquad u = u' + \theta Z \qquad V = V'$

D'où :

$$\theta = S_{R'} M + (S_{R'} Z + S_{TR'}) H$$

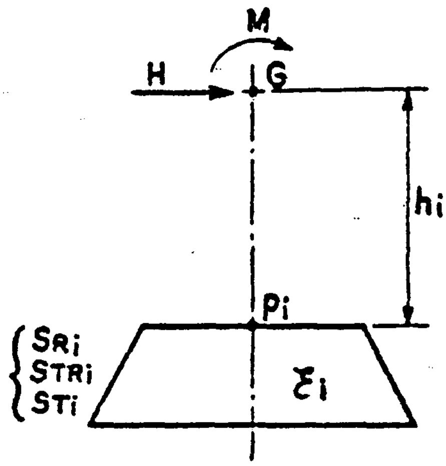
$$u = \theta Z + S_{TR'} M + S_{TR'} Z H + S_{T'} H$$

$$u = (S_{R'} Z + S_{TR'}) M + (S_{R'} Z^2 + 2 S_{TR'} Z + S_{T'}) H$$

$$V = S_{V'} N$$

seit :

$$\boxed{\begin{array}{ll} S_R = S_{R'} & \\ S_{TR} = S_{TR'} + S_{R'} Z & S_V = S_{V'} \\ S_T = S_{T'} + 2 S_{TR'} Z + S_{R'} Z^2 & \end{array}}$$



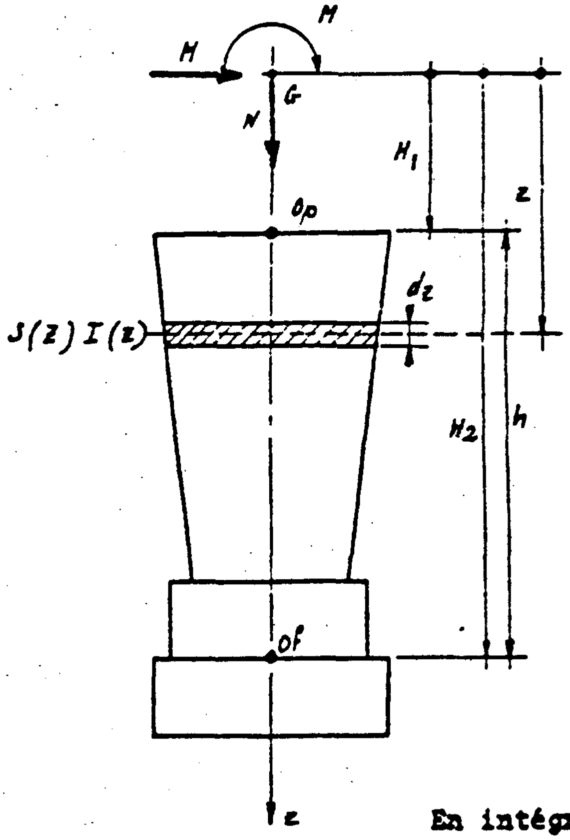
Si l'appui comporte donc plusieurs éléments Σ_i dont les coefficients de déformabilité S_{Ri}, S_{TRi}, ST_i et S_{Vi}, calculés en un point Pi situé à la distance hi de G, sont connus, les équations de déformabilité de l'ensemble de l'appui sont :

$$\left|\begin{array}{l} \theta = \sum^{i} S_{Ri} M + \left(\sum^{i} S_{TRi} + \sum^{i} S_{Ri} h_i \right) H \\ u = \left(\sum^{i} S_{TRi} + \sum^{i} S_{Ri} h_i \right) M + \left(\sum^{i} S_{Ti} + 2 \sum^{i} S_{TRi} h_i + \sum^{i} S_{Ri} h_i^2 \right) H \\ V = \sum^{i} S_{Vi} N \end{array}\right.$$

Par conséquent, à partir des valeurs des coefficients de déformabilité de la <u>fondation</u> (S_{Rf}, S_{TRf}, S_{Tf}, S_{Vf} en O_f), du <u>corps d'appui</u> (S_{Rp}, S_{TRp}, S_{Tp}, S_{Vp} en O_p) et des <u>appareils d'appui</u> (S_{Rn}, S_{TRn}, S_{Tn}, S_{Vn} en O_n) on peut obtenir les équations de déformabilité de l'appui en un point quelconque, par exemple au niveau G de la fibre neutre de la structure portée.

./.

6.3- Coefficients de déformabilité du corps de l'appui



Les déplacements en G résultent de la somme des déplacements pour chaque tranche d'épaisseur dZ. Les formules de Bresse donnent dans ce cas :

$$d\theta = \frac{M + HZ}{EI\,(Z)}\,dZ \qquad dV = \frac{N}{ES\,(Z)}\,dZ$$

$$du = \frac{M + HZ}{EI\,(Z)}\,Z\,dZ$$

où E est le module d'élasticité du béton et S (Z) et I (Z) l'aire et l'inertie de la section de cote Z.

En intégrant les déplacements le long du corps de l'appui, on obtient les valeurs des déformations en G et les coefficients de déformabilité sont :

$$S_R = \int_{H_1}^{H_2} \frac{dZ}{EI(Z)} \qquad S_{TR} = \int_{H_1}^{H_2} \frac{Z\,dZ}{EI\,(Z)} \qquad S_T = \int_{H_1}^{H_2} \frac{Z^2\,dZ}{EI\,(Z)} \qquad S_V = \int_{H_1}^{H_2} \frac{dZ}{ES\,(Z)}$$

Les valeurs des coefficients de déformabilité, ramenées au niveau O_p sont :

$$S_R = \int_0^h \frac{dZ}{EI(Z)} \qquad S_{TR} = \int_0^h \frac{Z\,dZ}{EI(Z)} \qquad S_T = \int_0^h \frac{Z^2\,dZ}{EI\,(Z)} \qquad S_V = \int_0^h \frac{dZ}{ES\,(Z)}$$

avec $h = H_2 - H_1$

Dans le cas d'un appui, de hauteur h, et de section d'inertie constante :

$$S_R = \frac{h}{EI} \qquad S_{TR} = \frac{h^2}{2EI} \qquad S_T = \frac{h^3}{3\,EI} \qquad S_V = \frac{h}{ES}$$

./.

6.4- Coefficients de déformabilité des appareils d'appui

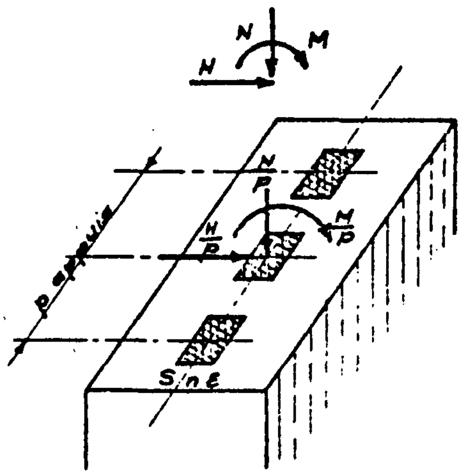
Si la structure est liée rigidement à l'appui, les appareils d'appui n'existent pas et les coefficients correspondants sont nuls.

Si la structure est articulée sur l'appui par l'intermédiaire d'une articulation constituant un point fixe (par exemple : articulation Freyssinet) :

$$S_R = \infty \qquad S_{TR} = 0 \qquad S_T = 0 \qquad S_V = 0$$

Si la structure repose sur l'appui par l'intermédiaire d'appareils d'appuis semi-mobiles en élastomères frettés, on doit distinguer deux cas :

a) L'appui comporte une seule file d'appuis en néoprène



Les coefficients de déformabilité des appuis en néoprène sont alors égaux à :

$$S_R = c' \frac{n}{p} \frac{\varepsilon^3}{GS\ a^4}$$

$$S_{TR} = 0 \qquad S_V = C \frac{n}{p\ GS\ a^2} \varepsilon^3$$

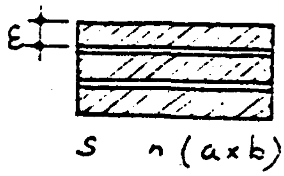
$$S_T = \frac{n}{p} \frac{\varepsilon}{GS}$$

avec les notations suivantes :

p : nombre d'appuis en néoprène

a, b : dimensions en plan de l'appui en néoprène.

./.

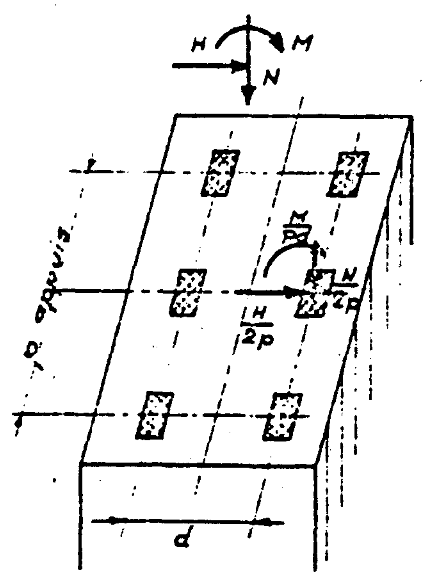


S = ab	surface de l'appui en néoprène
n	nombre de feuillets élémentaires
ε	épaisseur de néoprène de chaque feuillet élémentaire
c et c'	coefficients de forme dépendant du rapport $\frac{b}{a}$
G	module d'élasticité transversal du néoprène valant 16 kg/cm2 dans le cas de chargements instantanés (et 8 kg/cm2 chargements lents)

b/a	0,5	0,6	0,7	0,75	0,8	0,9	1	1,2	1,4	1,5	2	3	4	5	10	∞
c	5,83	4,44	3,59	3,28	3,03	2,65	2,37	2,01	1,78	1,70	1,46	1,27	1,18	1,15	1,07	1
c'	136,7	116,7	104,4	100	96,2	90,4	86,2	80,4	76,7	75,3	70,8	66,8	64,9	63,9	61,9	60

Le coefficient S_{TR} est nul car il n'y a ni rotation de l'appareil d'appui sous l'effet de H, ni déplacement horizontal de celui-ci sous l'effet de M.

b) <u>L'appui comporte une double file d'appuis en néoprène</u>



Les coefficients de déformabilité des appuis en néoprène sont alors égaux à :

./.

$$S_R = C \frac{2n}{p\,d^2} \quad \frac{\varepsilon^3}{GS\,a^2}$$

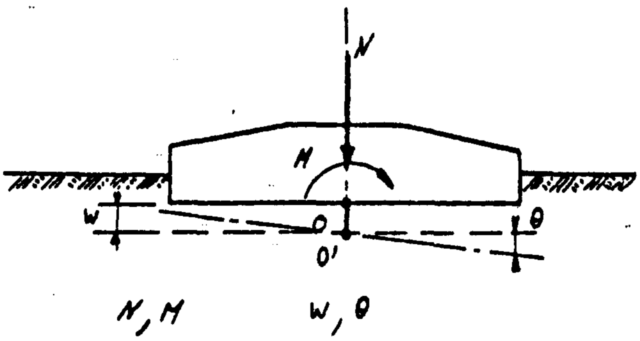
$$S_{TR} = 0 \qquad\qquad S_V = c\ \frac{n}{2p} \quad \frac{\varepsilon^3}{GS\,a^2}$$

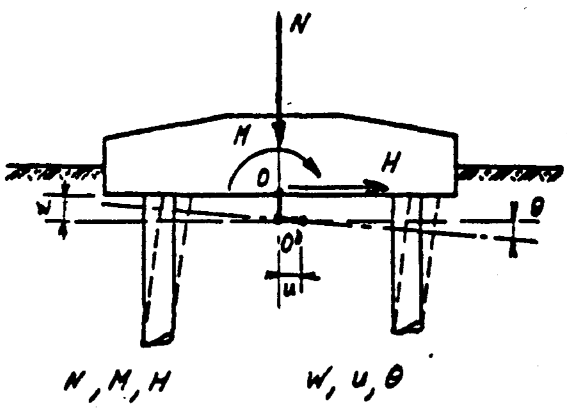
$$S_T = \frac{n}{2p} \quad \frac{\varepsilon}{GS}$$

avec les mêmes notations que précédemment, <u>d</u> représentant l'entraxe des deux files d'appuis en néoprène.

6.5- <u>Coefficients de déformabilité des fondations</u>

Le calcul des coefficients de déformabilité des fondations diffère selon la nature des fondations. Ce calcul fera l'objet des paragraphes suivants.

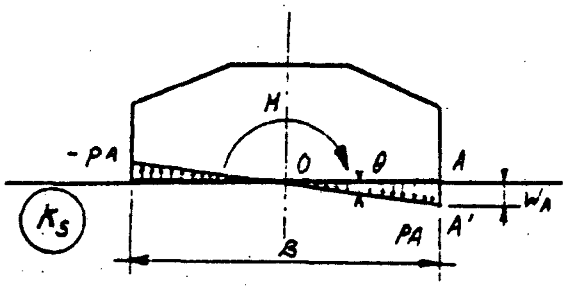




./.

7 - DEFORMABILITE D'UNE SEMELLE SUPERFICIELLE -

Considérons le cas d'une semelle superficielle, supposée indéformable, et dont l'inertie de la section d'appui sur le terrain de fondation est égale à I_f (largeur B, longueur L, $I_f = \frac{LB^3}{12}$)



La déformation verticale du sol considéré comme un massif élastique, sous la pression p est :

$$V = \frac{p}{K_S}$$

K_S représentant le module de réaction du terrain, compte-tenu de la dimension de la semelle.

Sous l'effet d'un moment M appliqué en O, la semelle tourne d'un angle θ et le déplacement vertical du point A est égal à V_A :

$$V_A = \theta \frac{B}{2} .$$

Il en résulte sur le sol une pression verticale p_A :

$$p_A = K_S \theta \frac{B}{2}$$

L'équilibre de la semelle permet d'écrire :

$$M = \frac{1}{2} \quad p_A \frac{BL}{2} \times \frac{2B}{3} = K_S \theta \frac{B^3 L}{12} = K_S \theta I_f$$

La rotation de la semelle est donc égale à :

$$\boxed{\theta = \frac{M}{K_S \quad I_f}} \qquad \text{d'où} \quad : \qquad S_R = \frac{1}{K_S \; I_f}$$

C'est-à-dire que le sol de fondation équivaut à une hauteur de béton égale à : $\frac{Eb}{K_S}$

./..

Exemple : Fondation superficielle de 4 x 4 m sur sable sec de densité moyenne 1,6

$$B = L = 4\ m \qquad K_{S1} = 4\ kg/cm3$$

$$K_S = K_{S1}\left(\frac{4 + 0,30}{8}\right)^2 = 1,2\ kg/cm3 = 1,2 \times 10^3\ t/m3$$

$$I_f = \frac{4 \times 4^3}{12} = 21,3\ m4 \qquad S_R = \frac{10^{-3}}{1,2 \times 21,3} = 3,9 \cdot 10^{-5} \sim 4 \times 10$$

Le sol de fondation équivaut à une hauteur de béton égale à :

$$\frac{4 \times 10^6}{1,2 \times 10^3} = 3\ 333\ m$$

8 - DEFORMABILITE D'UNE FONDATION PROFONDE MASSIVE (CAISSON, COLONNE)

C'est le cas d'une fondation sur caisson, havé à l'air libre ou foncé à l'air comprimé, ou sur une colonne de grandes dimensions. Le terrain est supposé non affouillable et suffisamment résistant pour que l'on puisse prendre en compte les réactions latérales qu'il développe sur la fondation.

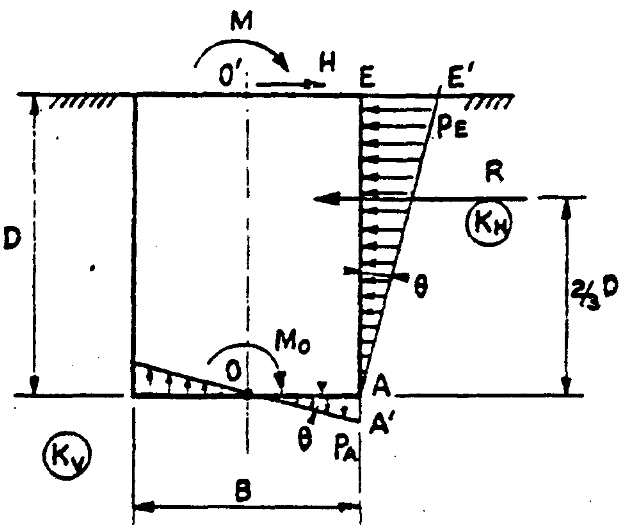
La largeur B de la fondation est importante vis-à-vis de sa profondeur D. La fondation est donc considérée comme indéformable et, sous les sollicitations qui lui sont appliquées, subit un déplacement d'ensemble.

8.1 - Fondation pivotant autour du milieu de sa base ($K_H = C^{te}$)

- Sols cohérents

On suppose que la fondation tourne autour du point O, centre de sa base d'un angle θ : soient K_V et K_H les modules de réaction vertical et horizontal du sol et W_A et W_B, les

./..



déplacements des points A et E. On a

$V_A = \theta \frac{B}{2}$ $\qquad P_A = K_V \ \theta \frac{B}{2}$

$V_E = \theta D$ $\qquad P_E = K_H \ D \theta$

Sous l'effet d'un moment Mo appliqué en O, l'équilibre des forces permet d'écrire :

$$Mo = K_H \ \theta \frac{D^2}{2} \ L \times \frac{2}{3} D + K_V \ \theta \frac{B^2}{8} \ L \times \frac{2}{3} B$$

$$M_o = \theta \left(K_H \ \frac{D^3 L}{3} + K_V \ \frac{B^3 L}{12}\right)$$

En appelant I_f l'inertie de la section d'appui sur le terrain de fondation et I'_1 l'inertie latérale du massif de fondation par rapport à sa base, il vient : $\qquad (I'_1 = \frac{D^3 L}{3})$

$$M_o = \theta \ (K_H \ I'_1 + K_V \ I_f)$$

D'où : $\qquad \theta = \dfrac{M_o}{K_V \ I_f + K_H \ I'_1} \qquad$ et $\qquad S_R = \dfrac{1}{K_V \ I_f + K_H \ I'_1}$

Si on néglige l'effet des réactions latérales du terrain, on retrouve la relation obtenue pour les semelles superficielles.

Si on applique maintenant un couple M et un effort horizontal H au niveau supérieur de la fondation en O', les coefficients de déformabilité de la fondation sont les suivants :

$$M_o = M + DH \qquad\qquad u = \theta D$$

./..

$$S_R = \frac{1}{K_V\ I_f + K_H\ \ \ I'_1}$$

$$STR = \frac{D}{K_V\ I_f + K_H\ \ I'_1} \qquad\qquad S_V = \frac{1}{K\ A}$$

$$ST = \frac{D^2}{K_V\ I_f + K_H\ \ I'_1}$$

Exemple : Caisson fondé dans du sable sec de densité moyenne 1,6

$L = B = 6$ m $\qquad$ $D = 10$ m $\qquad$ $K_{S1} = 4$ kg/cm3

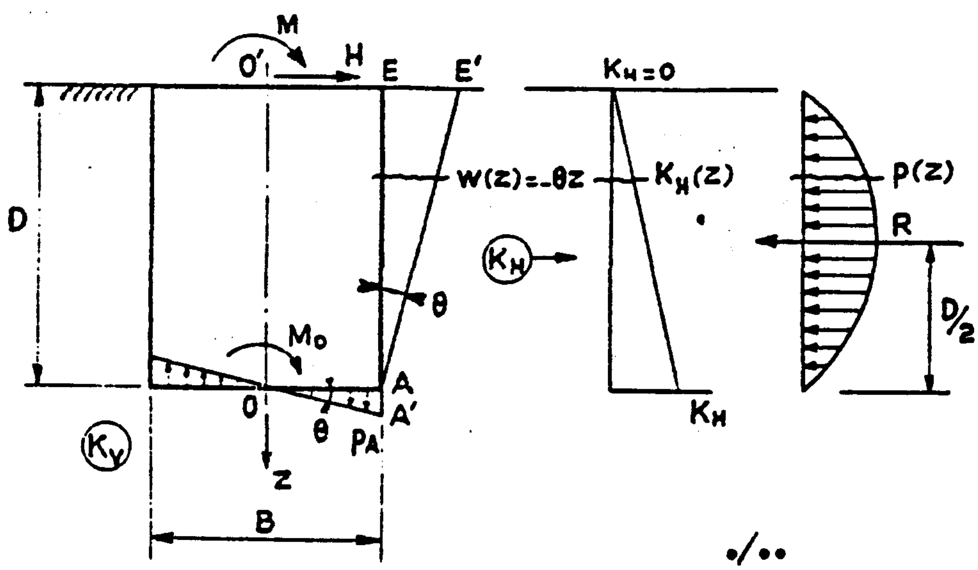
$$K_V = K_H = K_S = K_{S1}\ \left(\frac{6 + 0{,}30}{12}\right)^2 = 1{,}1\ \text{kg/cm3} = 1{,}1 \times 10^3\ \text{t/m3}$$

$$I_f = \frac{6 \times \bar{6}^3}{12} = 108\ \text{m4}$$

$$I'_f = \frac{6 \times 10^{-3}}{3} = 2\ 000\ \text{m4}$$

$$\text{D'où :}\quad S_R = \frac{10^{-3}}{1{,}1\ (108 + 2000)} = 4{,}3\quad 10^{\cdot}$$

8.2 - Fondation pivotant autour du milieu de sa base (K_H variant linéairement avec la profondeur) - Sols pulvérulents



./..

Dans les terrains pulvérulents, il parait plus exact de considérer que le coefficient de réaction horizontal du sol n'est pas constant mais varie linéairement avec la profondeur :

$$K_H(z) = \frac{K_H}{D}(z + D)$$

$$v(z) = - \theta z$$

On a alors :

$$p(z) = K_H(z)\, v(z) = - K_H\, \theta \frac{z}{D}(z + D)$$

Les réactions latérales exercées par le terrain ont une répartition parabolique et leur résultante est égale à :

$$R = \frac{2}{3} D\, p_H\left(-\frac{D}{2}\right) L = K_H\, \theta \frac{D^2 L}{6}$$

En appelant I_1 l'inertie latérale du massif de fondation, il vient :

$$R = K_H\, \theta \frac{2\, I_1}{D} \qquad \left(I_1 = \frac{D^3 L}{12}\right)$$

Sous l'effet d'un moment Mo appliqué en O, l'équilibre des forces permet d'écrire :

$$M_o = K_H\, \theta \frac{I1}{2D} \times \frac{D}{2} + K_V\, \theta \frac{B^2}{8} L \times \frac{2}{3} B$$

$$M_o = \theta(K_H\, I_1 + K_v\, I_f) = \theta\left(K_H \frac{I1'}{4} + K_v\, I_f\right)$$

D'où :

$$\theta = \frac{M_o}{K_H\, I_1 + K_v\, I_f} \qquad \text{et} \qquad S_R = \frac{1}{K_H\, I_1 + K_v\, I_f}$$

./..

Exemple :

Reprenons le même exemple que précédemment

$K_v = K_H = 1.1 \text{ kg}/\text{m3} = 1,1 \times 10^3 \text{ t/m3}$

$I_f = 108 \qquad I'1 = 2\ 000 \qquad I_1 = 500$

$$S_R = \frac{10^{-3}}{1.1\ (500 + 108)} = 15 \cdot 10^{-7}$$

La fondation est environ quatre fois plus déformable que dans le cas d'un module de réaction horizontal constant avec la profondeur.

8.3 - Réduction du moment de flexion avec la profondeur

Le moment de flexion à la base de la fondation, sous l'effet des efforts M et H appliqués en tête, est égal à :

$$M_o = M + DH - K_H\ \theta . I'_1 \qquad (\text{ou } I_1)$$

La rotation du massif de fondation est :

$$\theta = S_R\ (M + DH) = \frac{M + DH}{K_v\ I_f + K_H\ I'_1}$$

Il résulte des deux relations précédentes que :

$$M_o = \frac{I_f}{I_f + \frac{K_H}{K_v}\ I'_1}\ (M + DH)$$

En admettant qu'au niveau de la base de la fondation les coefficients de réaction latérale et horizontale du sol sont égaux $K_H = K_v = K_S$, il vient :

$$M_o = \frac{I_f}{I_f + I'_1}\ (M + DH) \qquad (\text{ou } I_1)$$

./..

soit : - si $K_H = C^t$ avec la profondeur :

$$M_o = \frac{1}{1 + 4\left(\frac{D}{B}\right)^3} (M + DH)$$

- si K_H varie linéairement avec la profondeur :

$$M_o = \frac{1}{1 + \left(\frac{D}{B}\right)^3} (M + DH)$$

Les réactions latérales du terrain ont donc pour effet de réduire le moment fléchissant transmis à la base de la fondation dans le rapport $\frac{I_f}{I_f + \mu I'_1 \text{ (ou } I_1)}$, <u>ne dépendant que de</u> $\mu = \frac{K_H}{K_V}$

Cette réduction est très importante lorsque la fondation est réellement <u>profonde</u>. Même dans le second cas, le moins favorable, où K_H varie avec la profondeur, le moment de flexion est réduit de moitié si la fondation est aussi profonde que large (D = B). Le coefficient de réduction atteint approximativement 0.10 si la profondeur de la fondation est double de sa largeur (et 0,03 si $K_H = C^t$ avec la profondeur).

On peut en conclure que, pour une fondation rigide, dont la profondeur est au moins égale au <u>double de sa largeur</u>, le moment de flexion à sa base est <u>négligeable</u> et que sa portance est conditionnée essentiellement par la valeur de l'<u>effort normal appliqué</u>.

8.4 - <u>Méthode générale des rotations</u> :

Les calculs effectués aux paragraphes précédents (7,1 - 7,2 7,3) étaient basés sur les hypothèses suivantes :

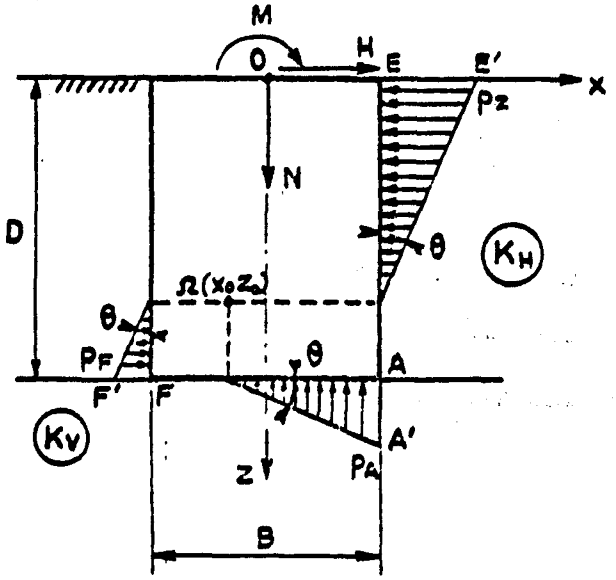
./..

- le massif de fondation pivotait autour du point O, centre de sa base,
- les réactions du sol pouvaient être positives (compression) ou négatives (tractions),
- l'effort horizontal H était équilibré par les frottements de la fondation sous sa base.

On peut également supposer, d'une façon plus homogène, que les forces appliquées (effort vertical N, moment fléchissant M et effort horizontal H) sont équilibrés uniquement par les réactions du terrain qui ne peuvent être que des compressions (en négligeant en quelque sorte la résistance à la traction du sol).

Comme dans les calculs précédents, on néglige également les réactions de cisaillement sur les faces latérales de la fondation, par raison de sécurité, bien que celles-ci aient un effet stabilisateur certain.

Dans ce cas, sous l'effet des sollicitations le massif de fondation va tourner d'un angle θ autour d'un centre instantané de rotation Ω. Mais la position de Ω dépend des sollicitations. Pour chaque ensemble de forces N, M, H, il existe une position bien déterminée du centre instantané de rotation.



Il n'est donc pas possible de calculer les coefficients de déformabilité de l fondation, ceux-ci n'étant plus indépendants des efforts appliqués.

./..

La méthode générale, basée sur ces hypothèses, appelée méthode des rotations, permet par contre, connaissant les efforts appliqués à la fondation, de vérifier de façon plus exacte sa stabilité.

Cette méthode est en particulier couramment utilisée pour l'étude des fondations de piles de pont soumises aux chocs des bateaux.

Soient N, M, H les efforts appliqués à la fondation et K_H et K_v les modules de réaction horizontal et vertical du sol. Le centre instantané de rotation Ω est repéré par ses coordonnés X_o et Z_o, rapportés aux axes représentés sur la figure.

En appelant W_A, W_E et W_F les déplacements AA', EE' et FF' des points A, E et F, et en posant $\mu = \dfrac{K_H}{K_v}$, on peut écrire :

$$
\left|
\begin{array}{ll}
W_A = \theta \left(\frac{B}{2} - X_o\right) & p_A = K_v \ \theta \left(\frac{B}{2} - X_o\right) \\
W_E = \theta \ Z_o & p_E = K_H \ \theta \ Z_o = \mu K_v \ \theta Z_o \\
W_F = \theta \ (D - Z_o) & p_F = K_H \ \theta (D - Z_o) = \mu K_v \ \theta (D - Z_o)
\end{array}
\right.
$$

8.4.1 - Résolution du problème dans le cas où :

$$-\frac{B}{2} \leqslant X_o \leqslant 0$$

Il vient toutes simplifications faites :

$$N = \frac{1}{2}\; K_v\; \theta\, L \quad \left(\frac{B}{2} - X_o\right)^2 \tag{1}$$

$$H = \frac{1}{2}\; \mu\, K_v\; \theta\, L \quad (2\, Z_o - D)\;\; D \tag{2}$$

$$M = \frac{1}{6}\; K_v\; \theta\, L \quad \left((B + X_o)\left(\frac{B}{2} - X_o\right)^2 + \mu D^2\, (2\, D - 3\, Z_o) \right)$$

On élimine θ, K_v, L entre les équations 1 et 2. On en déduit Z_o en fonction de X_o :

$$Z_o = \frac{D}{2} + \frac{\left(\frac{B}{2} - X_o\right)^2}{2\,\mu\, D}\;\; \frac{H}{N} \qquad \left(Z_o > \frac{D}{2}\right)$$

En portant cette valeur dans (3), il vient :

$$M = \frac{1}{3}\; \frac{N}{\left(\frac{B}{2} - X_o\right)^2}\; \left((B + X_o)\left(\frac{B}{2} - X_o\right)^2 + \mu\, \frac{D^3}{2} - \frac{3}{2}\, D\, \frac{H}{N}\left(\frac{B}{2} - X_o\right)^2 \right)$$

Posons : $X = \frac{B}{2} - X_o$, on obtient après simplification l'équation du 3ème degré suivante :

$$X^3 + \frac{3}{2}\; X^2\; \left(\frac{2\, M + DH}{N} - B\right) - \mu\, \frac{D^3}{2} = 0$$

Soit $f\,(X)$ la fonction représentée par le premier membre de l'équation. On a :

$$f'\,(X) = 3\, X^2 + 3\, X\; \left(\frac{2\, M + DH}{N} - B\right)$$

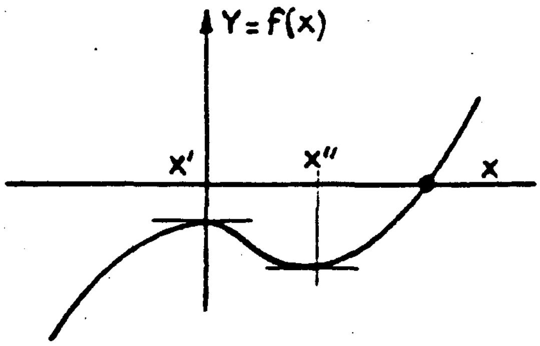
Ses racines sont : $X' = 0$

$$X'' = B - \frac{2\, M + DH}{N}$$

$$f\,(X') = -\,\mu\, \frac{D^3}{2} < 0$$

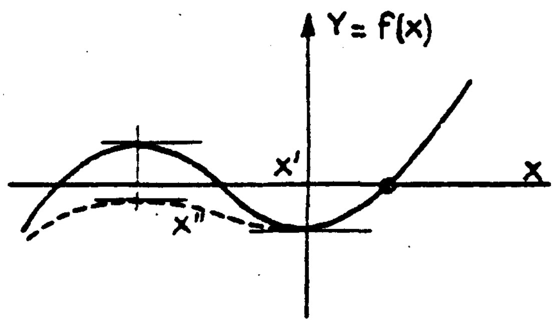
Si $X'' > 0$ $\quad f\,(X'') = -\,\frac{1}{2}\, X''^3 - \mu\, \frac{D^3}{2} < 0$

./..



$X'' > 0$

$f(X'') < 0$



$X'' < 0$

$f(X'') \quad > \quad$ ou < 0

Il y a toujours une racine <u>positive</u> et une seule à l'équation $f(X) = 0$. On cherche cette racine par itération, à partir d'une valeur de X qui doit être supérieure à X" dans le premier cas et simplement positive dans le second (La valeur $X = B$ convient dans les deux cas). La méthode d'itération revient à confondre la courbe $f(X)$ avec sa tangente. Elle converge vite.

$$X_i = X_i - 1 - \frac{f(X_i - 1)}{f'(X_i - 1)}$$

On arrête l'itération lorsque $(X_i - X_i - 1) \quad < 10^{-3}$

Si la solution trouvée vérifie la relation $X \leqslant B$, elle convient. On en déduit les autres inconnues et les valeurs des pressions sur les différentes faces de la fondation :

$$\left| \begin{array}{l} X_o = \frac{B}{2} - X \\ Z_o = \frac{D}{2} + \frac{X^2}{2 \mu D} \frac{H}{N} \qquad\qquad (Z_o > \frac{D}{2}) \\ \theta = \frac{2N}{I_v L X^2} \end{array} \right.$$

./..

et les valeurs des pressions sur :

- la face inférieure, arête avant : $K_v\ \theta\ X$
- la face avant, niveau supérieur : $K_v\ \theta\ \mu\ Z_o$
- la face arrière, niveau inférieur $(Z_o < D)$: $K_v\ \theta\ \mu\ (D - Z$
- " " " " $(Z_o > D)$: $K_v\ \theta\ \mu\ (Z_o -$

8.4.2 - Résolution du problème dans le cas où $X_o < -\frac{B}{2}$

Il vient comme précédemment :

$$\left|\begin{array}{ll} N = -\ \theta\ K_v\ L\ B\ X_o & (1') \\ H = \frac{1}{2}\ \mu\ K_v\ \theta\ L\ (2\ Z_o - D)\ D & (2') \\ M = \frac{1}{6}\ K_v\ \theta\ L\ \left(\frac{B^3}{2} + \mu\ D^2\ (2D - 3\ Z_o)\right) & (3') \end{array}\right.$$

On élimine θ, K_v, L entre les équations (1') et (2'), on en déduit Z_o en fonction de X_o

$$Z_o = \frac{D}{2} - \frac{B\ X_o}{\mu D}\ \frac{H}{N}$$

En portant dans (3'), il vient :

$$M = \frac{1}{6}\ \frac{N}{B\ X_o}\ \left(\frac{B^3}{2} + \mu\ D^2\ \left(\frac{D}{2} + \frac{3\ B\ X_o}{\mu D}\ \frac{H}{N}\right)\right.$$

D'où :

$$X_o = -\ \frac{B^3 + \mu\ \frac{D^3}{2}}{3\ B}\ \ \frac{N}{2\ M + DH}$$

Il faut que la solution vérifie $X_o < -\ \frac{B}{2}$

On en déduit les autres inconnues et les pressions sur les différentes faces du massif.

./..

Valeurs des pressions sur :

- la face inférieure, arête avant : $\gamma_v \, \theta \, (\frac{B}{2} - Xo)$
- la face inférieure, arête arrière : $- \gamma_v \, \theta \, (\frac{B}{2} + Xo)$
- la face avant, niveau supérieur : $\theta \, \mu \, \gamma_v \, Zo$
- la face arrière, niveau inférieur $(Zo < D)$: $\theta \, \mu \, \gamma_v \, (D - Zo)$
- " " " " $(Zo > D)$: $\theta \, \mu \, \gamma_v \, (Zo - D)$

Dans le cas où le terrain de fondation est constitué d'un multicouche, la résolution du système d'équation est plus compliqué et nécessite l'utilisation d'un ordinateur.

8.5 - Méthode des rotations. Cas d'un massif de fondation cylindrique de section circulaire

Le cas d'une fondation cylindrique, de section circulaire, conduit à des calculs plus longs. Soit $R = \frac{B}{2}$, le rayon du cercle.

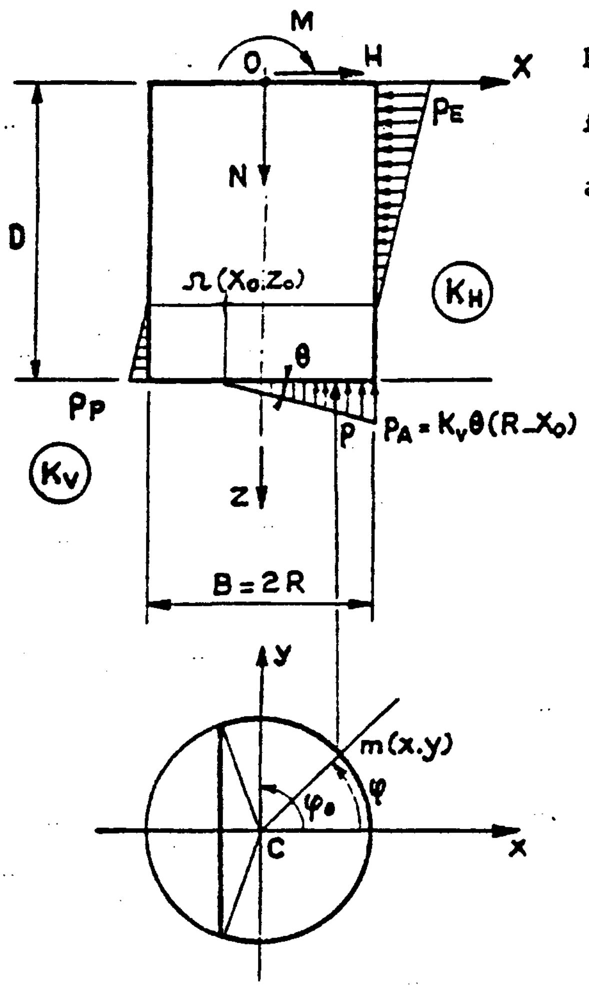
Nous développerons les calculs uniquement dans l'hypothèse où :

$$- \frac{B}{2} < Xo \leqslant 0$$

c'est-à-dire quand la fondation est décomprimée sur sa base. Ce cas se rencontre en particulier lors de la vérification des piles de pont soumises au choc des convois fluviaux.

Le cas, correspondant à Ω situé dans l'autre région du plan, $Xo < - B/2$, se résout de la même manière.

./..



Ecrivons l'équilibre du massif de fondation.

a) équilibre des forces verticales

Soient Cx et Cy les axes de symétrie principaux de la base de la fondation. Un point m du cercle a pour coordonné

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi = X \\ y = R\sin\varphi \end{cases}$$

Soit p la pression sur le sol au point m, on peut écrire :

$$p = p_A \frac{x - x_o}{R - x_o} = K_v\ \theta(x - x_o)$$

$$p = K_v\ \theta R\ (\cos\varphi - \cos\varphi_o)$$

On a donc :

$$N = -2\int_{\varphi_o}^{0} K_v\ \theta R\ (\cos\varphi - \cos\varphi_o)\ R^2 \sin^2\varphi\ d\varphi$$

D'où : $N = \theta\dfrac{K_v\ R^3}{3}\ (\sin\varphi_o\ (3 - \sin^2\varphi_o) - 3\ \varphi_o\cos\varphi_o)$ (1)

b) équilibre des forces horizontales

On a, comme en 8,4 :

$$H = \mu\ K_v\ \theta R\ \ D\ (2\ Zo - D) \qquad (2)$$

c) équilibre des moments en O

Il vient :

$$M = \frac{1}{3}\ \mu\ \theta\ K_v\ R\ D^2\ (2\ D - 3\ Zo) + \iint x\ p\ (m)\ dx\ dy$$

toutes simplifications faites, il vient :

$$M = \frac{\theta K_v}{12} R^4\ (\ 3\ \varphi_o - \sin\varphi_o\cos\varphi_o\ (3 + 2\sin^2\varphi_o)\ ) + \frac{\mu\theta K_v}{3} RD^2(2D - 3\ Z$$

(3)

d) <u>résolution du problème</u> trois inconnues : Z_o, φ_o et θ

De (2) on tire Z_o :

$$Z_o = \frac{D}{2} + \frac{H}{2\,\mu\,\theta\,K_v\,RD}$$

qu'on porte dans (3) :

$$12\,M + 6\,DH = \theta K_v R^4 \left(3\,\varphi_o - \sin\varphi_o \cos\varphi_o \,(3 + 2\sin^2\varphi_o)\right) + 2\,\mu\,\theta\,K_v\,RD^3$$

on élimine enfin θ, K_v entre la relation précédente et (1) ;

Il vient :

$$\frac{4\,M + 2\,DH}{N} = \frac{R\left(3\,\varphi_o - \sin\varphi_o \cos\varphi_o\,(3 + 2\sin^2\varphi_o)\right) + \dfrac{2\,D^3\mu}{R^2}}{\sin\varphi_o\,(3 - \sin^2\varphi_o) - 3\,\varphi_o\cos\varphi_o}$$

Posons : $f(\varphi_o) = \dfrac{4\,M + 2\,DH}{N}$

On a :

$$f(\varphi_o) = \frac{2\,D^3\mu}{R^2}\;\frac{1}{A(\varphi_o)} + R\,\frac{B(\varphi_o)}{A(\varphi_o)}$$

$$\begin{cases} A(\varphi_o) = \sin\varphi_o\,(3 - \sin^2\varphi_o) - 3\,\varphi_o\cos\varphi_o \\ B(\varphi_o) = 3\,\varphi_o - \sin\varphi_o\cos\varphi_o\,(3 + 2\sin^2\varphi_o) \end{cases}$$

La méthode de résolution est la suivante. On calcule $f(\varphi_o)$ et on cherche par itération la valeur de φ_o. On en déduit :

- $x_o = R\cos\varphi_o$
- $\theta = \dfrac{3\,N}{K_v\,R^3\,A(\varphi_o)}$
- $Z_o = \dfrac{D}{2} + \dfrac{H}{3\,\mu\,\theta\,K_v\,RD}$

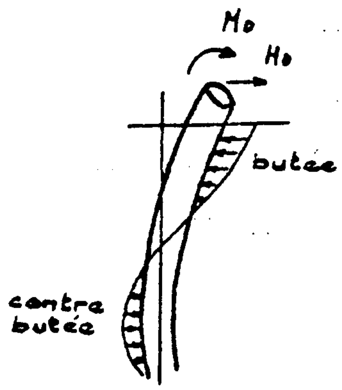
et les valeurs des pressions sur :

- la face inférieure, arête avant : $\theta K_v (R - X_o)$
- la face avant, niveau supérieur : $\mu\,\theta\,K_v\,Z_o$
- la face arrière, niveau inférieur $\mu\,\theta\,K_v\,(D - Z_o)$

9- DEFORMABILITE D'UN PIEU ISOLE (OU PUITS OU COLONNE SUPPOSES NON INFINIMENT RIGIDES)

La théorie de Westergaard s'applique bien aux fondations relativement souples, comme les pieux, les puits ou les colonnes supposés déformables.

Les développements mathématiques de la théorie sont dus à Winkler, à Heteny, puis à Lebelle.



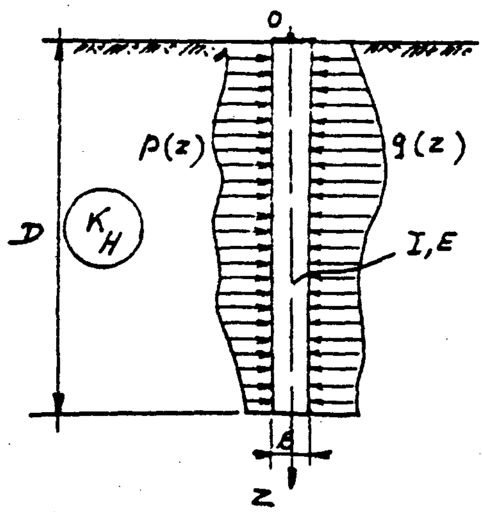
Un pieu soumis à une force horizontale ou à un couple appliqués en tête résiste en fléchissant plus ou moins, selon sa raideur relative ce qui entraine une réaction latérale du terrain.

A la limite un puits court, soumis aux mêmes conditions, mobilisera la réaction latérale du terrain par un déplacement d'ensemble, comme on l'a vu précédemment. On doit alors tenir compte des réactions exercées à la base du puits.

Il n'en est pas de même pour les pieux, longs et flexibles, pour lesquels on peut négliger l'effet des réactions agissant à leur base. Or, la plupart des pieux peuvent être considérés en pratique comme infiniment longs.

Considérons un pieu d'axe vertical OZ, supportant une densité de charge horizontale q (z) et situé dans un sol caractérisé par le module de réaction K_H. Pour équilibrer les charges appliquées, le

./.



pieu subit des déplacements horizontaux V (Z) et le sol développe des réactions latérales p (Z) telles que :

$$p = K_H\, V$$

Chaque section du pieu est soumise à un effort unitaire horizontal égal à :

$$B\,(q - K_H\, V)$$

On peut donc écrire :

$$EI \frac{d^2 V(z)}{d Z^2} = - M(Z) \quad \text{et} \quad \frac{dM(Z)}{d Z} = T(Z)$$

où : M et T sont respectivement le moment fléchissant et l'effort tranchant dans le pieu, E le module élastique du matériau constituant le pieu et I le moment d'inertie de sa section droite. Il vient alors :

$$\frac{d\,T(Z)}{d\,Z} = \frac{d^2\,M(Z)}{d\,Z^2} = -B\,(q - K_H\,V) = -\,EI\,\frac{d^4\,V(Z)}{d\,Z^4}$$

on aboutit donc à l'équation différentielle du 4è ordre :

$$\boxed{\frac{d^4 V}{d Z^4} + \frac{B\,K_H}{EI}\,V = \frac{B}{EI}\,q}$$

9.1- Module de réaction K_H constant avec le profondeur

La solution générale de l'équation sans second membre est de la forme :

./.

$$V = e^{-\frac{Z}{l_o}} \left(c_1 \cos \frac{Z}{l_o} + c_2 \sin \frac{Z}{l_o}\right) + e^{\frac{Z}{l_o}} \left(c_3 \cos \frac{Z}{l_o} + c_4 \sin \frac{Z}{l_o}\right)$$

avec $\boxed{l_o = \sqrt[4]{\frac{4\ EI}{K_H\ B}}}$

c1, c2, c3 et c4 sont des constantes définies par les conditions aux limites.

l_o est appelée longueur élastique du pieu ou longueur de transfert. Elle dépend des caractéristiques du pieu (I, E, B) mais aussi de celles du terrain (K_H).

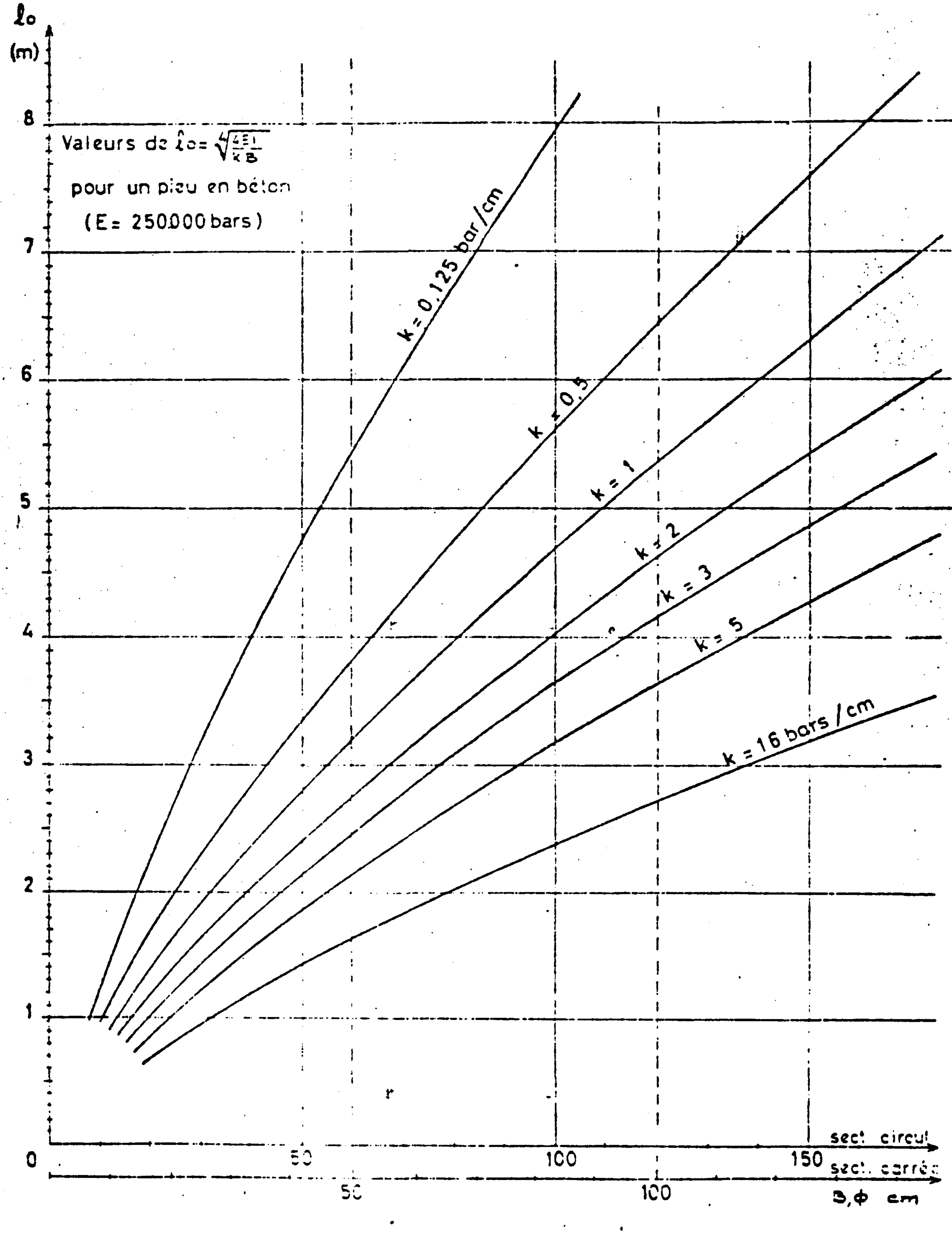
Le diagramme de la page suivante permet de déterminer, dans le cas d'un pieu en béton (E = 250.000 bars) la valeur de l_o en fonction de K_H et de la largeur B ou ∅ du pieu (section circulaire ou carrée). On constate que, pour un pieu de ∅ = 1 m., la valeur de l_o est le plus souvent inférieure à 5 m. même pour des K_H faibles.
On remarquera aussi qu'une erreur sur la valeur de K_H est sans influence notable sur l_o qui varie en fonction de la racine quatrième de $\frac{1}{K_H}$.

On établit qu'un pieu peut être considéré de longueur infinie quand sa profondeur D est supérieure à $3\ l_o$ (exactement $\pi\ l_o$). On calcule alors facilement les efforts et les déformations dans le pieu sous un cas de charge donné.

Nous donnons ci-après les formules applicables à un pieu, de longueur infinie, soumis à une charge horizontale H ou à un moment M agissant en tête.

./.

LONGUEUR DE TRANSFERT



- <u>pieu encastré en tête dans une semelle rigide et soumis à un effort horizontal H</u>

$$\begin{cases} V(Z) = \dfrac{H}{K_H\, B\, l_o}\, e^{-Z/l_o} \left(\cos \dfrac{Z}{l_o} + \sin \dfrac{Z}{l_o}\right) = \dfrac{H}{K_H\, B\, l_o}\; B \\[2ex] M(Z) = -\dfrac{H\, l_o}{2}\, e^{-Z/l_o} \left(\cos \dfrac{Z}{l_o} - \sin \dfrac{Z}{l_o}\right) = -\dfrac{H\, l_o}{2}\; D \\[2ex] T(Z) = H\, e^{-Z/l_o} \cos Z/l_o = HA \\[2ex] M(Z) \text{ charge de signe pour } Z = \dfrac{\pi}{4}\, l_o \end{cases}$$

- <u>pieu libre en tête soumis à un effort horizontal H</u>

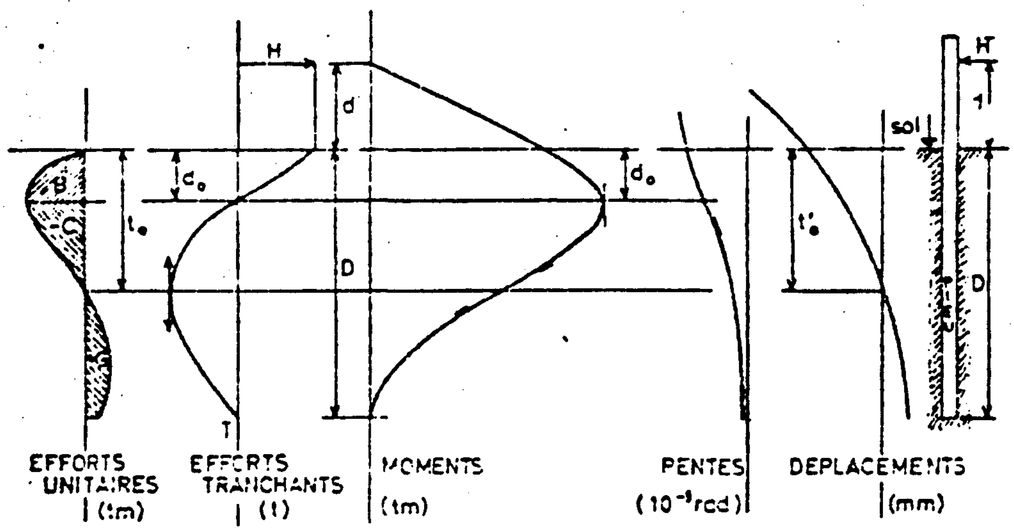
$$\begin{cases} V(Z) = \dfrac{2\,H}{K_H\, B\, l_o}\, e^{-Z/l_o} \cos Z/l_o = \dfrac{2\,H}{K_H\, B\, l_o}\; A \\[2ex] M(Z) = H\, l_o\, e^{-Z/l_o} \sin Z/l_o = H\, l_o\, C \\[2ex] T(Z) = H\, e^{-Z/l_o} \left(\cos Z/l_o - \sin Z/l_o\right) = H\, D \end{cases}$$

La valeur maximale de M (Z) est atteinte pour $Z = \dfrac{\pi}{4}\, l_o$

$$M_{max} = H\, l_o\, e^{-\pi/4} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \neq \underline{0{,}32\, H\, l_o}$$

./.

Pieu sollicité horizontalement . Courbes types



- <u>pieu libre en tête soumis à un moment M</u>

$$\begin{cases} V(Z) = \dfrac{2M}{K_H B l_o^2} e^{-Z/l_o} \left(\cos \dfrac{Z}{l_o} - \sin \dfrac{Z}{l_o}\right) = \dfrac{2M}{K_H B l_o^2} D \\ M(Z) = M e^{-Z/l_o} \left(\cos \dfrac{Z}{l_o} + \sin \dfrac{Z}{l_o}\right) = M B \\ T(Z) = -2 \dfrac{M}{l_o} e^{-Z/l_o} \sin \dfrac{Z}{l_o} = -2 \dfrac{M}{l_o} C \end{cases}$$

$M(Z)$ charge de signe pour $Z = \frac{3\pi}{4} l_o$

Les fonctions :

$$\begin{cases} A = e^{-x} \cos x \\ B = e^{-x} (\cos x + \sin x) \\ C = e^{-x} \sin x \\ D = e^{-x} (\cos x - \sin x) \end{cases}$$

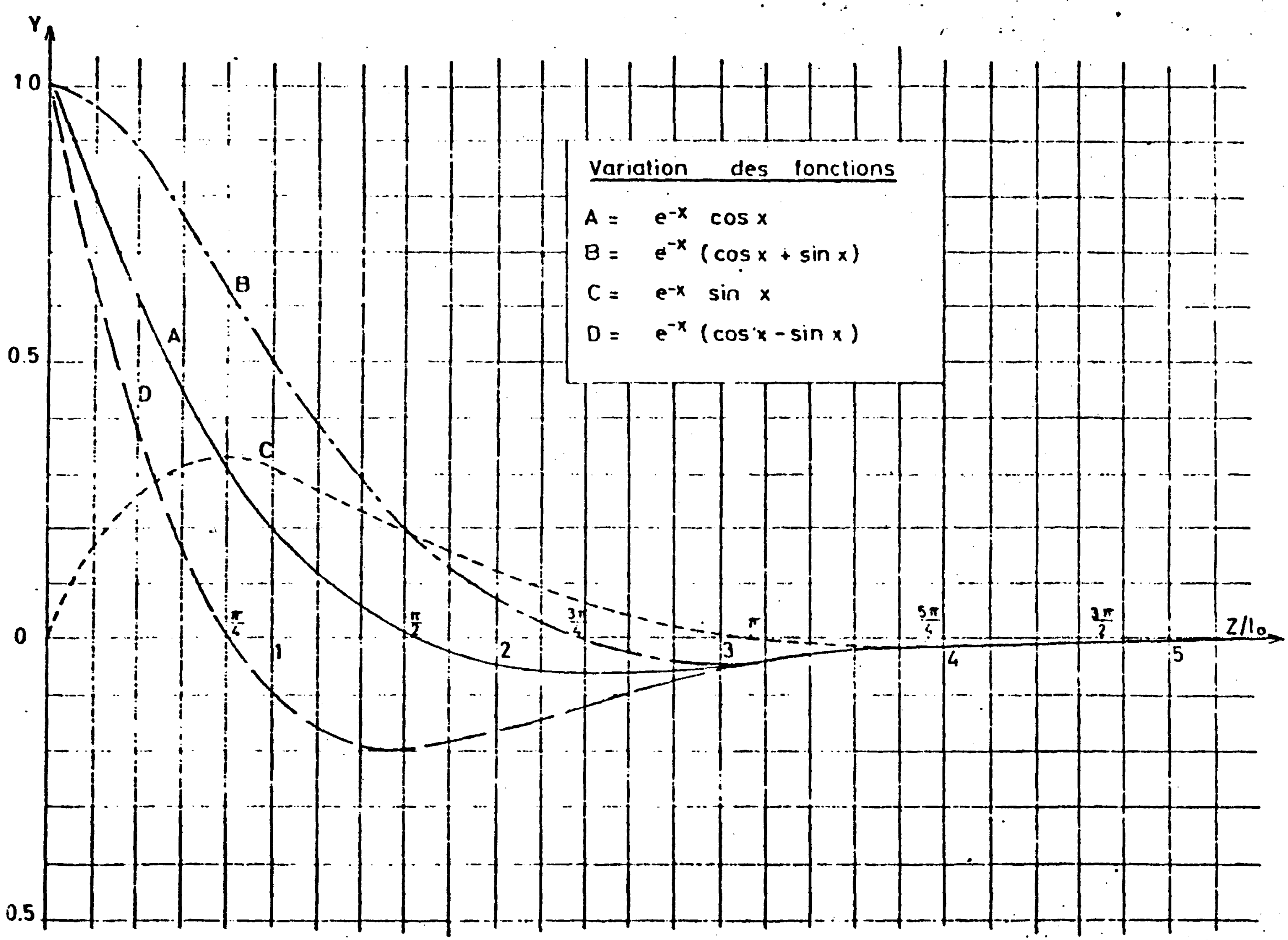
apparaissent dans les expressions de V, M et T.

Ces fonctions ont été tabulées par Timoshenko et sont représentées sur la figure de la page suivante.

On remarque qu'à partir de $x = \pi$ c'est-à-dire de $Z = \pi l_o$ les valeurs numériques de ces fonctions peuvent être considérées comme nulles à 0,05 près. La partie du pieu au-delà de la profondeur πl_o ne participe donc plus à la reprise des efforts, ce qui justifie que l'on peut considérer de <u>longueur infinie</u> tout pieu dont la profondeur est supérieure à $\underline{\pi l_o}$ $D \geqslant \pi l_o \sim 3 l_o$

Les coefficients de déformabilité d'un pieu isolé s'obtiennent en calculant les déformations en tête des pieux sous l'effet de H et M. On trouve :

./.



Y
1 0
0.5
0
0.5
Variation des fonctions
A = e^{-x} cos x
B = e^{-x} (cos x + sin x)
C = e^{-x} sin x
D = e^{-x} (cos x - sin x)
A
B
C
D
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$
π
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{2}$
1
2
3
4
5
Z/lo

II.6

$$S_R = \frac{4}{l_o^3\, K_H\, B}$$

$$S_{TR} = \frac{2}{l_o^2\, K_H\, B}$$

$$S_T = \frac{2}{l_o\, K_H\, B}$$

9.2- Module de réaction K_H variant linéairement avec la profondeur

On pourra se reporter aux travaux de M.T. Davisson publiés dans Highwag Research Record N° 333.

Soit K_H la valeur du module de réaction à la base du pieu. On a :

$$K_H\,(Z) = \frac{K_H}{D}\; Z$$

L'équation différentielle du 4è ordre permet de définir une longueur de transfert l'_o :

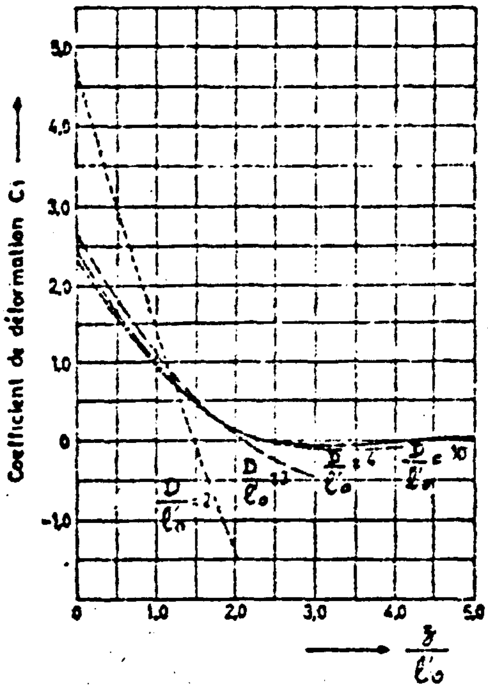
$$\boxed{l'_o = \sqrt[5]{\frac{EI}{K_H\; B}\; D}}$$

Davisson propose de considérer le pieu comme rigide pour $D < 2\, l'o$ et comme flexible pour $D > 4\, l'_o$.

Nous donnons ci-contre les abaques de Davisson permettant de déterminer pour un pieu flexible les déplacements V et les moments fléchissants M le long du pieu.

./.

MODULE DE REACTION K VARIANT LINEAIREMENT AVEC LA PROFONDEUR

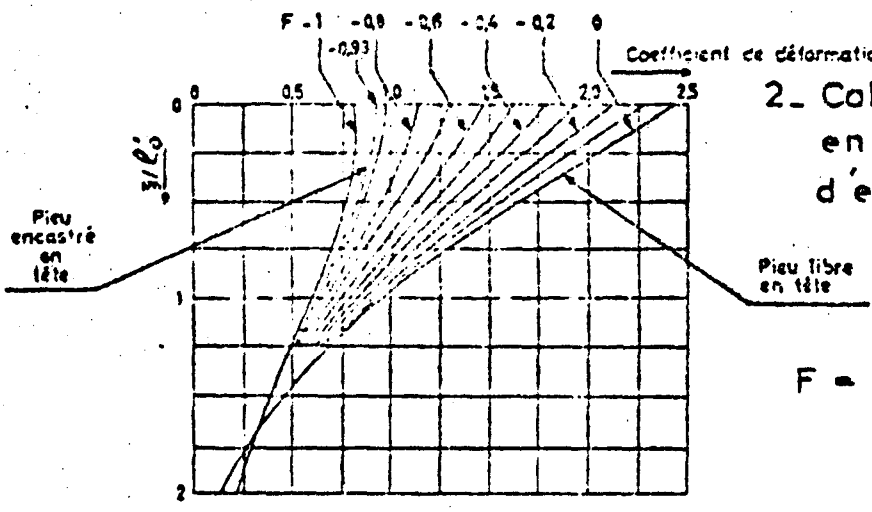


1. Calcul de la déformée d'un pieu libre en tête soumis à un effort horizontal

$$W(z) = C_1 H \frac{l_o'^3}{EI}$$

$$l'_o = \sqrt[5]{\frac{EID}{K_H B}}$$

$$K_H(z) = \frac{K_H}{D} z$$

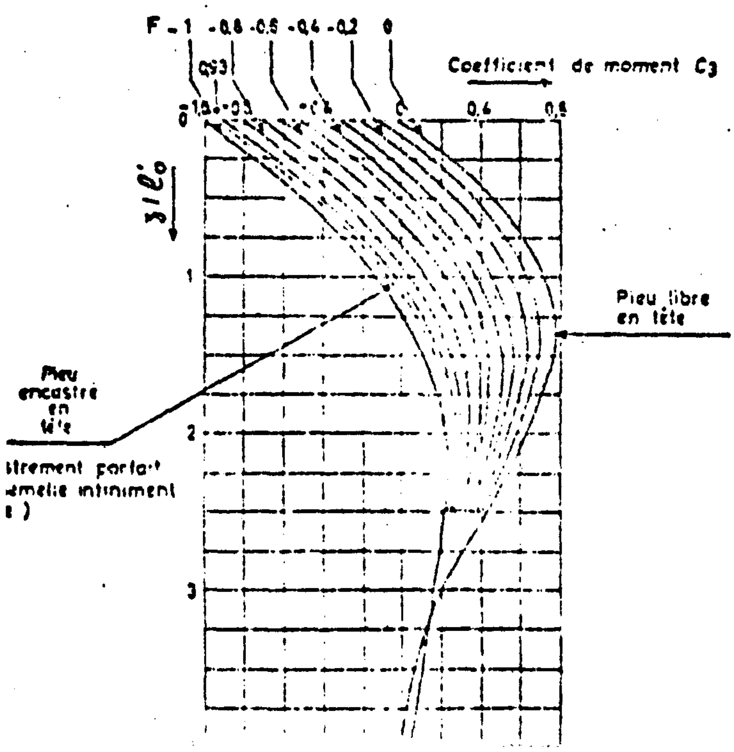


2. Calcul de la deformée d'un pie[u] en fonction de ses conditions d'encastrement (fonction F)

$$W(z) = C_2 H \frac{l_o'^3}{EI}$$

F = fonction d'encastrement

$$F = \frac{M}{H l'_o}$$



3. Calcul des moments dans un pieu en fonction de ses condition d'encastrement. (fonction F)

$$M(z) = C_3 H l'_o$$

10- DEFORMABILITE D'UN GROUPE DE PIEUX

Le calcul de la déformabilité des systèmes de pieux peut se ramener à deux schémas simplifiés qui couvrent la quasi-totalité des cas. Ces schémas sont les suivants :

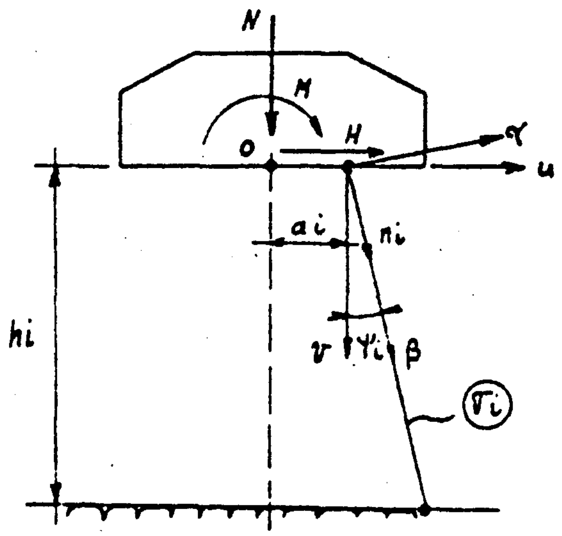
- fondation sur pieux bi-articulés, c'est-à-dire chargés suivant leurs axes.
- fondation sur pieux faisant appel aux réactions latérales du terrain.

10.1- Fondation sur pieux bi-articulés

On suppose que :

- les pieux sont bi-articulés et n'exercent par conséquent que des réactions dirigées suivant leurs axes.
- la semelle coiffant les têtes des pieux est infiniment rigide
- les pieux se comportent comme des éléments élastiques, sous les charges axiales, c'est-à-dire que leurs déformations sont proportionnelles aux efforts qui leur sont appliqués.

La méthode de calcul d'une fondation hyperstatique sur pieux bi-articulés a été développée par Courbon.



La fondation est soumise à un effort vertical N, à un moment fléchissant M et à un effort horizontal H appliqués au centre de gravité O de la base de la semelle. Chaque pieu de section σ_i, incliné de ψ_i sur la verticale et situé à la distance a_i du point O, supporte un effort normal égal à n_i

./.

La résolution du système s'obtient en écrivant :

- les équations d'équilibre
- les équations de déformation des pieux
- les conditions de compatibilité des déformations exprimant que les têtes des pieux sont solidaires de la semelle.

L'élasticité de chaque pieu est définie généralement par le coefficient Ki

$$K_i = \frac{E\,\sigma_i}{h_i}$$

on obtient un système d'équations linéaires reliant les efforts appliqués M, H, N aux déplacements de la semelle θ, u, v. Son inversion permet d'obtenir directement les équations de déformabilité de la fondation. Les calculs détaillés sont fournis en annexe.

<u>Cas particuliers</u>

a) <u>système de pieux identiques ($K_i = K$) et symétriques</u>

Les coefficients de déformabilité de la fondation sont :

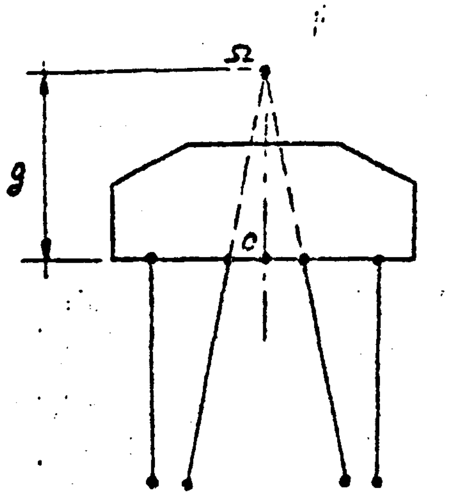
$$\begin{cases} S_R = \dfrac{K}{\Delta'} \sum \sin^2 \psi_i \cos \psi_i \\ S_{TR} = -\dfrac{K}{\Delta'} \sum a_i \sin \psi_i \cos^2 \psi_i \\ S_T = \dfrac{K}{\Delta'} \sum a_i^2 \cos^3 \psi_i \end{cases} \qquad S_V = \frac{1}{K \sum \cos^3 \psi_i}$$

avec $\Delta' = K^2 \left\{ \left(\sum a_i^2 \cos^3 \psi_i \sum \sin^2 \psi_i \cos \psi_i\right) - \left(\sum a_i \sin\psi_i \cos^2 \psi_i\right.\right.$

b) <u>Système de pieux identiques ($K_i = K$) et symétriques dont tous les pieux inclinés concourent en un même point Ω</u>

Les coefficients de déformabilité de la fondation sont :

./.



$$S_R = \frac{1}{K \sum a_i^2 \cos^3 \psi i}$$

$$S_{TR} = - \frac{g}{K \sum a_i^2 \cos^3 \psi i}$$

$$S_T = \frac{g^2}{K \sum a_i^2 \cos^3 \psi i} + \frac{1}{K \sum \sin^2 \psi i \cos \psi i}$$

g représentant la distance verticale du point Ω au point O.

Si le système ne comporte que des pieux inclinés concourant en Ω il ne peut être en équilibre que si M et H sont reliés par la relation :

$$M - Hg = 0$$

c) <u>Système de pieux symétriques et verticaux</u>

Le système n'est stable que sous l'effet de N et de H on a alors:

$$S_R = \frac{1}{\sum K_i a_i^2}$$

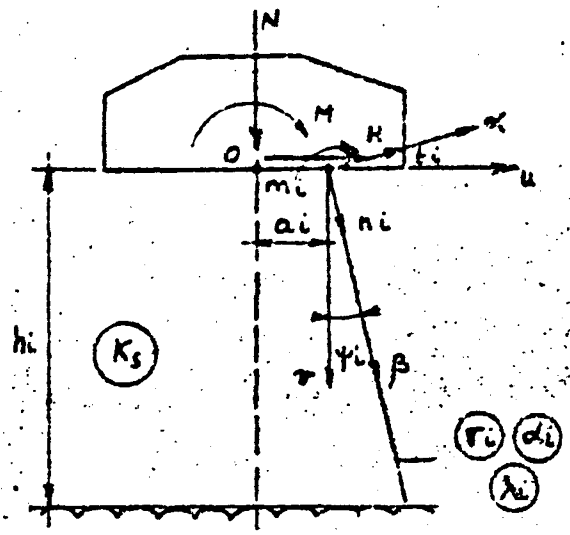
$$S_{TR} = 0 \qquad S_V = \frac{1}{\sum K_i}$$

$$S_T = \infty$$

10.2- <u>Fondation sur pieux soumis aux réactions latérales du terrain</u>

On suppose que :

- les pieux sont <u>encastrés</u> dans la semelle qui est infiniment rigide
- les pieux se déforment élastiquement sous les charges axiales
- les pieux fléchissent sous l'effet des réactions latérales du terrain, caractérisée par son module de réaction K_S.



On désigne par m_i, n_i, t_i les efforts en tête des pieux (moment fléchissant, effort normal, effort tranchant).

La résolution du système procède comme précédemment en écrivant :

- les équations d'équilibre
- les équations de déformation des pieux

Par rapport au système de référence ω, α, β rattaché directement au pieu, les équations de déformation d'un pieu plongé dans un milieu élastique de module de réaction K_S, sont :

$$\left|\begin{array}{l}
\omega_i = \dfrac{4}{\lambda_i^3\, K_S\, d_i}\; m_i + \dfrac{2}{\lambda_i^2\, K_S\, d_i}\; t_i \\[2ex]
\alpha_i = \dfrac{2}{\lambda_i^2\, K_S\, d_i}\; m_i + \dfrac{2}{\lambda_i\, K_S\, d_i}\; t_i \\[2ex]
\beta_i = \dfrac{n_i}{K_i \cos \psi_i} \qquad \left(K_i = \dfrac{E\, \sigma_i}{h_i}\right)
\end{array}\right.$$

d_i et σ_i étant respectivement le diamètre du pieu et l'aire de sa section droite λ_i représente la longueur de transfert des pieux.

$$\lambda_i = \sqrt[4]{\frac{4\, EI_i}{K_S\, d_i}} \qquad I_i : \text{ moment d'inertie de la section du pieu}$$

La résolution du système s'effectue comme dans le cas des pieux bi-articulés. Les calculs détaillés sont donnés en annexe.

./.

<u>Cas particulier</u> – <u>Système de pieux symétriques et verticaux</u>

On a, si tous les pieux sont identiques : ($\lambda_i = \lambda$ $\quad K_i = K$)

$$S_R = \frac{2}{2\,K \sum a_i^2 + nq\,\lambda^2}$$

$$S_{TR} = \frac{\lambda}{2\,K \sum a_i^2 + nq\,\lambda^2} \qquad\qquad S_V = \frac{1}{nK}$$

$$S_T = \frac{K \sum a_i^2 + nq\,\lambda^2}{nq\,(2\,K \sum a_i^2 + nq\,\lambda^2)}$$

avec $\quad q = \dfrac{K_s\ d\,\lambda}{2}$

et $\quad n$ = nombre de pieux

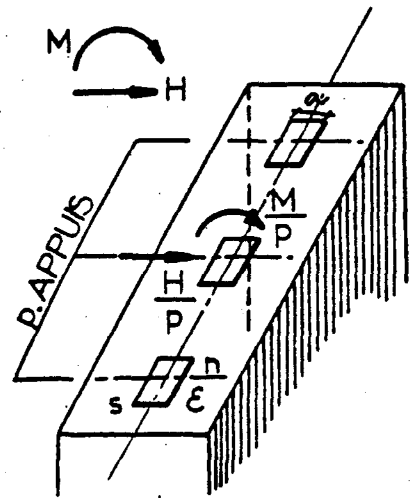
CHAPITRE III

PROBLEMES PARTICULIERS LIES A LA DEFORMABILITE DES APPUIS

$S_R = A$
$S_{TR} = B$
$S_T = C$

Afin de simplifier l'écriture, on désignera, dans le présent chapitre, les coefficients de déformabilité S_R, S_{TR} et S_T par A, B et C.

1- DEFORMABILITE DES PILES (OU POTEAUX) COMPORTANT UNE SEULE FILE D'APPUIS EN NEOPRENE



Si les piles ne comportent qu'une seule file d'appuis en néoprène, ceux-ci subissent une rotation θ sous l'effet de M et un déplacement horizontal u sous l'effet de H.

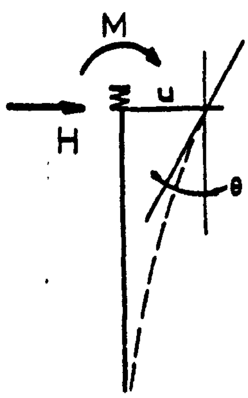
Les coefficients de déformabilité des appuis en néoprène sont alors égaux à :

$$\begin{cases} A_n = c' \dfrac{n}{p} \dfrac{\varepsilon^3}{GS \; a^4} \\ B_n = 0 \\ C_n = \dfrac{n}{p} \dfrac{\varepsilon}{GS} \end{cases}$$

p représentant le nombre d'appuis en néoprène.

Le coefficient B_n est nul car il n'y a ni rotation de l'appui sous l'effet de H, ni déplacement horizontal de celui-ci sous l'effet de M.

1,1- Piles comportant des appuis en néoprène disposés en tête



Soient A_p, B_p, C_p les coefficients de déformabilité du fût de pile, fondation comprise, la déformabilité totale de la pile sera définie par :

$$\begin{cases} \theta = (A_p + A_n)\, M + B_p\, H \\ u = B_p\, M + (C_p + C_n)\, H \end{cases}$$

./.

D'où :

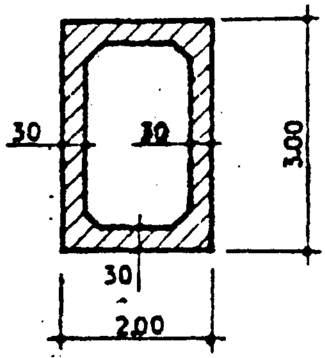
$$\left|\begin{array}{l} A = A_p + A_n \\ B = B_p \\ C = C_p + C_n \end{array}\right.$$

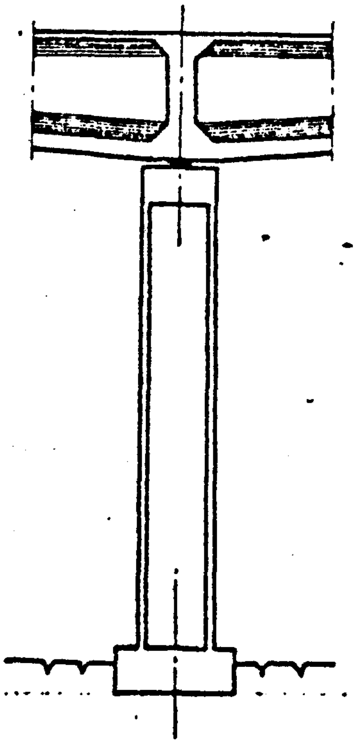
Par suite de la grande souplesse du caoutchouc, les coefficients A et C ont généralement des valeurs élevées, comparées à B et :

$$k = A - \frac{B^2}{C} \neq A \Rightarrow k = A_p + A_n - \frac{B_p^2}{C_p + C_n} \# A_p + A_n$$

La pile dont l'élasticité est très importante peut alors être assimilée à un appui simple ($k\ \infty$) avec une très bonne approximation.

<u>Exemple</u> : Déformabilité d'une pile parfaitement encastrée à sa base dans le terrain de fondation, comportant une seule file d'appuis en néoprène disposés en tête et supportant une réaction verticale maximale d'environ 1 000 t.





- Caractéristiques de la pile (inertie constante) :

  h = 15 m.   I = 1,9 m4

$E\ A_p = \frac{h}{I} = 7{,}9$

$E\ B_p = \frac{h^2}{2I} = 59$

$E\ C_p = \frac{h^3}{3I} = 590$

E : module d'élasticité longitudinale du béton

Deux appuis en néoprène disposés sur une file.

Dimensions des appuis en néoprène :

600 x 600 mm,   3 feuillets de (12 + 2) mm

./..

- Déformabilité des appuis en néoprène :

$a = 0,60$ m $\quad \frac{b}{a} = 1 \quad o' = 86,2 \quad S = 0,36$ m2 $\quad n = 3$

$p = 2 \quad \mathcal{E} = 1,2 \times 10^{-2}$ m $\quad G = 160$ t/m2 $\quad E = 3,9 \times 10^{6}$ t/m2

$$\left| \begin{array}{l} E\,A_n = E\,o'\,\frac{n}{p}\,\frac{\mathcal{E}^3}{GS\,a^4} = 116,7 \\ E\,B_n = 0 \\ E\,C_n = E\,\frac{n}{p}\,\frac{\mathcal{E}}{GS} = 1220 \end{array} \right.$$

- Déformabilité totale de la pile :

$$\left| \begin{array}{l} EA = 7,9 + 116,7 = 124,6 \\ EB = 59 \\ EC = 590 + 1220 = 1810 \end{array} \right.$$

Elasticité de la pile dans l'ouvrage à noeuds fixes :

$$Ek = E\left(A - \frac{B^2}{C}\right) = 124,6 - \frac{\overline{59}^2}{1810} \# \underline{123}$$

Elasticité de la pile sans néoprène :

$$Ek = 0,25\,\frac{h}{I} = \underline{2}$$

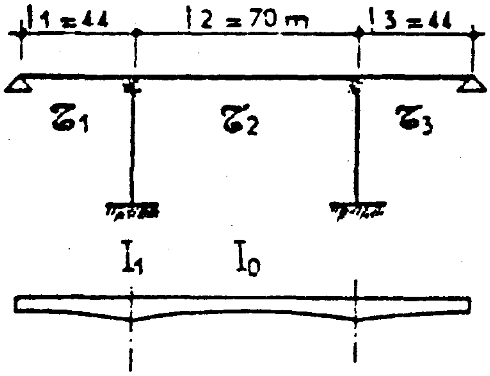
La présence d'une file d'appuis en néoprène en tête de la pile a donc pour effet de la rendre soixante fois plus souple.

Considérons maintenant un tablier à trois travées continues reposant sur deux piles identiques à la précédente et constitué d'une poutre-caisson à inertie variable dont les coefficients de forme sont :

travée centrale $(\mathcal{T}_2)$: $E\,a_2 = E\,C_2 = 8,72 \qquad Eb_2 = 5,95$

travée de rive $(\mathcal{T}_1)$: $E\,a_1 = 4,14$

./.



La distance de la fibre moyenne du tablier à la face supérieure de la pile est égale à 1,72 m

Les coefficients de déformabilité de la pile, calculés au niveau de la fibre moyenne du tablier, sont donc :

$$\begin{aligned} EA &= 124,6 \\ EB &= 59 + 124,6 \times 1,72 = 273 \\ EC &= 1810 + 124,6 \times \overline{1,72}^2 + 2 \times 59 \times 1,72 = 2380 \end{aligned}$$

Elasticité de la pile dans l'ouvrage à noeuds fixes :

$$Ek = 124,6 - \frac{\overline{273}^2}{2380} \# \underline{93}$$

Cherchons les valeurs des moments de flexion transmis aux piles quand l'une ou l'autre des travées adjacentes sont chargées. Soient M_l et M_c les moments de flexion dans le tablier, mesurés dans l'axe des piles, respectivement côté travée latérale et côté travée centrale, quand ces travées sont chargées ($E = 1$)

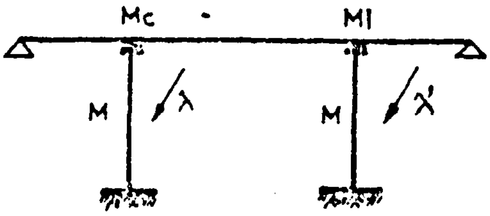
Elasticité de la travée latérale $k_1 = a_1 = 4,14$

Elasticité de la travée centrale :

$$K_c = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k}} = \frac{1}{0,242 + 0,011} = 3,95$$

$$k_c = C_2 - \frac{b_2^2}{a_2 + K_c} = 8,72 - \frac{\overline{5,95}^2}{8,72 + 3,95} = \underline{5,92}$$

Coefficients de transmission des moments aux piles :



$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{k_1}{k + k_1} = \frac{4,14}{93 + 4,14} = 0,042 \\ \lambda' &= \frac{k_c}{k + k_c} = \frac{5,92}{93 + 5,92} = 0,060 \end{aligned}$$

./.

D'où :

$M_t = -0{,}042\ M$ et $M = -0{,}60\ M_1$

En particulier, dans le cas où la travée centrale est surchargée ($s = 4{,}5$ t/ml)

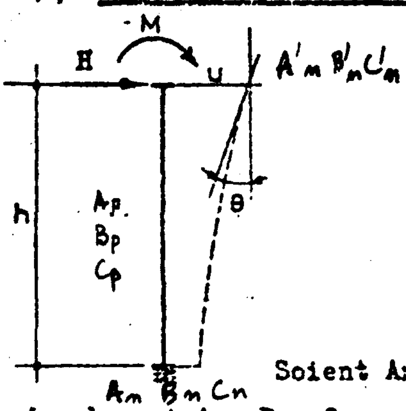
$$M_o = -\frac{b_2}{a_2 + b_2 + k_c}\ s\ \frac{l_2^2}{4} = -1760 \text{ tm}$$

$$M = 0{,}042 \times 1760 \# 75 \text{ tm}$$

On voit donc qu'il est parfaitement justifié de calculer un tel ouvrage comme s'il s'agissait d'une poutre continue sur appuis simples.

La connaissance des coefficients de déformabilité des piles n'est alors utile que pour l'étude de la répartition entre les différents appuis des efforts horizontaux appliqués au tablier, celle - ci ne dépendant d'ailleurs que du seul coefficient C.

1,2- Piles comportant des appuis en néoprène disposés en pied



Dans certaines circonstances (poutres à béquilles, portiques), on est amené à disposer les appuis en néoprène au pied des piles, afin de réduire la valeur des moments de flexion transmis aux fondations.

Soient An et Cn les coefficients de déformabilité du néoprène et Ap, Bp, Cp ceux du fût de pile. Il vient :

$$\left|\begin{array}{l} \theta = (Ap + An)\ M + (Bp + h\ An)\ Q \\ u = (Bp + h\ An)\ M + (Cp + Cn + h^2\ An)\ Q \end{array}\right.$$

$B_n = 0$

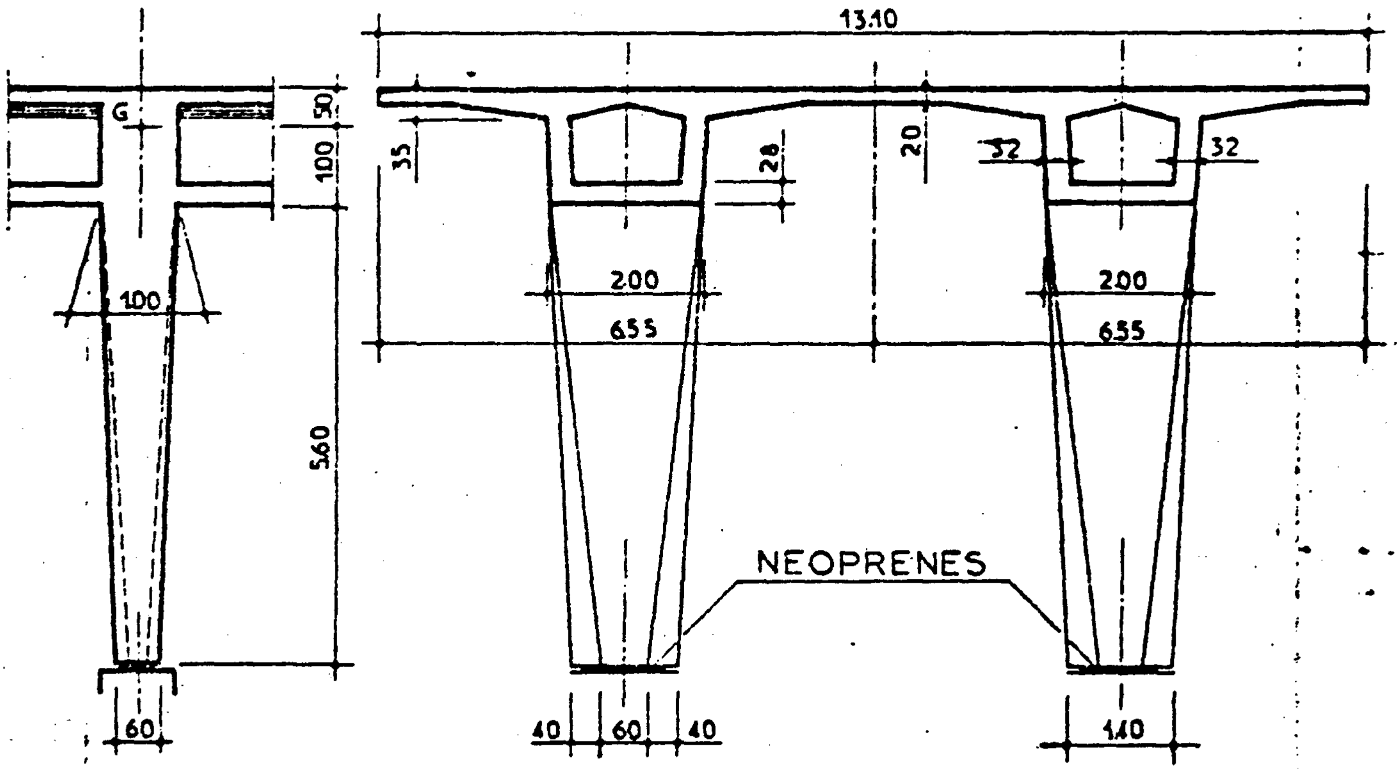
$$\left|\begin{array}{l} A'_m = A_m \\ B'_m = \cancel{B_m} + h A_m \\ C'_m = C_m + \cancel{2h B_m} + h^2 A_m \end{array}\right.$$

D'où :

$$\left|\begin{array}{l} A = Ap + An \\ B = Bp + h\ An \\ C = Cp + Cn + h^2\ An \end{array}\right.$$

$A = A_p + A'_m$
$B = B_p + B'_m$
$C = C_p + C'_m$

__Exemple__ : Déformabilité d'une béquille de portique reposant à son pied sur une file d'appuis en néoprène et supportant une réaction verticale maximale d'environ 1200 t.



- Caractéristiques de la pile pour l'ensemble de la section transversale (deux fûts)

  h = 6,6 m EAp = 56 EBp = 270 ECp = 1430

  Deux appuis en néoprène : 800 x 500 mm; 3 feuillets de (12 + 2) mm

- Déformabilité des appuis en néoprène :

  a = 0,50 m. $\frac{b}{a}$ = 1,6 c' = 73,0 S = 0,40 m2 n = 3 p = 2

  \- = 1,2. 10^{-2}m G = 160 t/m2 E = 3,9 x 10^{6} t/m2

$$EAn = E\,C'\,\frac{n}{p}\;\frac{3}{GS\,a^{4}} = 182$$

$$EBn = 0$$

$$ECn = E\,\frac{n}{p}\;\frac{\varepsilon}{GS} = 1105$$

./.

- Déformabilité totale de la pile :

$$\left| \begin{array}{l} EA = E\ (Ap + An) = 56 + 182 = 238 \\ EB = E\ (Bp + h\ An) = 270 + 6{,}6 \times 182 = 1470 \\ EC = E\ (Cp + Cn + h^2\ An) = 1430 + 1105 + \overline{6{,}6}^2 \times 182 = 10.460 \end{array} \right.$$

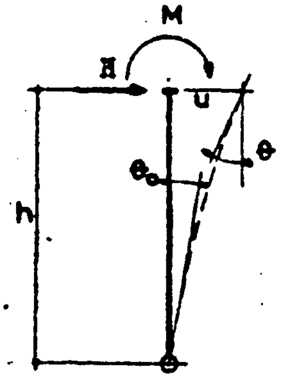
Elasticité de la pile dans l'ouvrage à noeuds fixes

$$Ek = 238 - \frac{\overline{1470}^2}{10.460} \# \underline{32}$$

Elasticité de la pile sans néoprènes:

$$Ek = E\ (Ap - \frac{B_p^2}{C}) = 56 - \frac{\overline{270}^2}{1430} \# 5$$

Il est intéressant de comparer les valeurs précédentes avec l'élasticité que l'on obtiendrait si on disposait au pied de la pile une articulation Freyssinet au lieu d'appuis en néoprène.



Soit θ_o la rotation prise par l'articulation sous l'effet de M et H appliqués en tête de la pile

$$\left| \begin{array}{l} \theta = \theta_o + Ap\ M + Bp\ H \\ u = h\ \theta_o + B_p\ M + Cp\ H \end{array} \right.$$

Au droit de l'articulation :

$$M + H\ h = 0$$

Dans l'ouvrage à noeuds fixes : $u = 0$

$$\theta_o = \frac{1}{h^2}\ (Cp - h\ B_p)\ M$$

$$\text{et } \theta = \left[\frac{1}{h^2}\ (Cp - h\ Bp) + A_p - \frac{Bp}{h}\right]\ M = k\ M$$

D'où

$$k = Ap - 2\ \frac{B_p}{h} + \frac{C_p}{h^2}$$

$$Ek = 56 - \frac{2 \times 2{,}70}{6{,}6} + \frac{1430}{\overline{6{,}6}^2} = 56 - 82 + 33 = \underline{7}$$

Un calcul analogue peut s'appliquer au néoprène en négligeant sa raideur à la rotation. On a alors :

./.

$$\left| \begin{array}{l} \theta = \theta_o + A_p M + B_p Q \\ u = h \theta + B_p M + (C_p + C_n) Q \end{array} \right.$$

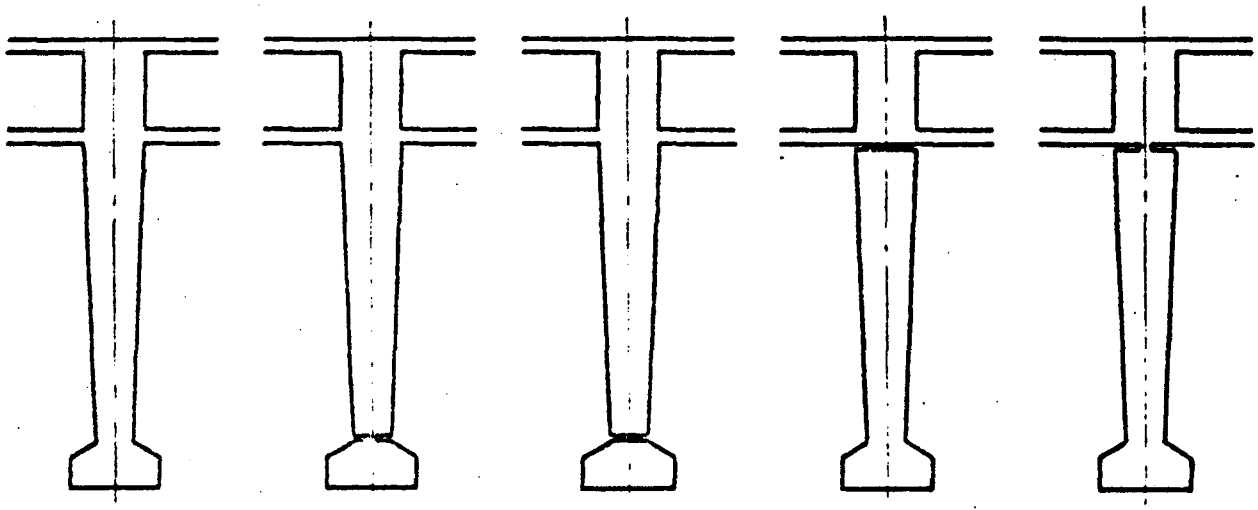
Il vient comme précédemment :

$$k = A_p - 2 \frac{B_p}{h} + \frac{C_p + C_n}{h^2}$$

$$Ek = 56 - \frac{2 \times 2,70}{6,6} + \frac{2535}{6,6^2} = 56 - 82 + 58 \# 32$$

La présence d'appuis en néoprène en pied des béquilles assouplit considérablement le portique, même articulé. La raison en est que le néoprène, à l'encontre d'une articulation, autorise un déplacement horizontal du pied des béquilles.

Le tableau ci-dessous indique les différentes valeurs prises par l'élasticité des béquilles en fonction de la nature et de la position des appareils d'appui.

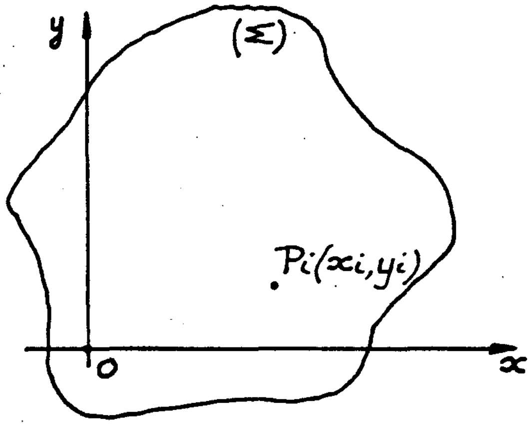


	Encastrée haut et bas (véritable portique)	Encastrée en haut. Articulée en bas (portique articulé)	Encastrée en haut Néoprène en bas (semi-portique)	Néoprène en haut. Encastrée en bas (poutre continue)	Articulée en haut Encastrée en bas (poutre continue)
EA	- 56	-	238	238	∞
EB	270	-	1470	270	270
EC	1430	-	10460	2535	1430
Ek	<u>5</u>	<u>7</u>	<u>32</u>	<u>209</u>	<u>∞</u>

2- REPARTITION DES EFFORTS HORIZONTAUX ENTRE LES DIFFERENTS APPUIS D'UNE STRUCTURE PLANE SOLLICITEE DANS SON PLAN

2,1- Généralités

Etant donné une structure plane (Σ), de forme quelconque, reposant sur n appuis Pi (xi, yi) réagissant élastiquement à des sollicitations parallèles au plan de la structure, on cherche à déterminer les efforts créés au droit de chacun des appuis sous l'effet de déformations imposées ou de forces appliquées à la structure.



Soit oxy un système d'axes rectangulaires situé dans le plan de la structure.

Chaque appui Pi est caractérisé par ses raideurs r_{xi} et r_{yi} parallèlement à Ox et Oy.

Les raideurs r_{xi} et r_{yi} représentent les efforts horizontaux qu'il est nécessaire d'appliquer aux appuis pour que ceux-ci subissent des déplacements unités respectivement dans les directions Ox et Oy.

On a donc
$$\begin{cases} F_{xi} = r_{xi} \; u_{xi} \\ F_{yi} = r_{yi} \; u_{yi} \end{cases}$$

u_{xi} et u_{yi} étant les déplacements parallèles à Ox et Oy et F_{xi} et F_{yi} les efforts qui les produisent.

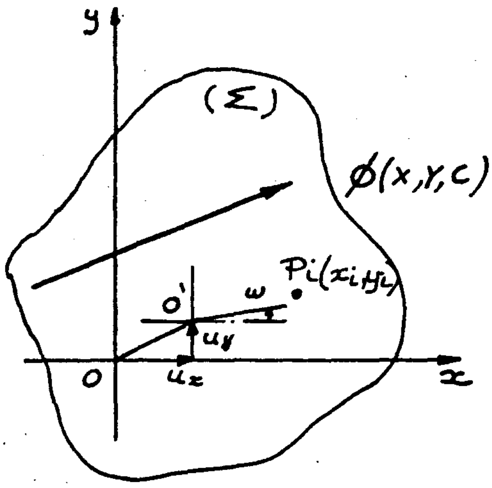
On supposera dans les calculs qui suivent la structure (Σ) incompressible.

2,2- Effet d'une force agissant dans le plan de la structure
(Problème du freinage des véhicules sur un tablier de pont)

Prenons comme origine des axes Ox et Oy le barycentre des appuis du tablier affectés des masses r_{xi} et r_{yi} égales à leurs raideurs.

./.

Soit ϕ la force agissant dans le plan de la structure. ϕ est définie par ses composantes X, Y et par le couple C d'axe vertical.



Sous l'effet de ϕ, (Σ) subit un déplacement d'ensemble D se décomposant en une translation (u_x, u_y) et une rotation (ω).

Dans sa position d'équilibre, la structure est soumise à la force ϕ et aux efforts antagonistes créés dans chaque appui par D.

Au droit de l'appui P_i, les déplacements sont :

$$\begin{cases} u_{xi} = u_x - y_i\,\omega \\ u_{yi} = u_y + x_i\,\omega \end{cases}$$

Il en résulte des efforts :

$$\begin{cases} F_{xi} = r_{xi}\,(u_x - y_i\,\omega) = u_x\,r_{xi} - y_i\,\omega\,r_{xi} \\ F_{yi} = r_{yi}\,(u_y + x_i\,\omega) = u_y\,r_{yi} + x_i\,\omega\,r_{yi} \end{cases}$$

L'équilibre statique de la structure permet d'écrire :

$$\begin{cases} X = \Sigma F_{xi} = u_x \,\Sigma\, r_{xi} - \omega\, \Sigma\, y_i\, r_{xi} & (1) \\ Y = \Sigma F_{yi} = u_y \,\Sigma\, r_{yi} + \omega\, \Sigma\, x_i\, r_{yi} & (2) \\ C = \Sigma C\, x_{yi} = -\,\Sigma\,(F_{xi}\, y_i - F_{yi}\, x_i) & (3) \end{cases}$$

L'origine des coordonnées étant le barycentre des masses r_{xi} et r_{yi}, on a : $\Sigma\, y_i\, r_{xi} = 0$ $\quad \Sigma\, x_i\, r_{yi} = 0$

et les équations (1) et (2) deviennent :

$$\begin{cases} X = u_x \,\Sigma\, r_{xi} \\ Y = u_y \,\Sigma\, r_{yi} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \boxed{\begin{array}{ll} u_x = \dfrac{X}{\Sigma\, r_{xi}} \\[2ex] u_y = \dfrac{Y}{\Sigma\, r_{yi}} \end{array}} \quad \begin{array}{l} (4) \\[2ex] (5) \end{array}$$

./.

De même, l'équation (3) s'écrit :

$$C = \sum(- u_x r_{xi} y_i + \omega y_i^2 r_{xi} + u_y x_i r_{yi} + \omega x_i^2 r_{yi})$$

$$C = \omega \sum (y_i^2 r_{xi} + x_i^2 r_{yi})$$

En appelant I_p le <u>moment d'inertie polaire</u> des masses r_{xi} et r_{yi}, on a :

$$C = \omega I_p$$

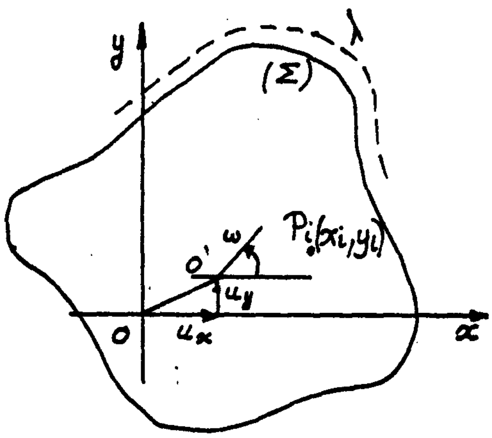
D'où :
$$\boxed{\omega = \frac{C}{I_p}} \qquad (6)$$

Connaissant le déplacement (u_x, u_y, ω) de la structure sous l'effet de la force horizontale $\emptyset$, il est facile de déterminer les efforts apparaissant en tête de chacun des appuis Pi :

$$\begin{cases} F_{xi} = - r_{xi} \left(\dfrac{X}{\sum r_{xi}} - y_i \dfrac{C}{I_p} \right) \\ F_{yi} = - r_{yi} \left(\dfrac{Y}{\sum r_{yi}} + x_i \dfrac{C}{I_p} \right) \end{cases}$$

Si la force $\emptyset$ passe par le barycentre des masses r_{xi} et r_{yi}, la structure se déplace sans tourner. Ce point est donc le <u>centre de rotation nulle.</u>

2,3- <u>Effet des variations linéaires de la structure</u> (Problème de la dilatation d'un plancher ou d'un tablier de pont)



Soit λ le coefficient de variation linéaire de la structure.

Sous l'effet des variations linéaires, la structure subit un déplacement d'ensemble D se décomposant en une translation (u_x, u_y) et une rotation (ω).

Au droit de l'appui Pi, les déplacements sont:

./.

$$\begin{cases} u_{xi} = u_x - y_i\,\omega + \lambda\, x_i \\ u_{yi} = u_y + x_i\,\omega + \lambda\, y_i \end{cases}$$

Il en résulte des efforts :

$$\begin{cases} F_{xi} = u_x\, r_{xi} - y_i\,\omega\, r_{xi} + \lambda\, x_i\, r_{xi} \\ F_{yi} = u_y\, r_{yi} + x_i\,\omega\, r_{yi} + \lambda\, y_i\, r_{yi} \end{cases}$$

La structure est soumise à un système de forces identiquement nul. L'équilibre se traduit donc par :

$$\begin{cases} \sum F_{xi} = 0 = u_x \sum r_{xi} - \omega \sum y_i\, r_{xi} + \lambda \sum x_i\, r_{xi} & (1) \\ \sum F_{yi} = 0 = u_y \sum r_{yi} + \omega \sum x_i\, r_{yi} + \lambda \sum y_i\, r_{yi} & (2) \\ \sum C_{xyi} = 0 = - \sum (F_{xi}\, y_i - F_{yi}\, x_i) & (3) \end{cases}$$

L'origine des coordonnées étant le barycentre des masses r_{xi} et r_{yi}, on a, comme précédemment :

$$\sum y_i\, r_{xi} = 0 \qquad \sum x_i\, r_{yi} = 0$$

et les équations (1) et (2) deviennent :

$$\boxed{\begin{array}{ll} u_x = - \lambda \dfrac{\sum x_i\, r_{xi}}{\sum r_{xi}} = 0 & \quad (4) \\[2em] u_y = - \lambda \dfrac{\sum y_i\, r_{yi}}{\sum r_{yi}} = 0 & \quad (5) \end{array}}$$

De même, l'équation (3) s'écrit :

$$\omega \sum (y_i^2\, r_{xi} + x_i^2\, r_{yi}) + \lambda \sum x_i\, y_i\, (r_{xi} - r_{yi}) = 0$$

$$\omega\, I_p + \lambda \sum x_i\, y_i\, (r_{xi} - r_{yi}) = 0$$

D'où :

$$\boxed{\omega = - \lambda \frac{\sum x_i\, y_i\, (r_{xi} - r_{yi})}{I_p}} \qquad (6)$$

../.

Quand la structure est soumise à une variation linéaire, son centre de dilatation, c'est-à-dire le point qui demeure immobile, est le barycentre des appuis affectés des masses r_{xi} et r_{yi}.

La structure tourne autour de ce point d'un angle ω défini par l'équation (6). On en déduit facilement les efforts apparaissant en tête de chacun des appuis :

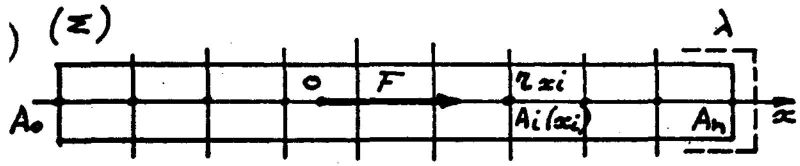
$$\begin{cases} F_{xi} = \lambda \left(y_i \, r_{xi} \dfrac{\sum x_i \, y_i \, (r_{xi} - r_{yi})}{I_p} + x_i \, r_{xi} \right) \\[2ex] F_{yi} = \lambda \left(- x_i \, r_{yi} \dfrac{\sum x_i \, y_i \, (r_{xi} - r_{yi})}{I_p} + y_i \, r_{yi} \right) \end{cases}$$

Si les appuis sont à raideur égale dans les deux directions Ox et Oy, on a :

$r_{xi} = r_{yi}$ et la rotation de la structure est nulle. D'où :

$$\begin{cases} F_{xi} = r_{xi} \, \lambda \, x_i \\ F_{yi} = r_{yi} \, \lambda \, y_i \end{cases}$$

2,4- Cas particuliers : structure linéaire reposant sur n appuis alignés (tablier de pont rectiligne)



Le centre de dilatation O de l'ouvrage est le barycentre des appuis affectés des masses r_{xi}. Sous l'effet d'une force F agissant dans l'axe des appuis, la structure se déplace sans tourner.

Les efforts en tête de chaque appui sont donnés par :

$F_{xi} = - F \dfrac{r_{xi}}{\sum r_{xi}}$ et le déplacement de la structure est

$$u_x = \frac{F}{\sum r_{xi}}$$

sous l'effet d'une variation linéaire λ, le point O demeure immobile et chaque appui se déplace de : $u_{xi} = \lambda \, x_i$

Les efforts apparaissant en tête des appuis sont donc: $F_{xi} = r_{xi} \, \lambda \, x_i$

ANNEXE I

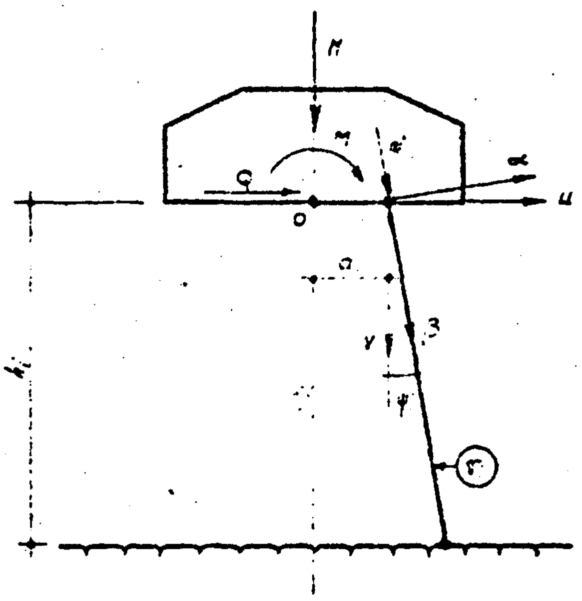
DEFORMABILITE DES FONDATIONS SUR PIEUX

ANNEXE I

DEFORMABILITE DES FONDATIONS SUR PIEUX

1 - COEFFICIENTS DE DEFORMABILITE D'UNE FONDATION SUR PIEUX BI-ARTICULES

1,1- Equations générales :



La semelle repose sur un système de pieux verticaux et inclinés, de section égale à σ_i, arrêtés sur une couche dure située à une profondeur h_i sous la tête des pieux.

On suppose que les pieux sont bi-articulés, c'est-à-dire qu'ils n'exercent que des réactions n_i dirigée suivant leurs axes et on néglige la déformabilité de la semelle.

Dans le cas le plus général, sous l'effet d'un effort normal N, d'un moment fléchissant M et d'un effort horizontal Q appliqués au centre de gravité O de la base de la semelle, celle-ci se déplace comme un solide invariable.

Soient v, u, θ les composantes de ce déplacement On peut écrire les relations suivantes :

a) Equations d'équilibre

$$\left\{\begin{array}{l} M = \sum a_i \, n_i \cos \psi_i \\ Q = \sum n_i \sin \psi_i \\ N = \sum n_i \cos \psi_i \end{array}\right. \qquad (11)$$

./..

b) <u>Equations de déformation</u>

$$\beta_i = \frac{n_i}{E\,\sigma_i}\,\frac{h_i}{\cos\psi_i} = \frac{n_i}{K_i\cos\psi_i} \quad (12) \quad \left(K_i = \frac{E\,\sigma_i}{h_i}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_i = u_i \cos\psi_i - v_i \sin\psi_i \\ \beta_i = u_i \sin\psi_i + v_i \cos\psi_i \end{array}\right. \quad (13)$$

c) <u>Conditions de compatibilité</u>

$$\left\{\begin{array}{l} u_i = u \\ v_i = v + a_i\theta \end{array}\right. \quad (4)$$

On tire des conditions (3) et (4) les déplacements β_i de la tête des pieux :

$$\beta_i = \sin\psi_i\, u + \cos\psi_i\, v + a_i \cos\psi_i\,\theta$$

On obtient alors le système suivant :

$$(5)\quad \boxed{\begin{array}{l} M = \theta\sum K_i a_i^2\cos^3\psi_i + u\sum K_i a_i \sin\psi_i\cos^2\psi_i + V\sum K_i a_i\cos^3\psi_i \\ Q = \theta\sum K_i a_i \sin\psi_i\cos^2\psi_i + u\sum K_i \sin^2\psi_i\cos\psi_i + V\sum K_i \sin\psi_i\cos^2\psi_i \\ N = \theta\sum K_i a_i\cos^3\psi_i + u\sum K_i\sin\psi_i\cos^2\psi_i + V\sum K_i\cos^3\psi_i \end{array}}$$

Posons

$$r_{11} = \sum K_i a_i^2 \cos^3\psi_i$$

$$r_{12} = \sum K_i a_i \sin\psi_i \cos^2\psi_i = r_{21}$$

$$r_{13} = \sum K_i a_i \cos^3\psi_i = r_{31}$$

./.

$$r_{22} = \sum K_i \sin^2 \psi_i \cos \psi_i$$

$$r_{23} = \sum K_i \sin \psi_i \cos^2 \psi_i = r_{32}$$

$$r_{33} = \sum K_i \cos^3 \psi_i$$

Dans les cas courants, pieux de même section s'arrêtant sur une couche horizontale, tous les coefficients k_i sont égaux ($K_i = K$) et peuvent se mettre en facteur.

Le système d'équations ci-dessus (5) s'écrit en représentation matricielle :

$$\begin{vmatrix} M \\ Q \\ N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \theta \\ u \\ V \end{vmatrix} .$$

La matrice $\left[r_{ij} \right]$ est symétrique. Son inversion donne :

$$\begin{vmatrix} \theta \\ u \\ V \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M \\ Q \\ N \end{vmatrix} \qquad (6)$$

La matrice inverse $\left[s_{ij} \right] = \left[r_{ij} \right]^{-1}$ représente la matrice d'élasticité du système de pieux. Elle est également symétrique :

$$s_{ij} = s_{ji}$$

L'inversion précédente suppose que la matrice $\left[r_{ij} \right]$ est régulière c'est-à-dire que son déterminant a une valeur finie non nulle.

./..

1,2- Cas d'un système de pieux symétriques

Les piles sont le plus souvent fondées sur des systèmes de pieux symétriques. On a alors :

$$r_{13} = r_{31} \quad \sum K_i \, a_i \cos^3 \psi_i = 0$$

$$r_{23} = r_{32} = \sum K_i \sin \psi_i \cos^2 \psi_i = 0$$

et le système (6) devient :

$$\begin{vmatrix} \theta \\ u \\ v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 \\ s_{21} & s_{22} & 0 \\ 0 & 0 & s_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M \\ Q \\ N \end{vmatrix} \qquad (7)$$

Le déterminant de la matrice $\left[r_{ij} \right]$ est :

$$\Delta = r_{11} \cdot r_{22} \cdot r_{33} - r_{33} \cdot \overline{r_{12}}^2 = r_{33} \left(r_{11} - r_{22} - \overline{r_{12}}^2 \right) = r_{33} \quad \Delta'$$

D'où :

$$s_{11} = \frac{r_{22} - r_{33}}{\Delta} = \frac{r_{22}}{\Delta'}$$

$$s_{12} = - \frac{r_{21} - r_{33}}{\Delta} = - \frac{r_{21}}{\Delta'}$$

$$s_{22} = \frac{r_{11} - r_{33}}{\Delta} = \frac{r_{11}}{\Delta'}$$

$$s_{33} = \frac{r_{11} - r_{22} - \overline{r_{12}}^2}{\Delta} = \frac{1}{r_{33}}$$

Pour un système de pieux symétriques les K_i sont généralement égaux :

$$\Delta' = K^2 \left[\left(\sum a_i^2 \cos^3 \psi_i \sum \sin^2 \psi_i \cos \psi_i \right) - \left(\sum a_i \sin \psi_i \cos^2 \psi_i \right)^2 \right]$$

./.

Il vient alors :

$$\boxed{\begin{aligned} A_f &= S_{11} = \frac{K}{\Delta'} \sum \sin^2 \psi_i \cos \psi_i \\ B_f &= S_{12} = -\frac{K}{\Delta'} \sum a_i \sin \psi_i \cos^2 \psi_i \\ C_f &= S_{22} = \frac{K}{\Delta'} \sum a_i^2 \cos^3 \psi_i \end{aligned}} \quad \text{et } S_{33} = \frac{1}{K \sum \cos^3 \psi_i}$$

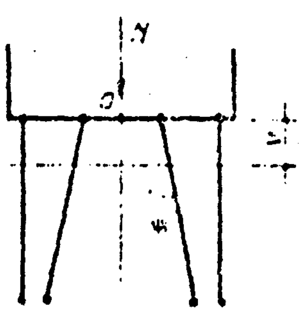
A_f, B_f, C_f sont les coefficients de déformabilité du système de pieux au niveau C de la tête des pieux.

Efforts dans un système de pieux symétriques

On peut obtenir les valeurs des efforts dans les pieux en fonction des efforts appliqués à la semelle :

$$n_i = K \beta_i \cos \psi_i = K (\cos \psi_i \sin \psi_i \, u + \cos^2 \psi_i \, v + a_i \cos^2 \psi_i \, \theta)$$

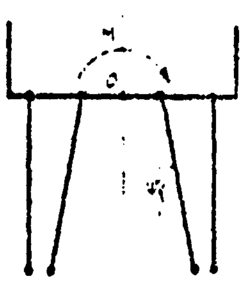
a) Effet de N seul



$\theta = u = o$ $v = s_{33} N$

$$n_i = \frac{\cos^2 \psi_i}{\sum \cos^3 \psi_i} N$$

Chaque pieu incliné est donc équivalent à un pieu vertical de section $\sigma \cos^3 \psi_i$



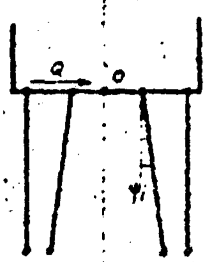
b) Effet de M seul

$\theta = s_{11} M$ $u = s_{21} M$ $v = 0$

./.

$$n_i = \frac{a_i \cos^2\psi_i \, \Sigma \sin^2\psi_i \cos\psi_i - \sin\psi_i \cos\psi_i \, \Sigma a_i \sin\psi_i \cos^2\psi_i}{(\Sigma a_i^2 \cos^3\psi_i \, \Sigma \sin^2\psi_i \cos\psi_i) - (\Sigma a_i \sin\psi_i \cos^2\psi_i)^2} M$$

c) <u>Effet de Q seul</u>

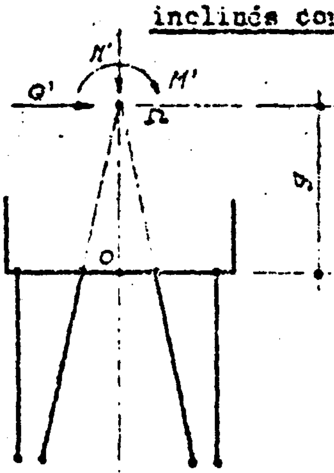


$$\theta = s_{12}\, Q \qquad u = s_{22}\, Q \qquad v = 0$$

$$n_i = \frac{\sin\psi_i \cos\psi_i \, \Sigma a_i^2 \cos^3\psi_i - a_i \cos^2\psi_i \, \Sigma a_i \sin\psi_i \cos^2\psi_i}{(\Sigma a_i^2 \cos^3\psi_i \, \Sigma \sin^2\psi_i \cos\psi_i) - (\Sigma a_i \sin\psi_i \cos^2\psi_i)^2} Q$$

n_i =

1,3- <u>Cas d'un système de pieux symétriques dont tous les pieux inclinés concourent en un même point</u>



Si on calcule les déplacements θ', u', v' en Ω, point de concours des pieux inclinés où les éléments de réduction des efforts appliqués sont : M', Q', N', on a :

$$a_i \sin \psi_i = 0$$

puisque pour un pieu vertical $\sin \psi_i = 0$ et pour un pieu incliné $a_i = 0$. D'où :

$$B'_r = 0 \quad \text{et :}$$

$$\theta' = \frac{M'}{K \, \Sigma a_i^2 \cos^3 \psi_i} \qquad u' = \frac{Q'}{K \, \Sigma \sin^2 \psi_i \cos \psi_i}$$

(Ω est le centre élastique du système de pieux)

./..

Les déplacements θ, u, v et les efforts M, Q, N en O sont reliés aux déplacements et aux efforts en Ω par :

$$\theta' = \theta \qquad u' = u + g\theta \qquad v' = v$$

$$M' = M - Qg \qquad Q' = Q \qquad N' = N$$

Il vient donc :

$$\boxed{\begin{aligned} A_f &= \frac{1}{K \Sigma\, a_i^2 \cos^3 \psi_i} \\ B_f &= -\frac{g}{K \Sigma\, a_i^2 \cos^3 \psi_i} \\ C_f &= \frac{g^2}{K \Sigma\, a_i^2 \cos^3 \psi_i} + \frac{1}{K \Sigma \sin^2 \psi_i \cos \psi_i} \end{aligned}}$$

Les efforts dans les pieux sont :

$$n_i = \frac{\cos^2 \psi_i}{\Sigma \cos^3 \psi_i} N + \frac{a_i \cos^2 \psi_i}{\Sigma\, a_i^2 \cos^3 \psi_i} M + \frac{\sin \psi_i \cos \psi_i}{\Sigma \sin^2 \psi_i \cos \psi_i} Q$$

En remplaçant les pieux inclinés par des pieux verticaux de section $\sigma \cos^3 \psi_i$, on peut écrire :

S : section totale formée par l'ensemble des pieux

I : moment d'inertie de l'ensemble des pieux par rapport au point O.

$$S = \Sigma\, \sigma \cos^3 \psi_i \qquad I = \Sigma\, a_i^2\, \sigma \cos^3 \psi_i$$

La relation précédente devient alors :

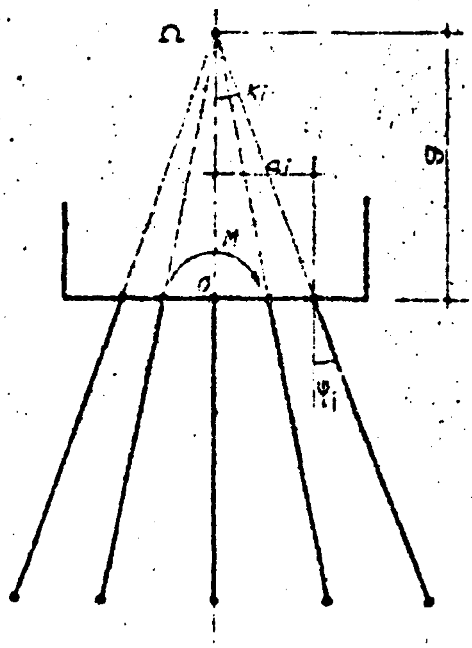
$$n_i = \left(\frac{N}{S} + \frac{M a_i}{I} \right) \sigma \cos^2 \psi_i + \frac{\sin \psi_i \cos \psi_i}{\Sigma \sin^2 \psi_i \cos \psi_i} Q$$

./.

On retrouve ainsi, pour l'effet de N et de M la formule donnant les contraintes normales dans une section fléchie, ce qui tient à l'identité des problèmes.

1,4- Cas d'un système de pieux symétriques ne comportant que des pieux inclinés concourant en un même point

Si tous les pieux concourent en un point Ω, la matrice (r_{ij}) n'est pas régulière, son déterminant étant nul. On a en effet :



$$\operatorname{tg} \psi_i = \frac{a_i}{g}$$

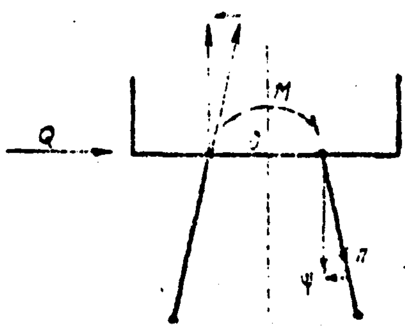
$$a_i \cos \psi_i = g \sin \psi_i$$

et $\Delta = 0$

Le moment par rapport à Ω des efforts exercés par les pieux étant nul, on doit avoir, pour que le système soit en équilibre :

$$M - Qg = 0 \qquad Q = \frac{M}{g}$$

Les efforts M et Q, liés par la relation précédente, ne peuvent donc être appliqués simultanément.



Prenons comme exemple le cas d'une fondation comportant deux files de pieux inclinés. Sous l'effet de M :

./.

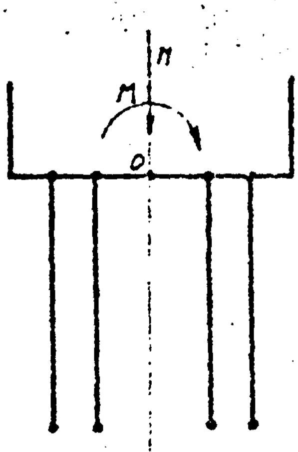
$$n = \pm \frac{M}{2\ a \cos \psi}$$

et la fondation ne demeure en équilibre que si l'on introduit une force de friction horizontale Q (1) :

$$Q = \frac{M \operatorname{tg} \psi}{a}$$

1,5- <u>Cas d'un système de pieux verticaux</u>

Le déterminant de la matrice est encore nul, mais le système de pieux est stable sous l'effet de M et N :



$\sin \psi_i = 0 \qquad \cos \psi_i = 1$

$$\begin{cases} M = \theta \sum K_i a_i^2 + V \sum K_i a_i \\ N = \theta \sum K_i a_i + V \sum K_i \end{cases}$$

Si le système de pieux est symétrique :

$$\sum K_i a_i = 0$$

./.

(1) On retrouvera le même problème pour une pile articulée en pied (Néoprène à la base de la pile par exemple) et pour une pile à voiles souples bi-articulés.

D'où :

$$\boxed{\begin{aligned} A_f &= \frac{1}{\sum K_i \ a_i^2} \\ B_f &= 0 \\ C_f &= \infty \end{aligned}} \qquad \text{et} \qquad s_{33} = \frac{1}{\sum K_i}$$

Les efforts dans les pieux sont égaux à :

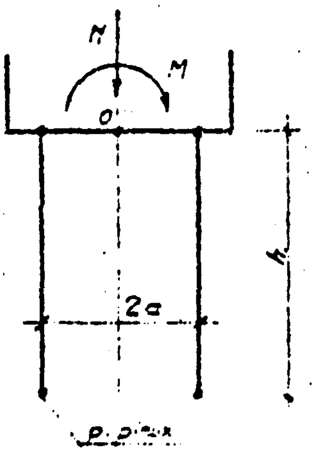
$$n_i = K_i \beta_i = K_i (V + a_i \theta) = K_i \left(\frac{N}{\sum K_i} + \frac{M a_i}{\sum K_i \ a_i^2} \right)$$

La relation précédente peut s'écrire :

$$n_i = \left(\frac{N}{S} + \frac{M a_i}{I} \right) \sigma_i$$

avec :

$$S = \sum \sigma_i \qquad I = \sum a_i^2 \ \sigma_i$$



Dans le cas de deux files de p pieux verticaux distants de 2a, on a :

$$A_f = \frac{h}{2 \ p \ E \ \ \sigma \ a^2} \qquad B_f = 0 \qquad C_f = \infty$$

$$n_i = \frac{N}{2 \ p} + \frac{M}{2p \ a}$$

Si toutes les piles supportant un tablier sont fondées sur un système de pieux verticaux, la stabilité de la structure vis à vis des efforts horizontaux ne peut être assurée dans l'hypothèse de pieux bi-articulés (à moins de faire intervenir la butée des terres au niveau de la semelle).

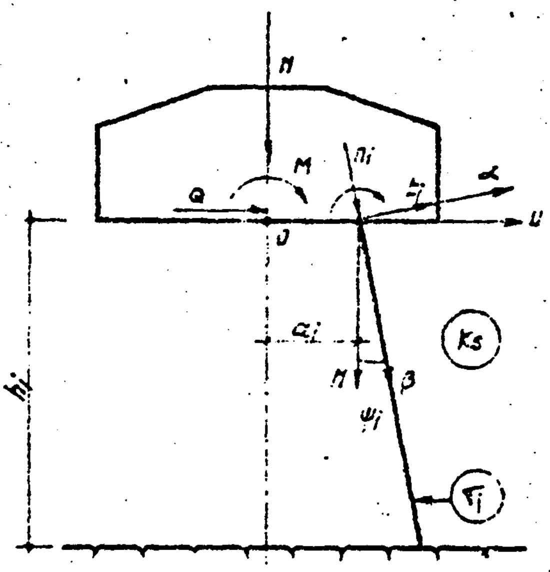
./.

Un tel type de fondation est toutefois parfaitement acceptable dans le cas de pieux nombreux ou de grands diamètres, du fait de la résistance à la flexion des pieux, lesquels sont en réalité encastrés en tête dans la semelle et à leur base dans le terrain de fondation.

./.

2 - COEFFICIENTS DE DEFORMABILITE D'UNE FONDATION SUR PIEUX COMPTE-TENU DES REACTIONS LATERALES DU TERRAIN -

2,1- Equations générales



Dans le calcul d'une fondation sur pieux, on admet généralement par simplification que les pieux n'exercent que des réactions dirigées suivant leurs axes.

En réalité, les pieux se trouvent soumis à d'autres efforts que des compressions longitudinales, du fait des réactions latérales exercées par le terrain. Ces réactions sont sensiblement proportionnelles aux déplacements ce qui permet d'assimiler chaque pieu à une poutre sur appui continu élastique.

Le terrain étant considéré comme un milieu élastique continu défini par son module de réaction horizontal K_s supposé constant sur toute la hauteur des pieux, ceux-ci pourront être assimilés à des poutres semi-infinies, si l'on a :

$$h_i > \pi \lambda_i \cos \psi_i$$

λ_i représentant la longueur d'onde de la poutre sur sol élastique

$$\lambda_i = \sqrt[4]{\frac{4 E I_i}{K_s d_i}}$$

d_i diamètre du pieu

I_i moment d'inertie du pieu

E module d'élasticité du pieu

./..

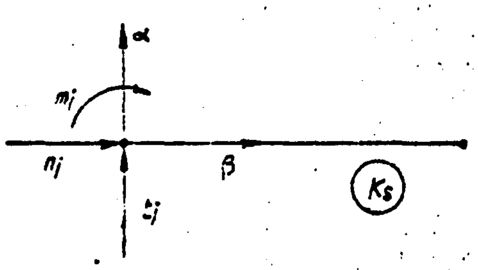
Soient M, Q, N les éléments de réduction par rapport au point O de la résultante générale des forces appliquées au massif de fondation et θ, u, v les composantes de son déplacement.

En désignant par m_i, t_i, n_i les efforts en tête des pieux, on peut écrire :

a)- Equations d'équilibre

$$(1)\quad \left|\begin{array}{l} M = \sum m_i + \sum a_i\, n_i \cos\psi_i - \sum a_i\, t_i \sin\psi_i \\ Q = \sum n_i \sin\psi_i + \sum t_i \cos\psi_i \\ N = \sum n_i \cos\psi_i - \sum t_i \sin\psi_i \end{array}\right.$$

b)- Equations de déformation



$$(2)\quad \left|\begin{array}{l} \omega_i = \dfrac{4\beta^3}{K_s d}\, m_i + \dfrac{2\beta^2}{K_s d}\, t_i \\ \alpha_i = \dfrac{2\beta^2}{K_s d}\, m_i + \dfrac{2\beta}{K_s d}\, t_i \\ \beta_i = \dfrac{n_i}{E\Omega_i}\,\dfrac{h_i}{\cos\psi_i} = \dfrac{n_i}{K_i \cos\psi_i} \\ \qquad \left(K_i = \dfrac{E\Omega_i}{h_i}\right) \end{array}\right.$$

Le changement de coordonnées (θ_i, u_i, v_i) et $(\omega_i, \alpha_i, \beta_i)$ est défini par :

$$(3)\quad \left|\begin{array}{l} \omega_i = \theta_i \\ \alpha_i = u_i \cos\psi_i - v_i \sin\psi_i \\ \beta_i = u_i \sin\psi_i + v_i \cos\psi_i \end{array}\right.$$

./.

c)- Conditions de compatibilité

$$(4)\qquad \left|\begin{array}{l} \theta_i = \theta \\ u_i = u \\ v_i = v + a_i\theta \end{array}\right.$$

On tire des conditions (3) et (4) les déplacements de la tête des pieux :

$$(5)\qquad \left|\begin{array}{l} \omega_i = \theta \\ \alpha_i = u \cos\psi_i - v \sin\psi_i - a_i\theta \sin\psi_i \\ \beta_i = u \sin\psi_i + v \cos\psi_i + a_i\theta \cos\psi_i \end{array}\right.$$

et la résolution du système (2) donne les valeurs des efforts appliqués aux pieux :

$$(6)\qquad \left|\begin{array}{l} m_i = q_i \lambda_i^2 \omega_i - q_i \lambda_i \alpha_i \\ t_i = -q_i \lambda_i \omega_i + 2 q_i \alpha_i \\ n_i = K_i \beta_i \cos\psi_i \end{array}\right. \qquad \text{avec} \qquad q_i = \frac{K_s d_i \lambda_i}{2}$$

On obtient alors, à partir des relations (1), (6), (5), le système suivant

$$\begin{aligned} M = {} & \theta\left[\Sigma K_i a_i^2 \cos^3\psi_i + \Sigma q_i \lambda_i^2 + 2\Sigma q_i \lambda_i a_i \sin\psi_i + 2\Sigma q_i a_i^2 \sin^2\psi_i\right] + \\ & u\left[\Sigma K_i a_i \sin\psi_i \cos^2\psi_i - \Sigma q_i \lambda_i \cos\psi_i - 2\Sigma q_i a_i \sin\psi_i \cos\psi_i\right] + \\ & v\left[\Sigma K_i a_i \cos^3\psi_i + \Sigma q_i \lambda_i \sin\psi_i + 2\Sigma q_i a_i \sin^2\psi_i\right] \\ Q = {} & \theta\left[\Sigma K_i a_i \sin\psi_i \cos^2\psi_i - \Sigma q_i \lambda_i \cos\psi_i - 2\Sigma q_i a_i \sin\psi_i \cos\psi_i\right] + \\ & u\left[\Sigma K_i \sin^2\psi_i \cos\psi_i + 2\Sigma q_i \cos^2\psi_i\right] + \\ & v\left[\Sigma K_i \sin\psi_i \cos^2\psi_i - 2\Sigma q_i \sin\psi_i \cos\psi_i\right] \end{aligned}$$

./.

$$N = \theta\left[\Sigma K_i a_i \cos^2\psi_i + \Sigma q_i \lambda_i \sin\psi_i + 2\Sigma q_i a_i \sin^2\psi_i\right] +$$
$$u\left[\Sigma K_i \sin\psi_i \cos^2\psi_i - 2\Sigma q_i \sin\psi_i \cos\psi_i\right] +$$
$$v\left[\Sigma K_i \cos^3\psi_i + 2\Sigma q_i \sin^2\psi_i\right]$$

Si le terrain n'est pas susceptible d'exercer des réactions latérales ($K = 0$), q_i est nul et on retrouve les équations classiques relatives à des pieux simplement comprimés.

Le système d'équations ci-dessus s'écrit :

$$\begin{vmatrix} M \\ Q \\ N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \theta \\ u \\ v \end{vmatrix}$$

la matrice (r_{ij}) est symétrique : $r_{ij} = r_{ji}$ Son inverse est la matrice (s_{ij}).

2,2- Cas d'un système de pieux symétriques

On a alors : $r_{13} = r_{31} = 0$ et $r_{23} = r_{32} = 0$

et par conséquent $s_{13} = s_{31} = 0$ et $s_{23} = s_{32} = 0$

En appelant Δ le déterminant de la matrice (r_{ij}), supposé non nul, on obtient les valeurs des coefficients de la matrice (s_{ij}) qui représentent les coefficients de déformabilité du système de pieux au niveau O de la tête des pieux :

./.

$$A_f = s_{11} = \frac{r_{22}}{\Delta'} \qquad \text{avec} \quad \Delta' = r_{11} \cdot r_{22} - (r_{12})^2$$

$$B_f = s_{12} = -\frac{r_{21}}{\Delta'}$$

$$C_f = s_{22} = \frac{r_{11}}{\Delta'} \qquad \text{et} \quad s_{33} = \frac{1}{r_{33}}$$

Si les pieux (au nombre de n) sont identiques ($K_i = K$, $\lambda_i = \lambda$, $q_i = q$) :

$$r_{11} = K \Sigma a_i^2 \cos^3 \psi_i + nq\lambda^2 + 2q\lambda \Sigma a_i \sin \psi_i + 2q \Sigma a_i^2 \sin^2 \psi_i$$

$$r_{12} = K \Sigma a_i \sin \psi_i \cos^2 \psi_i - q\lambda \Sigma \cos \psi_i - 2q \Sigma a_i \sin \psi_i \cos \psi_i$$

$$r_{22} = K \Sigma \sin^2 \psi_i \cos \psi_i + 2q \Sigma \cos^2 \psi_i$$

$$r_{33} = K \Sigma \cos^3 \psi_i + 2q \Sigma \sin^2 \psi_i$$

Efforts dans les pieux

Dans le cas général, les efforts dans les pieux s'obtiennent à partir des relations (6) et (5) :

$$m_i = q_i \lambda_i \left[(\lambda_i + a_i \sin \psi_i)\theta - \cos \psi_i \, \mu + \sin \psi_i \, \nu \right]$$

$$t_i = q_i \left[-(\lambda_i + 2a_i \sin \psi_i)\theta + 2 \cos \psi_i \, \mu - 2 \sin \psi_i \, \nu \right].$$

$$n_i = K_i \cos \psi_i \left(a_i \cos \psi_i \, \theta + \sin \psi_i \, \mu + \cos \psi_i \, \nu \right)$$

2,3- Cas d'un système de pieux verticaux

$$\sin \psi_i = 0 \qquad \cos \psi_i = 1$$

./.

ANNEXE II

METHODE DES CONSTANTES D'APPUI ET METHODE DES APPUIS ELASTIQUES

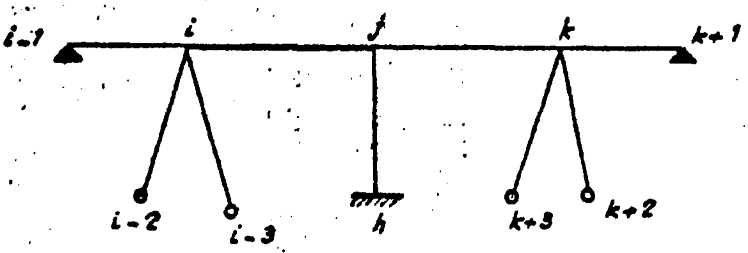
ANNEXE II

METHODE DES CONSTANTES D'APPUI ET METHODE DES APPUIS ELASTIQUES

Les structures hyperstatiques, que rencontre l'Ingénieur lors de l'étude d'un projet de pont, sont constituées généralement de poutres droites continues ou d'une combinaison de poutres droites, appelée <u>portique</u> dans le cas de structure ouverte ou <u>cadre</u> dans le cas de structure fermée, dont le calcul fait intervenir des déplacements et des forces agissant dans le plan moyen de la structure.

Rappelons qu'une structure est dite ouverte si la suppression d'une poutre quelconque n'aboutissant pas à un appui extrême décompose la structure en deux systèmes indépendants.

Considérons par exemple le portique représenté sur la figure 1, comportant les poutres i-p, i ; i, j ; j, h ; j, k ; et k, k+p' liées rigidement aux noeuds i, j et k. Les poutres i, i-p ; j, h ; et k, k + p' ont leurs extrémités i-p, h et k+p' fixes dans le plan de la structure (articulation ou encastrement).



Un système de forces Φ appliquées à l'ouvrage et contenues dans son plan moyen est la somme de systèmes partiels ne comprenant que les forces appliquées à l'une des poutres de la structure, une force appliquée à un noeud pouvant être attribuée arbitrairement à l'une des poutres qui aboutissent à ce noeud.

./..

De même si des déplacements Δ sont imposés aux poutres de l'ouvrage (variations linéaires, compensation par vérins et dénivellations d'appuis) ceux-ci sont la somme des déplacements partiels subis par chacune des poutres.

Le problème posé par le calcul de la structure hyperstatique se ramène donc à l'effet d'un système de forces F ou d'un déplacement D sur l'une des poutres du portique.

Soit Ai Aj une telle poutre. Cette poutre peut être considérée comme appuyée élastiquement en Ai et Aj en raison de la déformabilité de Ai-1 Ai, $A_{i-2}\ A_i$, $A_{i-3}\ A_i$, d'une part et du système $A_j\ A_h$, $A_j\ A_k$, $A_k\ A_{k+1}$, $A_k\ A_{k+2}$, $A_k\ A_{k+3}$ d'autre part.

Nous sommes donc amenés à rechercher :

a) les propriétés élastiques d'appuis tels que A_i et A_j supposés détachés de $A_i\ A_j$ par une coupure effectuée en ras de A_i et de A_j dans $A_i\ A_j$

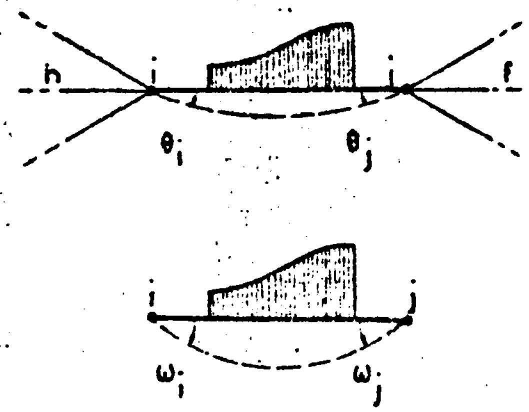
b) l'effet d'un système de forces F et de déplacements D sur la poutre $A_i\ A_j$ encastrée élastiquement sur ses appuis A_i et A_j, dont nous connaitrons les propriétés.

La Méthode des constantes d'appui - dont la généralisation, appelée méthode des appuis élastiques, peut s'appliquer aux structures constituées de poutres courbes - permet d'atteindre ce double objectif.

./..

CALCUL DES STRUCTURES HYPERSTATIQUES PLANES A NOEUDS NON DEPLACABLES PAR LA METHODE DES APPUIS ELASTIQUES (METHODE DES CONSTANTES D'APPUI)

1 - NOTION DE TRAVEE ENCASTREE ELASTIQUEMENT - DEFINITION DES ELASTICITES ET DES RAIDEURS -



Considérons une travée quelconque ij faisant partie d'une structure hyperstatique plane composée d'éléments droits et soumiseà un système de charge donné agissant dans le plan de la structure et n'entraînant pas de déplacement des noeuds i et j.

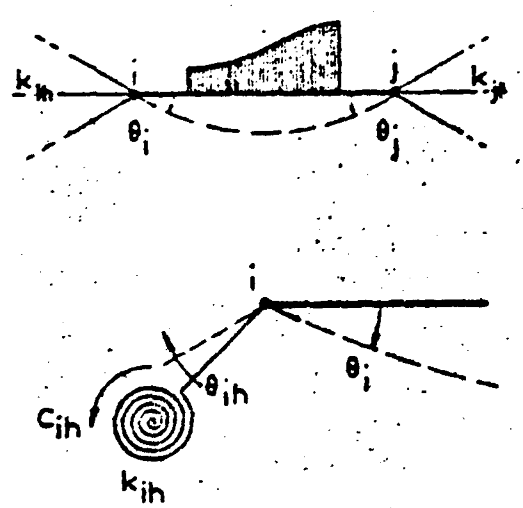
a, b, c sont les coefficients de souplesse de la travée ij (que l'on note sans indice pour simplifier l'écriture).

Si la travée était isostatique, celle-ci se déformerait librement et les rotations de ses extrémités seraient respectivement ω_i et ω_j. Du fait des liaisons constituées par les éléments adjacents ih et jf aboutissant en i et j les déformations de la travée

./.

se trouvent gênées et les rotations de ses extrémités sont limitées à des valeurs θ_i et θ_j inférieures aux rotations isostatiques.

Les liaisons ih et jf créent donc des moments résistants s'opposant aux déformations dues aux charges appliquées et tout se passe comme si la travée comportait à chaque extrémité des ressorts de rappel simulant les liaisons réelles et développant des couples proportionnels à leurs rotations.



Les noeuds de la structure étant supposés rigides, les différents éléments qui aboutissent en i et j tournent du même angle que la travée ij et chaque ressort développe un couple résistant Γ_{ih} ou Γ_{jf} :

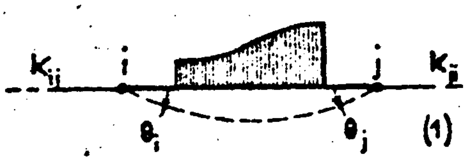
$$\begin{cases} \Gamma_{ih} = - \dfrac{\theta_i}{k_{ih}} = -r_{ih}\,\theta_i \\[2ex] \Gamma_{jf} = - \dfrac{\theta_j}{k_{jf}} = -r_{jf}\,\theta_j \end{cases}$$

k_{ih} et k_{jf} étant des constantes positives caractéristiques des liaisons ih et jf.

Les appuis i et j transmettent donc à la travée ij des couples résistants Γ_i et Γ_j :

$$\begin{cases} \Gamma_i = \sum\limits_{h\neq j} \Gamma_{ih} = -\sum\limits_{h\neq j} r_{ih}\ \theta_i \\ \Gamma_j = \sum\limits_{f\neq i} \Gamma_{jf} = -\sum\limits_{f\neq i} r_{jf}\ \theta_j \end{cases}$$

Et les différentes liaisons existant en i et j sont équivalentes à une liaison unique à chaque extrémité, simulée par des ressorts dont les constantes caractéristiques seraient K_{ij} et K_{ji} telles que :



(1)

$$\begin{cases} \dfrac{1}{K_{ij}} = \sum\limits_{h\neq j} \dfrac{1}{k_{ih}} \\ \dfrac{1}{K_{ji}} = \sum\limits_{f\neq i} \dfrac{1}{k_{jf}} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} R_{ij} = \sum\limits_{h\neq j} r_{ih} \\ R_{ji} = \sum\limits_{f\neq i} r_{jf} \end{cases}$$

Les appuis i et j sont des appuis élastiques, caractérisés par les coefficients K_{ij} et K_{ji} (ou leurs inverses R_{ij} et R_{ji}) représentant les élasticités (ou les raideurs) de ces appuis à l'égard de la travée ij. K_i et K_j sont encore appelées <u>constantes d'appui</u> De même, les coefficients k_{ih} et k_{jf} (ou leurs inverses r_{ih} et r_{jf}) qui caractérisent les liaisons constituant les appuis i et j représent les élasticités (ou les raideurs) de chacun de ces liaison à l'égard des appuis.

La raideur R_{ij} de l'appui i à l'égard de la travée ij est égale à la somme des raideurs r_{ih} à l'appui i de tous les éléments autres que ij aboutissant en i.

Au sens habituel de la résistance des matériaux, les moments fléchissants aux extrémités de la travée sont :

$$\begin{cases} M_{ij} = \Gamma_i = -R_{ij} \quad \theta_i \\ M_{ji} = -\Gamma_j = +R_{ji} \quad \theta_j \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \theta_i = -K_{ij}\, M_{ij} \\ \theta_j = K_{ji}\, M_{ji} \end{cases} \qquad (2)$$

Les rotations réelles θ_i et θ_j de la travée dépendent de la nature de ses appuis. Si ceux-ci sont infiniment raides, la travée ij est encastrée et ses rotations d'extrémité sont nulles ($K_{ij} = K_{ji} = 0$).

Si au contraire les appuis sont constitués par des articulations assurant leur libre rotation, les moments fléchissants aux extrémités sont nuls ($R_{ij} = R_{ji} = 0$).

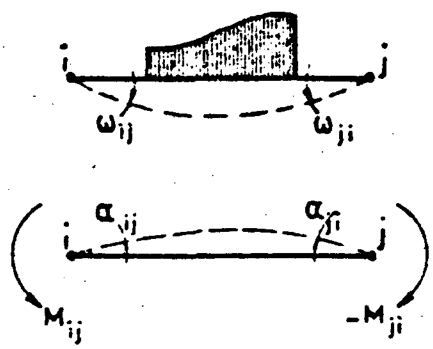
Dans le cas le plus général, pour des valeurs non nulles de K_{ij} et K_{ji}, la travée est dite encastrée élastiquement à ses extrémités, du fait de la proportionnalité des rotations d'extrémité aux moments d'encastrement.

2- CALCUL DES EFFORTS DANS UNE TRAVEE ENCASTREE ELASTIQUEMENT A SES EXTREMITES

Une travée encastrée élastiquement est entièrement définie quand on connait les caractéristiques K_{ij} et K_{ji} de ses appuis. On peut alors facilement déterminer la valeur des moments fléchissants dans la travée quel que soit le système de charges qui lui est appliqué.

./.

Isolons la travée ij de la structure à laquelle elle appartient. Sa déformation sous les charges appliquées peut être considérée comme la superposition des deux déformations élémentaires suivantes :



- déformation isostatique due aux charges appliquées (ω_i, ω_j)
- déformation de sens inverse sous l'effet des couples résistants M_{ij} et $-M_{ji}$ transmis par les appuis i et j (α_i, α_j)

a, b, c étant les coefficients de souplesse de la travée ij calculés en partant de l'appui i :

$$\begin{cases} \alpha_i = a M_{ij} + b M_{ji} \\ \alpha_j = -b M_{ij} - c M_{ji} \end{cases}$$

on a donc finalement:

$$\begin{cases} \theta_i = \omega_i + \alpha_i = \omega_i + a M_{ij} + b M_{ji} = -K_{ij} M_{ij} \\ \theta_j = \omega_j + \alpha_j = \omega_j - b M_{ij} - c M_{ji} = K_{ji} M_{ji} \end{cases} \qquad (3)$$

ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} (a + K_{ij}) M_{ij} + b M_{ji} = -\omega_i \\ b M_{ij} + (C + K_{ji}) M_{ji} = \omega_j \end{cases}$$

D'où :

$$\left\{\begin{aligned} M_{ij} &= -\frac{(c_{ij} + K_{ji})\,\omega_{ij} + b_{ij}\,\omega_{ji}}{(a_{ij} + K_{ij})(c_{ij} + K_{ji}) - b_{ij}^2} \\ M_{ji} &= \frac{b_{ij}\,\omega_{ij} + (a_{ij} + K_{ij})\,\omega_{ji}}{(a_{ij} + K_{ij})(c_{ij} + K_{ji})\,b_{ij}^2} \end{aligned}\right. \qquad (4)$$

Le dénominateur des relations (4) est toujours positif.

Si la travée était parfaitement encastrée à ses extrémités :

$$K_{ij} = K_{ji} = 0$$

et
$$\left\{\begin{aligned} M_{ij} &= -\frac{c_{ij}\,\omega_{ij} + b_{ij}\,\omega_{ji}}{a_{ij}\,c_{ij} - b_{ij}^2} \\ M_{ji} &= \frac{b_{ij}\,\omega_{ij} + a_{ij}\,\omega_{ji}}{a_{ij}\,c_{ij} - b_{ij}^2} \end{aligned}\right.$$

Une travée encastrée élastiquement est donc équivalente à une travée parfaitement encastrée ayant pour coefficients de souplesse :

$$\left\{\begin{aligned} a'_{ij} &= a_{ij} + K_{ij} \\ b'_{ij} &= b_{ij} \\ c'_{ij} &= c_{ij} + K_{ji} \end{aligned}\right.$$

Pour une travée parfaitement encastrée à inertie constante, les coefficients de souplesse sont égaux à :

$$a_{ij} = c_{ij} = \frac{l_{ij}}{3\,EI_{ij}} \qquad b_{ij} = \frac{l_{ij}}{6\,EI_{ij}}$$

et les relations (4) deviennent :

./.

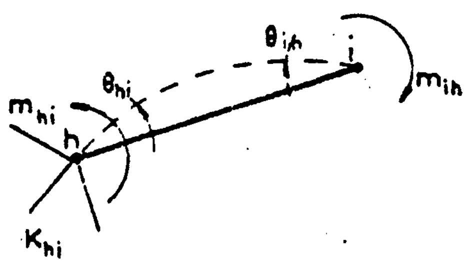
$$\begin{cases} M_{ij} = -\dfrac{2\,EI_{ij}}{l_{ij}}\,(2\,\omega_{ij} + \omega_{ji}) \\ \\ M_{ji} = \dfrac{2\,EI_{ij}}{l_{ij}}\,(\omega_{ij} + 2\,\omega_{ji}) \end{cases}$$

Connaissant le moment fléchissant μ que produiraient, dans une section d'abscisse x comptée à partir de l'appui i, les charges appliquées si la travée reposait sur appuis simples, le moment fléchissant M (x) et l'effort tranchant T (x) dans la section d'abscisse x de la travée encastrée élastiquement sont :

$$\begin{cases} M(x) = \mu\,(x) + M_{ij}\left(1 - \dfrac{x}{l_{ij}}\right) + M_{ji}\,\dfrac{x}{l_{ij}} \\ \\ T(x) = \dfrac{d\mu}{dx} + \dfrac{M_{ji} - M_{ij}}{l_{ij}} \end{cases}$$

3- DETERMINATION DES ELASTICITES k_{ih} et k_{jf} DES ELEMENTS ih et jf ABOUTISSANT en i et j. RELATIONS FONDAMENTALES ENTRE k et K

La connaissance des caractéristiques K_{ij} et K_{ji} de appuis i et j de la travée nécessite la détermination des élasticités k_{ih} et k_{jf} des différents éléments aboutissant en i et j.



Considérons un de ces éléments ih et supposons connus ses coefficients de souplesse a, b, c et d'élasticité K_{hi} du noeud h à l'égard de l'élément.

./.

Il s'agit de déterminer l'élasticité k_{ih} de l'élément en i, c'est-à-dire la constante caractéristique du ressort équivalent.

Appliquons un moment m_{ih} en i après avoir introduit une articulation en ce point. Il nait à l'extrémité opposée h un moment m_{hi} de signe contraire.

On a par définition :

$$\begin{cases} \theta_{ih} = k_{ih}\, m_{ih} \\ \theta_{hi} = K_{hi}\, m_{hi} \end{cases}$$

Les relations (3) appliquées à l'élément ih s'écrivent :

$$\begin{cases} \theta_{hi} = a\, m_{hi} + b\, m_{ih} = -K_{hi}\, m_{hi} \\ \theta_{ih} = -b\, m_{hi} - c\, m_{ih} = -k_{ih}\, m_{ih} \end{cases}$$

La première équation donne :

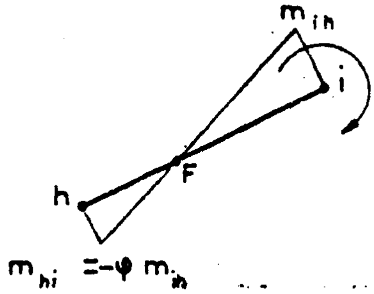
$$m_{hi} = -\frac{b}{a + K_{hi}}\, m_{ih} = -\varphi\, m_{ih}$$

La seconde équation donne :

$$\theta_{ih} = -\left(c - \frac{b^2}{a + K_{hi}} \right) m_{ih}$$

Il en résulte les propriétés suivantes :

a) la droite représentative des moments fléchissants dans la travée hi

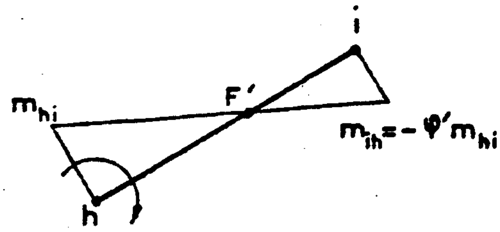


passe par un point fixe F, appelé foyer de gauche, et défini par le <u>rapport focal</u> :

$$\varphi = \frac{b}{a + K_{hi}} \qquad (5)$$

./.

En permutant le rôle de h et de i, on obtient une relation analogue définissant un point fixe F', appelé foyer de droite



$$\varphi' = \frac{b}{c + K_{ih}}$$

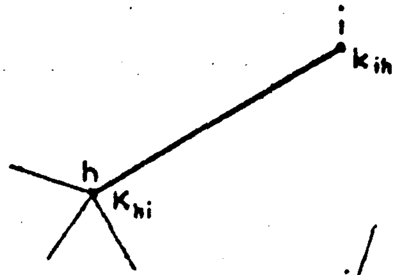
<u>Cas particuliers</u> :

- travée parfaitement encastrée à ses deux extrémités :

$$\varphi = \frac{b}{a} \qquad \varphi' = \frac{b}{c}$$

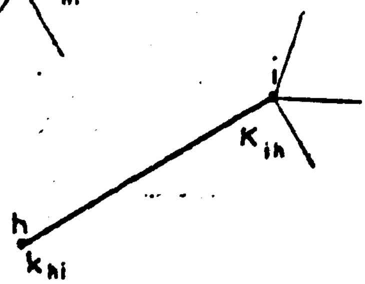
- travée encastrée à inertie constante : $\varphi = \varphi' = \frac{1}{2}$

b) l'élasticité k_{ih} de l'élément h_i à l'égard de l'appui i est liée à l'élasticité K_{hi} de l'appui h à l'égard de l'élément par la relation :



$$k_{ih} = c - \frac{b^2}{a + K_{hi}} \qquad (6)$$

On obtient une relation analogue en permutant le rôle de h et de i :



$$k_{hi} = a - \frac{b^2}{c + K_{ih}}$$

<u>Cas particuliers</u> :

- élément articulé en h $\qquad k_{ih} = c$
- élément articulé en i $\qquad k_{hi} = a$

./..

c) en utilisant les valeurs des coefficients focaux, les relations (4) donnant les moments fléchissants M_{ij} et M_{ji} aux extrémités de la travée ij deviennent :

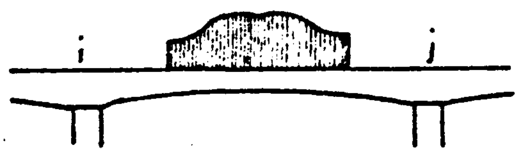
$$\left\{\begin{aligned} M_{ij} &= -\frac{1}{b}\ \frac{\varphi\,(\omega_{ij} + \varphi'\omega_{ji})}{1 - \varphi\ \varphi'} \\ M_{ji} &= \frac{1}{b}\ \frac{\varphi'\,(\varphi\,\omega_{ij} + \omega_{ji})}{1 - \varphi\ \varphi'} \end{aligned}\right. \qquad (7)$$

<u>Cas particuliers</u> :

- travée symétrique et symétriquement chargée :

$$\omega_{ij} = -\ \omega_{ji} = \ \omega$$

$$\left\{\begin{aligned} M_{ij} &= -\frac{1}{b}\ \frac{\varphi'\,(1 - \varphi')}{1 - \varphi\ \varphi'}\ \omega \\ M_{ji} &= -\frac{1}{b}\ \frac{\varphi'\,(1 - \varphi)}{1 - \varphi\ \varphi'}\ \omega \end{aligned}\right.$$



- travée symétrique et symétriquement chargée, aux conditions d'appui symétriques :

$$K_{ij} = K_{ji} \qquad \varphi = \varphi'$$

$$M_{ij} = M_{ji} = -\frac{\varphi}{1 + \varphi}\ \frac{\omega}{b}$$

sous l'effet d'une charge uniforme p :

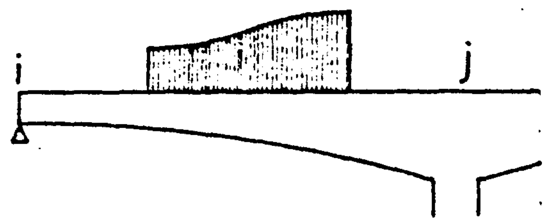
$$M_{ij} = M_{ji} = -\frac{\varphi}{1+\varphi}\ \frac{\int_0^{l/2} \mu\ \frac{dx}{EI}}{2\int_0^{l/2} \frac{x(l-x)}{l^2\ EI}\,dx} = -\frac{\varphi}{1+\varphi}\ \frac{\int_0^{l/2} p\ \frac{x\,(l-x)}{2\ EI}}{2\int_0^{l/2} \frac{x\,(l-x)}{l^2\ EI}} = -\frac{\varphi}{1+\varphi}\ p\,\frac{l^2}{4}$$

./..

- travée articulée à une extrémité i :

$\varphi = 0 \qquad M_{ij} = 0$

$M_{ji} = -\varphi' \dfrac{\omega_{ji}}{b}$



4- COEFFICIENTS DE PARTAGE DES MOMENTS FLECHISSANTS AUX NOEUDS -

A l'appui i le moment fléchissant M_{ij} dans la travée ij créé par les seules charges appliquées à cette travée se partage entre les éléments ih autres que ij qui aboutissent en i.

Le moment M_{ih} qui s'exerce en i sur la barre ih l'y fait tourner de :

$\theta_{ih} = k_{ih}\, M_{ih}$

Par ailleurs, la barre ij étant chargée :

$$\theta_{ij} = K_{ij}\, M_{ij}$$

Les noeuds étant rigides : $\theta_{ih} = \theta_{ij}$

D'où la valeur du moment transmis par ij à ih :

$$M_{ih} = M_{ij} \frac{K_{ij}}{k_{ih}} = \lambda_{ih} M_{ij}$$

λ_{ih} est le coefficient de partage des moments fléchissants aux noeuds :

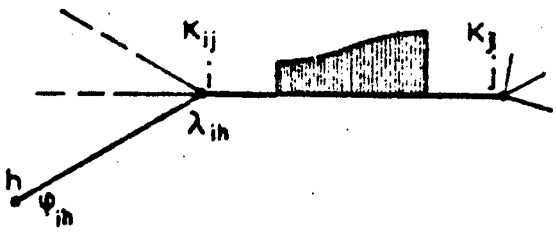
$$\lambda_{ih} = \frac{K_{ij}}{k_{ih}} = \frac{r_{ih}}{R_{ij}} = \frac{r_{ih}}{\sum\limits_{h \neq j} r_{ih}} \qquad (8)$$

./.

Le partage des moments fléchissants aux noeuds a donc lieu proportionnellement aux raideurs respectives des éléments à l'appui i.

5- <u>SYSTEMES OUVERTS ET SYSTEMES FERMES</u> -

Nous venons de voir qu'une travée quelconque ij est parfaitement définie à partir de ses élasticités d'appui K_{ij} et K_{ji}. Elle peut alors être isolée et calculée pour ses charges propres.



La répartition du moment d'appui M_{ij} aux autres éléments se fait proportionnellement à leurs raideurs en i (λ_{ih})

La transmission aux noeuds h est obtenue par application des coefficients focaux (φ_{ih})

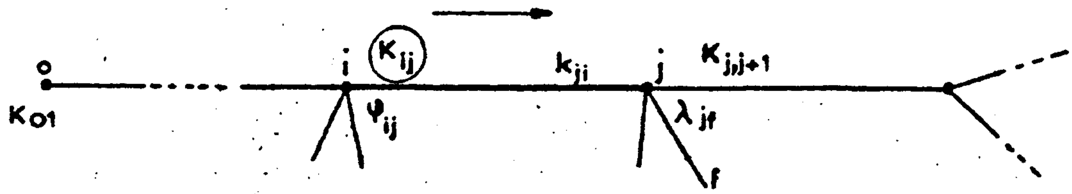
Le problème du calcul des efforts dans la structure est donc résolu quand on connait les trois coefficients K, λ , φ.
Dans le cas de systèmes dits <u>ouverts</u> - c'est-à-dire ne comportant pas de polygone fermé - on détermine les élasticités d'appui K en procédant par cheminement à partir des appuis d'extrémités dont les élasticités sont connues.

Les poutres continues ou les portiques sont des systèmes ouverts.

./.

Les relations de récurrence reliant les différents coefficients sont alors les suivantes :

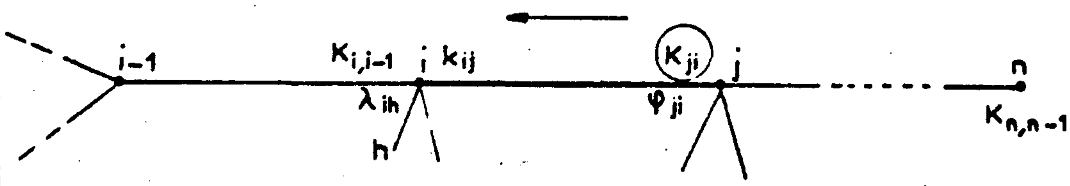
- De gauche à droite - élasticité de l'appui de gauche : K_{o1}



$$\left\{\begin{array}{ll} k_{ji} = c - \dfrac{b^2}{a + K_{ij}} & \varphi_{ij} = \dfrac{b}{a + K_{ij}} \\[2ex] K_{j\ j+1} = \dfrac{1}{\sum\limits_{f \neq i} r_{jf}} & \lambda_{jf} = \dfrac{r_{jf}}{\sum\limits_{f \neq j} r_{jf}} \end{array}\right.$$

- de même, de droite à gauche :

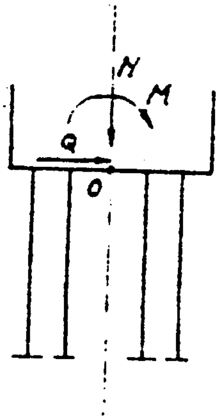
élasticité de l'appui de droite $K_{n,\ n-1}$



$$\left\{\begin{array}{ll} k_{ji} = a - \dfrac{b^2}{c + K_{ji}} & \varphi_{ji} = \dfrac{b}{c + K_{ji}} \\[2ex] K_{i,i-1} = \dfrac{1}{\sum\limits_{h \neq j} r_{ih}} & \lambda_{ih} = \dfrac{r_{ih}}{\sum\limits_{h \neq j} r_{ih}} \end{array}\right.$$

Dans le cas de systèmes dits *fermés*, comme les cadres, la détermination des élasticités d'appui ne peut se faire que par approximations successives, en donnant à priori une valeur arbitraire à certaines élasticités permettant de calculer les autres.

Un seul tour suffit généralement du fait de l'amortissement rapide de l'influence des efforts d'un noeud sur le reste du système.



$$M = (\Sigma K_i a_i^2 + \Sigma q_i \lambda_i^2)\theta - \Sigma q_i \lambda_i \mu + \Sigma K_i a_i \nu$$

$$Q = \Sigma q_i \lambda_i \theta + \Sigma q_i \mu$$

$$N = \Sigma K_i a_i \theta + \Sigma K_i \nu$$

Si le système de pieux est symétrique et tous les pieux identiques : $\Sigma K_i a_i = o$ et

$$\Delta' = nq\,(2K\,\Sigma a_i^2 + nq\,\lambda^2)$$

Le déterminant de la matrice (r_{ij}) n'est pas nul et le système est stable.

$$A_f = \frac{2}{2K\Sigma a_i^2 + nq\,\lambda^2}$$

$$B_f = \frac{\lambda}{2K\Sigma a_i^2 + nq\,\lambda^2} \qquad \text{et} \qquad s_{33} = \frac{1}{nK}$$

$$C_f = \frac{K\Sigma a_i^2 + nq\,\lambda^2}{nq\,(2K\Sigma a_i^2 + nq\,\lambda^2)}$$

./.