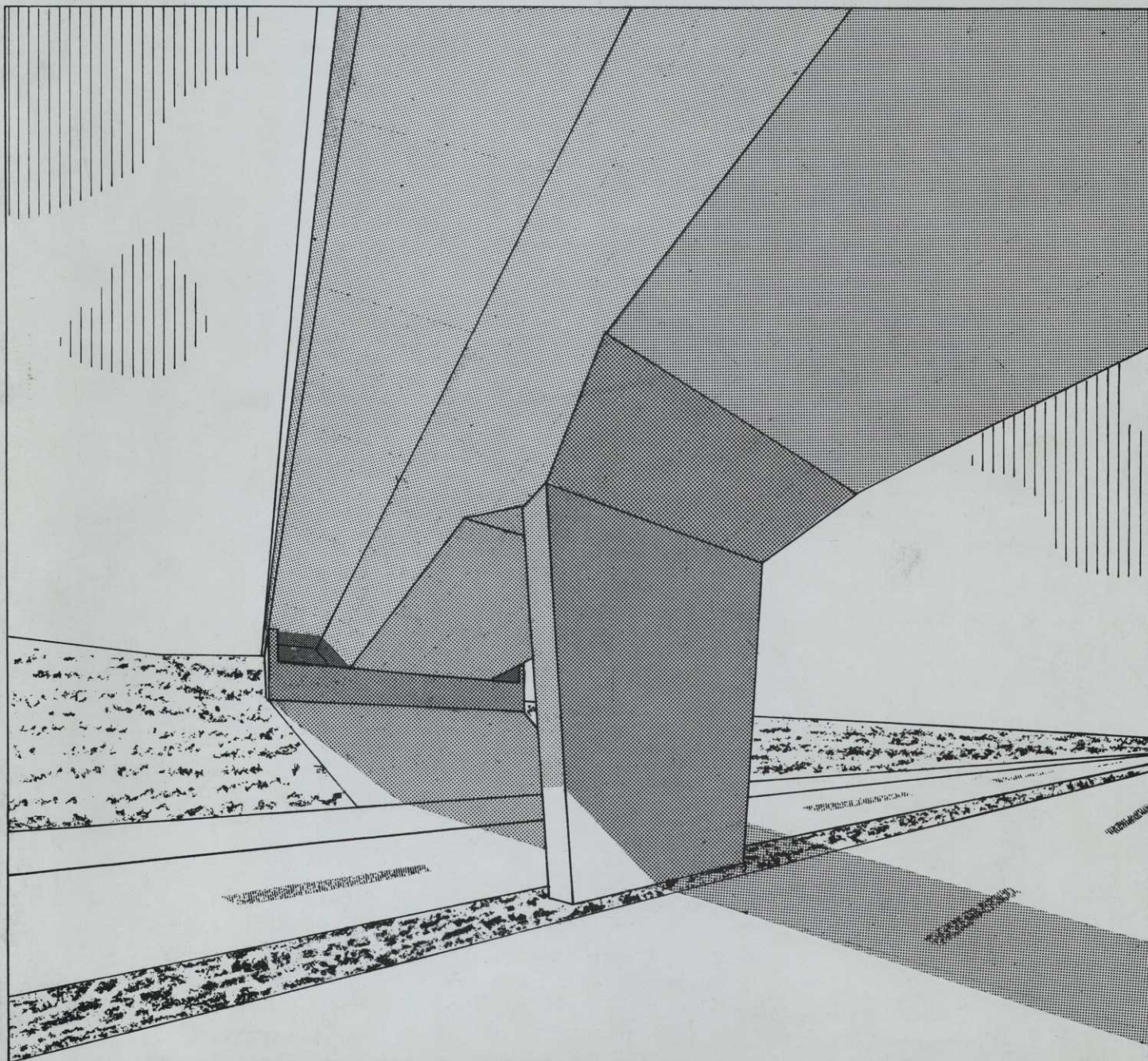


# Calcul des ponts-dalles à larges encorbellements

## D.L.E. 71

# SETRA

DIVISION  
DES  
OUVRAGES D'ART B



MINISTÈRE DE L'ÉQUIPEMENT ET DU LOGEMENT  
Direction des routes et de la circulation routière

## S O M M A I R E

### 1 - ETUDE GENERALE

1.1 - Rappel de la théorie de MM. GUYON et MASSONNET .....	4
1.2 - Adaptations de la théorie .....	6
1.3 - Application au calcul des ponts-dalles à larges encorbellements	11
- Hypothèses et principes de calcul .....	11
- Conventions de signes .....	13
- Efforts appliqués sur les bords de la dalle centrale .....	13
- Effets des charges disposées sur les encorbellements .....	15
- Expression du coefficient de répartition transversale .....	16
- Moments transversaux .....	17
- Applications pratiques .....	22
- Précontrainte transversale .....	24

### 2 - EXEMPLE D'APPLICATION

2.1 - Largeur de la dalle équivalente .....	27
2.2 - Etude de la flexion longitudinale .....	28
2.3 - Moments de flexion transversale .....	30

### 3 - ANNEXES

Annexe 1 : Développements en série de FOURIER des cas de charge usuels	42
Annexe 2 : Expressions de $K_n$ et $\mu_n$ .....	43

Cette étude a été essentiellement établie sous l'autorité de  
MM. M. HUET, Directeur du S.E.T.R.A. - H. MATHIEU, Chef de la D.O.A.-B par  
MM. A. DENIS, Ingénieur des T.P.E. - N. BRAIDI Ingénieur Auxiliaire, gestionnaire  
et A. ORSOLIN, Assistant Technique.

Tout renseignement complémentaire concernant la présente étude peut être  
obtenu à l'adresse suivante : S.E.T.R.A. - D.O.A.-B - 6ème Arrondissement -  
B.P. 100 - 92 - BAGNEUX - Tél. 655-42-42.

**DECEMBRE 1971**

## 1. - ETUDE GENERALE

L'objet de ce document est d'exposer une méthode de calcul qui permet d'évaluer les efforts dans un tablier constitué d'une dalle à larges encorbellements en coupe transversale. Par encorbellements, nous entendons ceux dont la portée est supérieure à l'épaisseur de la dalle centrale; en deçà de cette limite, les méthodes courantes de calcul des dalles de section rectangulaire restent valables avec une approximation suffisante.

Cette méthode est utilisée dans le programme de calcul électronique M.C.P. (calcul des dalles précontraintes par la Méthode du câblage Concordant construit par Points) pour la détermination des efforts tant longitudinaux que transversaux.

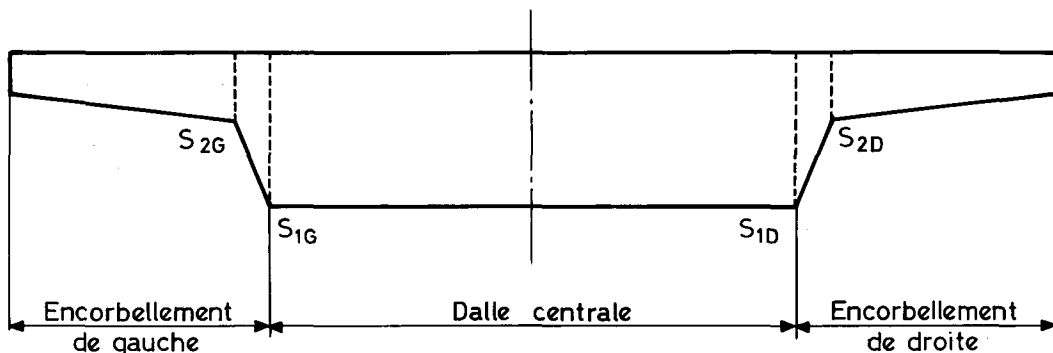


Figure 1

Les ponts-dalles à larges encorbellements prennent le relais des structures types PSI-DP lorsque la portée déterminante dépasse 18 mètres; leur épaisseur est généralement le 1/30<sup>ème</sup> de la portée biaise déterminante pour des ouvrages de biais modéré.

Quoique des dispositions comportant des encorbellements très importants puissent sans doute être envisagées, nous n'avons considéré dans la présente étude que des encorbellements limités satisfaisant aux critères suivants, que l'on retiendra en général pour les ponts-dalles de biais modéré, armés dans le sens transversal :

- la largeur de la nervure (dalle centrale) est supérieure ou égale à la moitié de la largeur utile du tablier;
- la largeur droite de chaque encorbellement n'excède pas le 1/10 ème de la portée déterminante biaise (une limite supérieure pouvant toutefois être admise pour les ponts dalles, sans toutefois dépasser le 1/5 ème).

Compte tenu de la première condition, ce n'est que pour des ouvrages de plus de 14 mètres de largeur utile que l'on pourrait rencontrer des encorbellements symétriques d'une largeur droite supérieure à 3,50 m. L'expérience montre que, lorsqu'on maintient le choix d'une structure élancée, il est en général préférable d'adopter une dalle multi-nervurée ou une dalle élégie, si toutefois son épaisseur s'y prête, ainsi que le biais de l'ouvrage.

Le choix de la largeur des encorbellements pour les ouvrages de biais prononcé ou précontraints transversalement doit être apprécié compte tenu de critères spéciaux, généralement plus restrictifs que les précédents : ils dépendent principalement de la direction de la précontrainte transversale et des directions principales des efforts. On trouvera dans ce document, aux § 1.2.1 (biais) et 1.3.8 (précontrainte transversale) quelques éléments propres à faciliter l'étude de ces cas d'espèce.

#### NOTATIONS ET CONVENTIONS

- e : excentrement d'une fibre chargée parallèle à l'axe longitudinal; sens positif de la gauche vers la droite de l'ouvrage.
- origine : intersection de la ligne d'appui gauche avec l'axe longitudinal.
- $Ox$  : axe de référence porté par l'axe longitudinal de la plaque.
- $Oy$  : axe perpendiculaire au précédent orienté positivement de la gauche vers la droite.
- x,y : coordonnées d'un point P où sont mesurés les efforts.
- 2a : portée d'une travée mesurée sur son axe longitudinal.
- 2b : largeur droite de la plaque.
- centre de la plaque : point de coordonnées  $x = a; y = 0$
- $Ox$  : axe de référence porté par la direction principale du moment de flexion longitudinale au centre de la plaque.
- $Oy$  : axe de référence perpendiculaire au précédent, orienté positivement de la gauche vers la droite
- $m_x(x,y)$  : densité du moment fléchissant longitudinal porté par  $Ox$ .

$m_y(x,y)$  : densité du moment fléchissant transversal porté par  $O_y$ .

$m_x(x,y)$  : densité du moment fléchissant principal longitudinal porté par  $O_x$ .

$m_y(x,y)$  : densité du moment fléchissant principal transversal porté par  $O_y$ .

Les conventions de signes sont rappelées au § 1.3.2.

Les indices G ou D se rapportant respectivement aux sections  $S_1$  d'encastrement de gauche ou de droite sont remplacés par des points (.) dans les grandeurs qui s'y rattachent (exemple 2c.) lorsque, dans le contexte de l'exposé un raisonnement ou une formulation sont identiques quel que soit le côté considéré.

### 1.1 - RAPPEL DE LA THEORIE DE MM. GUYON ET MASSONNET

Cette théorie a tout d'abord traité le cas des plaques minces, homogènes et isotropes, de coefficient de Poisson nul, présentant deux bords parallèles libres et reposant simplement et sans biais sur des appuis continus le long des autres côtés.

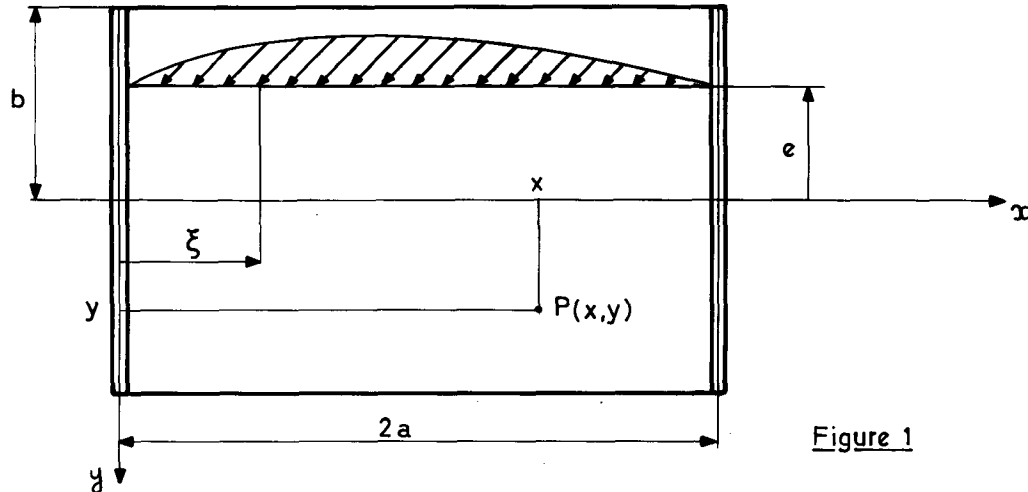


Figure 1

On considère alors (voir figure 1 ci-dessus), une charge quelconque de densité linéaire  $p(\xi)$  répartie sur une fibre d'excentrement  $e$  constant, parallèle à l'axe longitudinal de la travée. On suppose la densité  $p(\xi)$  développée en série de FOURIER :

$$p(\xi) = \sum_n p_n(\xi)$$

et l'on a posé :

$$p_n(\xi) = A_n \sin \frac{n\pi\xi}{2a} \quad (1)$$

L'annexe 1 au présent document fournit les différentes formes du coefficient  $A_n$  pour les cas de charge habituellement employés dans le calcul des ponts.

Soit  $M_n(x)$  le moment de flexion longitudinale créé à l'abscisse  $x$  d'une poutre rectiligne d'inertie constante et de même portée  $2a$  par la charge  $p_n(\xi)$ .

La densité linéaire du moment de flexion longitudinale au voisinage du point  $P(x,y)$  dans la plaque est donnée par l'expression :

$$m_x(x,y) = \frac{1}{2b} \sum_n K_n \left( \frac{b}{2a}, \frac{y}{b}, \frac{e}{b} \right) M_n(x) \quad (2)$$

où la valeur de l'expression  $K_n$  est appelée coefficient de répartition transversale relatif à l'harmonique de rang  $n$ .

La densité linéaire du moment de flexion transversale est, au voisinage du même point P (x,y) donnée par :

$$m_y(x,y) = b \sum_n \mu_n \left( \frac{b}{2a}, \frac{y}{b}, \frac{e}{b} \right) p_n(x) \quad (3)$$

où la valeur de chaque fonction  $\mu_n$  est appelée coefficient de flexion transversale relatif à l'harmonique de rang n; les expressions ci-dessus sont le plus souvent données en fonction du paramètre d'entretoisement :

$$\theta = \frac{b}{2a}$$

Des formules permettant de calculer  $K_n$  et  $\mu_n$  figurent en annexe 2 au présent document; des formules plus simples sont fournies par le dossier-pilote PSI-DP 69 (pièce 2.5 page 13 et 40). Ces dernières toutefois ne tiennent pas compte d'une anisotropie éventuelle de la plaque.

Plus généralement, moyennant certaines adaptations ou approximations le domaine d'emploi des résultats qui viennent d'être exposés a pu être étendu aux ouvrages biaisés, aux travées continues, aux structures anisotropes, aux matériaux dont on ne peut pas négliger la valeur du coefficient de Poisson, aux structures d'inertie variable.

Ces premières extensions qui vont être évoquées ci-après pour les dalles à coupe transversale rectangulaire, éventuellement éléguées, concernent également les dalles à larges encorbellements dont l'étude est effectuée selon les principes présentés à l'alinéa 1.3.1 ci-dessous.

REMARQUES - 1) Si M (x) est le moment fléchissant dans la poutre d'inertie constante et de même portée 2a que la dalle calculée, on a par définition :

$$\sum_n M_n(x) = M(x)$$

Dans la pratique, pour les cas de charge habituellement considérés dans le calcul des ponts (charges réparties principalement) on

considère l'expression  $\sum_{n=2}^{\infty} (K_n - K_1) M_n(x)$  comme étant négligeable devant  $K_1 M(x)$  en sorte que la formule (2) devient :

$$m_x(x,y) = \frac{1}{2b} K_1 \left( \theta, \frac{y}{b}, \frac{e}{b} \right) M(x) = \frac{1}{2b} K \left( \theta, \frac{y}{b}, \frac{e}{b} \right) M(x) \quad (4)$$

K désignant dans tout ce qui suit la valeur particulière de la fonction  $K_n$  pour  $n = 1$ .

2) Dans le cas de plusieurs charges  $P_i$  d'excentricité  $e_i$ , la formule (4) devient :

$$m_x(x,y) = \frac{1}{2b} \frac{\sum P_i K \left( \theta, \frac{y}{b}, \frac{e_i}{b} \right)}{\sum P_i} M(x) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{où } M(x) \text{ est le mo-} \\ \text{ment défini ci-} \\ \text{dessus.} \end{array} \right.$$

## 1.2 - ADAPTATION DE LA THEORIE DE MM. GUYON ET MASSONNET

### 1.2.1 - Prise en compte du biais

Il peut être tenu compte d'un biais modéré de la manière suivante :

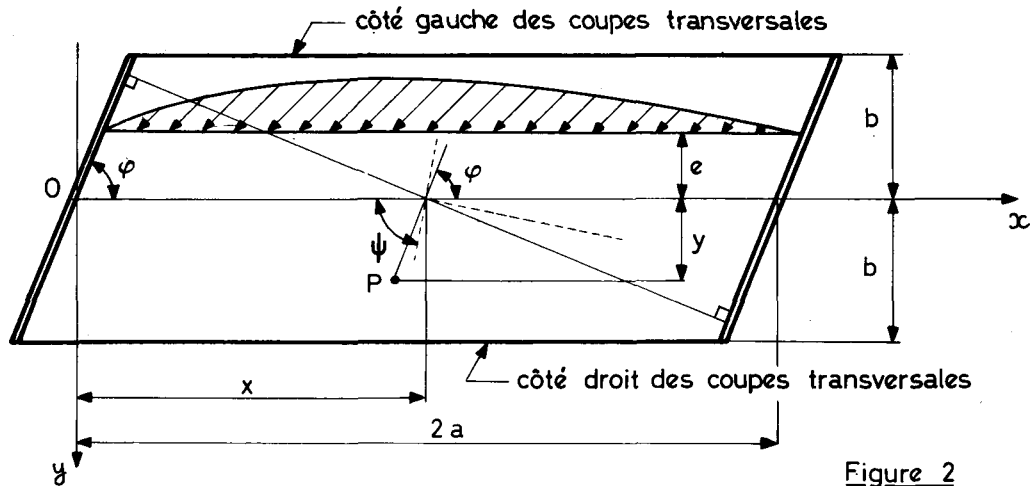


Figure 2

L'abscisse  $x$  d'un point  $P$  où l'on étudie les efforts dans la dalle est repérée sur l'axe longitudinal après une projection effectuée parallèlement aux lignes d'appui.

On définit de la même manière, quels que soient les excentrement  $e$  et  $y$ , les abscisses  $\xi$  et  $x$  où l'on calcule  $p_n(\xi)$  et  $M_n(x)$ ; la poutre rectiligne équivalente a pour portée dans la travée considérée la portée biaise  $2a$ , mesurée suivant l'axe longitudinal de l'ouvrage (et donc suivant le biais géométrique).

D'une façon générale les excentrement  $e$  et  $y$ , comme la demi-largeur droite  $b$ , sont mesurés suivant une perpendiculaire à l'axe longitudinal de l'ouvrage.

La valeur du paramètre d'entretoisement dans les expressions de  $K_n$  demeure, compte tenu des définitions de  $b$  et de  $a$  qui viennent d'être précisées (voir figure 2) :

$$\theta = \frac{b}{2a}$$

et l'on admet pour la densité de moment de flexion longitudinale l'expression

$$m_x(x, y) = \frac{1}{2b} \sum_n K_n\left(\theta, \frac{y}{b}, \frac{e}{b}\right) M_n(x)$$



Au voisinage des bords libres de la dalle (pour lesquels  $y = \pm b$ ) la direction de ce moment parallèle à l'axe longitudinal de l'ouvrage, est une direction principale en sorte que l'expression ci-dessus pourra être considérée comme une bonne approximation de la densité de moment principal longitudinal  $m_x(x,y)$  en un point voisin des bords libres. C'est généralement cette densité qui est retenue pour l'étude de la flexion longitudinale.

Par contre, en un point voisin de l'axe longitudinal de la plaque, la direction principale du moment de flexion longitudinale ne coïncide pas avec l'axe  $Ox$ . On désigne couramment par  $\psi$  (biais mécanique) l'angle aigu, au centre de la dalle, entre la direction principale des moments de flexion longitudinale et une perpendiculaire à l'axe longitudinal de l'ouvrage.

L'étude des moments de flexion transversale amène à considérer surtout les moments principaux transversaux dans la partie centrale de la dalle. On se réfère alors à une plaque rectangulaire équivalente dont la portée est prise égale à  $2a \sin \psi$  et la largeur à  $2b/\sin \psi$ .

Dans cette correspondance, l'abscisse longitudinale d'un point P se déduit de la valeur  $x$  précédente en la multipliant par  $\sin \psi$ , les excentrement  $e$  et  $y$  se déduisent de leurs valeurs dans la dalle biaise en les divisant par  $\sin \psi$ .

Il conviendra alors de poser :

$$\theta' = \frac{b}{2a \sin^2 \psi}$$

dans les expressions des coefficients de flexion transversale, pour obtenir la densité de moment principal transversal.

$$m_y(x,y) = \frac{b}{\sin \psi} \sum_n \mu_n \left( \theta', \frac{d}{b}, \frac{e}{b} \right) P_n(x)$$

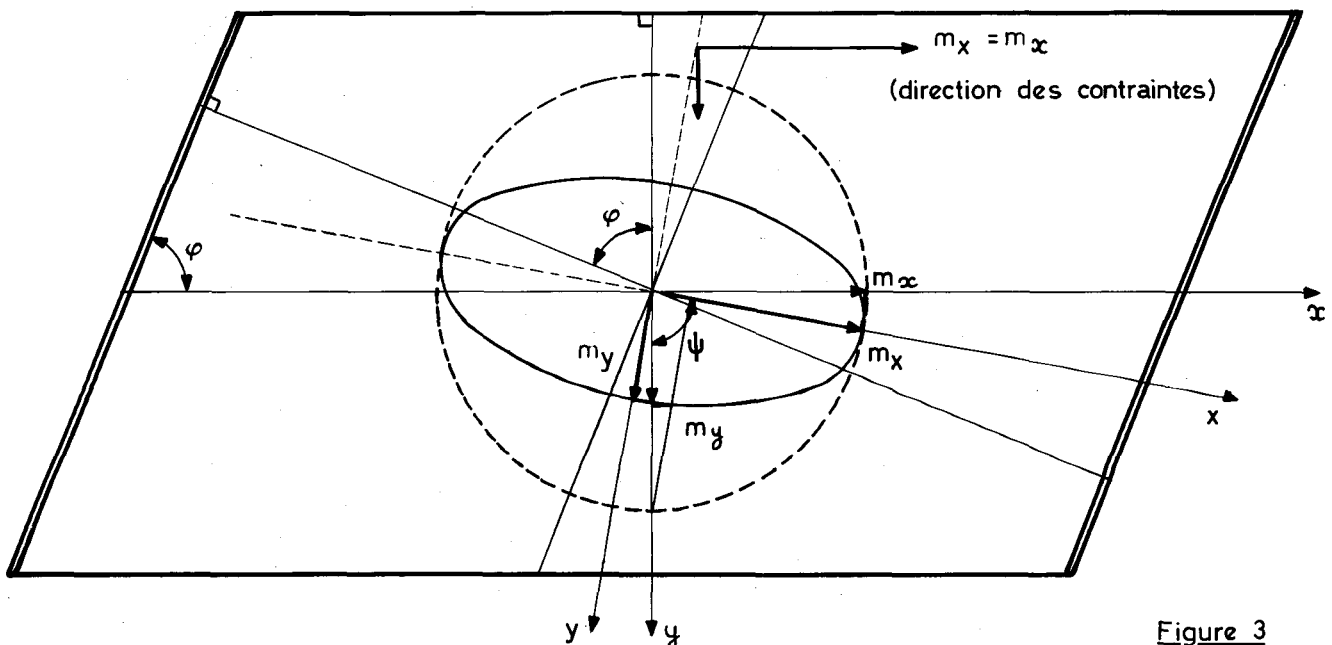


Figure 3

REMARQUES

1) Les corrections ci-dessus n'affectent que le paramètre d'entretoisement  $\theta'$  et l'expression générale  $m_y(x,y)$  qu'il convient de diviser par  $\sin \psi$  - on remarque en effet qu'il n'y a aucun inconvénient à repérer les charges et les fibres dans le système d'axes  $o_x o_y$  car les expressions  $\frac{y}{b}$ ,  $\frac{e}{b}$  ... restent identiques.

2) En principe le calcul du moment principal longitudinal en un point voisin de l'axe longitudinal devrait tenir compte de la correction due au biais mécanique. En fait, la valeur de K n'est guère affectée par le changement de la valeur de  $\theta$  lorsque le biais est modéré, et l'on obtient le moment principal en ce point en projetant le moment  $m_x$  sur la direction principale

$$m_x \neq m_x \sin \psi$$

3) Pour des ouvrages de biais mécanique inférieur à 65 grades, la méthode de GUYON MASSONNET est inapplicable: on s'orientera alors, pour ces types de ponts spéciaux, vers des méthodes d'analyse structurale telles que celles développées dans le dossier-pilote MRB-BP 70.

4) L'évaluation du biais mécanique peut être effectuée à partir des abaques de la pièce 2.1.4 du dossier MRB-BP 70.

### 1.2.2 - Prise en compte de la continuité.

Soit  $i$  l'indice de la travée chargée. On considère la poutre rectiligne équivalente, qui est continue, qui repose sur des appuis droits et qui a pour portées les portées biaises  $2 a_i$  de l'ouvrage déjà définies. Le calcul de  $M(x)$ , compte tenu des définitions données pour les abscisses des points d'une plaque biaise, tient compte de la continuité.

En vue du calcul des coefficients  $K_n$  et  $K$ , et  $\mu_n$  on définit une valeur corrigée  $a'_i$  de la demi-portée de la travée  $i$  de la façon suivante :

On considère une charge verticale répartie avec une densité  $p$  constante sur toute la travée ( $i$ ) et les moments fléchissants  $M(i; 0)$  et  $M(i; 2 a_i)$  qui en résultent au droit des appuis ( $i$ ) et ( $i + 1$ ) limitant la travée ( $i$ ); on suppose des inerties constantes dans la travée ( $i$ ) et on calcule la demi-portée  $a'_i$  de la travée indépendante de même inertie qui présente la même flèche en son milieu sous l'action de la même charge de densité  $p$ , soit :

$$2 a'_i = 2 a_i \sqrt[4]{1 + 4,8 (m_i + m_{i+1})}$$

$$\text{avec } m_i = \frac{1}{p} \frac{M(i; 0)}{4 a_i^2} < 0 \quad \text{et} \quad m_{i+1} = \frac{1}{p} \frac{M(i; 2 a_i)}{4 a_i^2} < 0$$

Le calcul de cette correction est maintenu, avec le même coefficient 4,8, pour les ouvrages d'inertie variable. Cette correction n'affecte que le paramètre  $\theta$  d'entretoisement.

Pour le calcul des moments de flexion longitudinale dans une travée quelconque  $j$ , on utilise les coefficients  $K_n$  relatifs à la travée  $i$  chargée.

On obtient finalement, l'abscisse  $x$  étant mesurée dans la travée ( $j$ ) et  $M_n(j,x)$  étant le moment fléchissant dans la poutre équivalente sous l'action de la densité  $p_n(i;\xi)$  appliquée dans la travée ( $i$ ) :

$$m_x(j;x,y) = \frac{1}{2b} \sum_n K_n \left( \frac{b}{2a'_i}, \frac{y}{b}, \frac{e}{b} \right) M_n(j;x)$$

Pour ce qui concerne les moments principaux transversaux il y a lieu de remarquer que, à moins de prendre en compte une valeur non nulle du coefficient de Poisson (voir § 1.2.4 ci-dessous), les coefficients  $\mu_n$  ne sont utilisés que dans la travée chargée. Pour tenir compte du biais on portera dans  $\mu_n$  la valeur  $\theta'_i$  du paramètre d'entretoisement :

$$\theta'_i = \frac{b}{2a'_i \sin^2 \psi_i}$$

Ce qui revient à prendre le paramètre d'entretoisement de la plaque rectangulaire de même surface (compte tenu de la correction de continuité) dont les côtés sont parallèles aux directions principales qui définissent le biais mécanique au milieu de la travée ( $i$ ); on obtient ainsi :

$$m_y(i;x,y) = \sum_n b \mu_n \left( \theta'_i, \frac{y}{b}, \frac{e}{b}, \dots \right) p_n(i;x)$$

### 1.2.3 - Prise en compte de l'anisotropie.

L'annexe 2 au présent document, fournit les expressions données par M. MASSONNET et explicitées par M. ROWE des coefficients  $K_n$  et  $\mu_n$  en fonction des paramètres d'anisotropie de torsion  $\alpha$  et de flexion  $\beta$ .

Ces paramètres sont égaux l'un et l'autre à l'unité si la dalle est isotrope - Si la dalle est élégie, leurs valeurs sont calculées suivant les formules de MM. COSTE et THENOZ qui sont reproduites dans le chapitre 4 du manuel d'utilisation du programme MCP 70. Dans des cas plus généraux on se reportera aux définitions ci-après :

On appelle  $E I_x$  le rapport de la rigidité à la flexion longitudinale à la largeur droite  $2b$  de la dalle, et de même,  $E I_y$  le rapport de la rigidité à la flexion transversale à la portée biaise  $2a$  de la travée considérée.

On appelle  $G \Gamma_x$  le rapport de la rigidité à la torsion autour de l'axe longitudinal à la largeur droite  $2b$  de la dalle, et, de même  $G \Gamma_y$  le rapport de la rigidité à la torsion autour de l'axe transversal  $Oy$  à la portée biaise  $2a$  de la travée considérée.

Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont alors définis en moyenne sur la dalle par :

$$\alpha = \frac{G \Gamma_x + G \Gamma_y}{2 \sqrt{E I_x E I_y}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{E I_x}{E I_y}$$

La valeur du paramètre d'entretoisement,  $\theta_i$  ou  $\theta'_i$ , ayant été multipliée par  $\sqrt[4]{\beta}$ , les expressions de  $K_n$  et de  $\mu_n$  dépendent de  $\alpha$ .

Compte tenu de la relation  $E = 2G(1 + \nu)$ , où  $\nu$  est le coefficient de Poisson, il vient, pour  $\nu = 0$ ,  $E = 2G$ , et par conséquent :

$$\alpha = \frac{\Gamma_x + \Gamma_y}{4 \sqrt{I_x I_y}}$$

#### 1.2.4 - Prise en compte du coefficient de Poisson.

Il résulte des études effectuées par M. ROWE que la valeur, non nulle dans la pratique, du coefficient de Poisson  $\nu$  n'a qu'une influence très faible sur les valeurs des moments de flexion longitudinale. Il n'en est pas de même pour ce qui concerne les moments de flexion transversale.

Les moments principaux transversaux les plus importants se produisant en des points proches de l'axe longitudinal de la dalle, on recherche les valeurs prises en ces points par les moments principaux longitudinaux pour lesquels, l'angle  $\psi$  mesurant le biais mécanique au centre de la dalle, on admet (cf. remarque 2 au § 1.2.1) la valeur :

$$m_x(x, 0) = m_x(x, b) \sin \psi \approx m_x(x, b) \sin \psi$$

et l'on convient de majorer l'expression, déjà donnée, de  $m_y(x, y)$ , du terme

$$k \nu m_x(x, 0)$$

où le facteur  $k$  prend les valeurs :  $k = 1$  si  $\frac{b}{a} \geq 1$

$$k = \frac{b}{a} \text{ si } \frac{b}{a} < 1$$

Finalement, si on appelle (i) la travée chargée et (j) la travée où l'on étudie les moments transversaux, on prendra les valeurs (cf. § 1.2.2 ci-dessus) :

$$m_y(j; x, y) = k_j v m_x(j; x, 0), \text{ si } j \neq i$$

$$\text{ou, si } j = i: m_y(i; x, y) = k_i v m_x(i; x, 0) + \sum_n b \mu_n \left( \theta', \frac{y}{b}, \frac{e}{b}, \dots \right) P_n(i; x)$$

Toutefois, par prudence, le terme  $k v m_x$  ne sera pris en compte que s'il est défavorable.

### 1.2.5 - Prise en compte des variations d'inertie.

L'effet des variations d'inertie le long de l'ouvrage s'exprime surtout par les moments fléchissants  $M_n(x)$  régnant dans la poutre équivalente (cf. définition § 1.1).

Il importe toutefois de préciser que les inerties de flexion longitudinale ne doivent pas, dans une travée donnée, varier dans une proportion de plus de 1 (en milieu de travée) à 4 au voisinage des appuis, pour qu'il soit acceptable d'appliquer le modèle proposé à la structure étudiée.

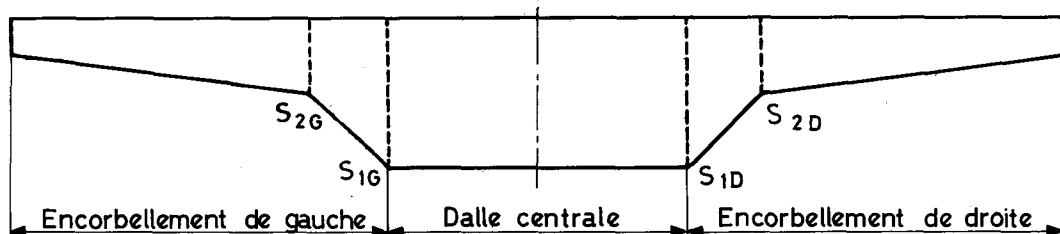
La correction pour prise en compte de la continuité (cf. § 1.2.2) est établie sans qu'il soit considéré d'autre effet des variations d'inertie que ceux qui s'expriment dans les moments fléchissants  $M_n(x)$ .

Enfin, les paramètres d'anisotropie  $\alpha$  et  $\beta$  sont calculés dans les sections de plus faible inertie.

## 1.3 - APPLICATION AU CALCUL DES PONTS DALLES A LARGES ENCORBELLEMENTS.

### 1.3.1 - Hypothèse et principes du calcul.

Pour de telles structures, il convient de faire une distinction entre les parties en encorbellement et la nervure que nous appellerons dalle centrale.



Nous considèrerons par ailleurs que les encorbellements ont pour origine la première discontinuité sur l'intrados en coupe transversale comptée à partir de l'axe de la dalle (sections  $S_{1G}$  et  $S_{1D}$ ).

Cette distinction étant faite entre dalle centrale et encorbellements, nous pourrions considérer :

- a) que les encorbellements travaillent comme des consoles encastrées dans la dalle centrale; il est donc possible de connaître, dans les sections d'encastrement, les moments fléchissants et les efforts tranchants produits par les charges et surcharges placées sur les encorbellements;
- b) que la dalle centrale, supposée indépendante des encorbellements, fonctionne comme une dalle isotrope pour laquelle la méthode de MM. GUYON et MASSONNET est applicable;
- c) toutefois, la participation des encorbellements à la flexion longitudinale a pour effet de réduire la torsion dans la dalle. Nous allons donc substituer à la dalle avec encorbellements, la "dalle équivalente de section rectangulaire", de même hauteur que la dalle centrale, et présentant la même inertie de flexion que l'ensemble de la structure étudiée.

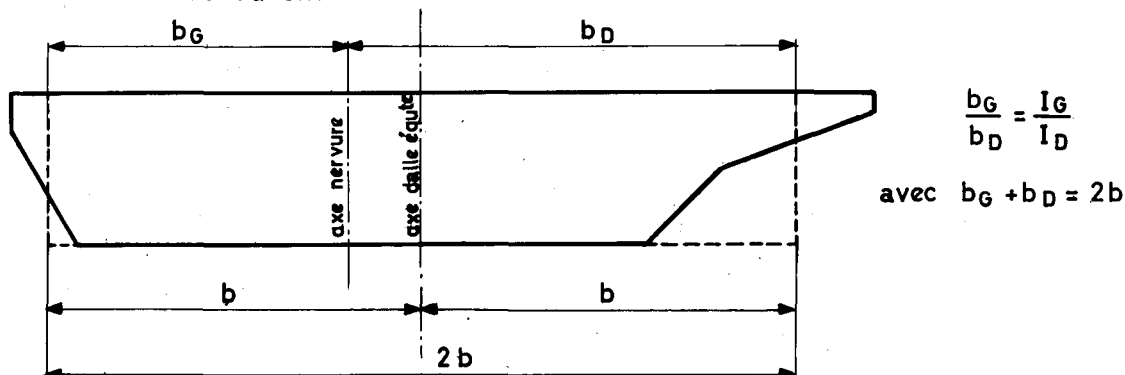
Si  $I_x$  est d'inertie totale de la structure et  $h$  la hauteur de la dalle centrale, la largeur de la dalle équivalente de section rectangulaire sera donc :

$$2b = \frac{12 I_x}{h^3}$$

Cette définition est étendue à trois cas particuliers :

- Lorsque la structure est d'inertie variable, la dalle équivalente de section rectangulaire conserve la même largeur pour toutes les sections de chaque travée considérée - cette largeur est obtenue à l'aide de la formule ci-dessus appliquée à la section médiane de la travée

- Lorsque la structure porteuse est dissymétrique, la dalle équivalente sera aussi dissymétrique par rapport à l'axe de la dalle centrale et nous aurons :



$I_G$  et  $I_D$  étant respectivement les moments d'inertie de la partie à gauche et de la partie à droite de l'axe de la dalle centrale ; En pratique il est possible, voire prudent, de calculer  $I_G$  et  $I_D$  par rapport à l'axe horizontal passant par l'extrados de la structure.

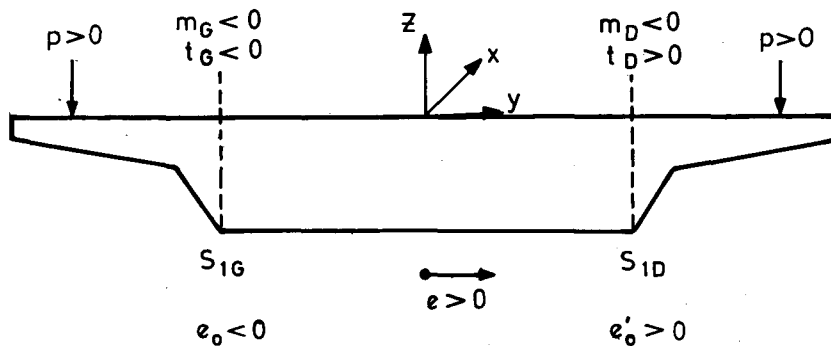
- Enfin, lorsque la structure est élégiée et comporte de larges encorbellements, la largeur de la dalle équivalente se déduit de celle de la dalle centrale en la multipliant par le rapport de l'inertie de la section complète (élégiée) à l'inertie de la nervure (élégiée); le cas de dissymétrie relève également de l'alinéa précédent.

Dans tous les cas, l'axe longitudinal de la dalle équivalente de section rectangulaire est l'axe mécanique de la dalle à partir duquel sont comptés tous les excentremets des fibres et des surcharges.

### 1.3.2 - Conventions de signes.

Ce sont celles habituellement utilisées dans les traités de résistance des matériaux : sur les bords de la dalle centrale s'exercent les moments  $m_G$  et  $m_D$  et les efforts tranchants  $t_G$  et  $t_D$  par unité de longueur. Ces efforts sont dus à des charges, essentiellement positives, placées respectivement sur les encorbellements de gauche et de droite.

Les excentremets des fibres et des surcharges sont comptés algébriquement à partir de l'axe longitudinal de la dalle rectangulaire équivalente qui est l'axe mécanique de la structure.



### 1.3.3 - Efforts appliqués dans les sections $S_{1G}$ et $S_{1D}$ par les charges disposées sur les encorbellements.

Appelant  $e_0$  l'excentrement de la section  $S_1$ , on considère une charge linéaire répartie  $p(x)$  sur une fibre, d'excentrement  $e$ , parallèle à l'axe mécanique du pont.

Cette charge est reportée dans la section  $S_1$  où elle se traduit par les densités suivantes d'efforts transversaux, compte tenu des conventions ci-dessus :

. Charge sur l'encorbellement de gauche - section  $S_{1G}$  :

$$\begin{aligned} m_G(x) &= (e - e_0) p(x) \\ t_G(x) &= -p(x) \end{aligned} \quad (6)$$

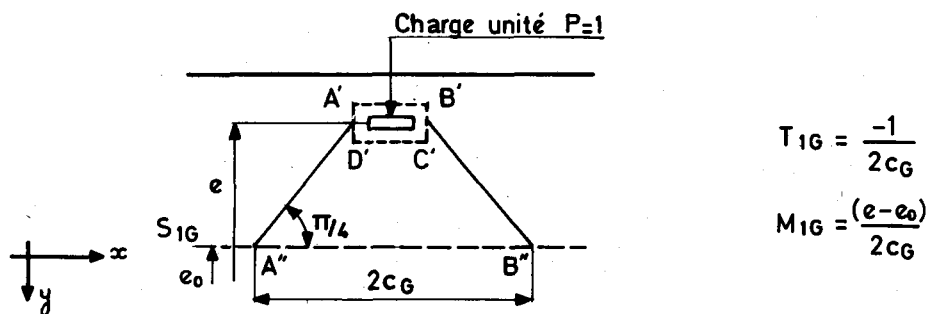
. Charge sur l'encorbellement de droite - section  $S_{1D}$  :

$$\begin{aligned} m_D(x) &= -(e - e_0) p(x) \\ t_D(x) &= p(x) \end{aligned} \quad (6)$$

Dans les cas de charge répartie généralement étudiés on a  $p(x) = p$  : densité de charge linéaire constante.

Dans le cas d'une charge concentrée d'intensité  $P$  à l'abscisse  $x$ , on procède tout d'abord à son étalement "vertical" sur le plan moyen de l'encorbellement, puis à son étalement horizontal sur une longueur  $2c$ . au droit de la section  $S_1$  :

Par exemple, sur le schéma ci-dessous qui représente une charge  $P = 1$  disposée sur l'encorbellement de gauche, le calcul de  $2c_G$  est conduit de la manière suivante:



1) le rectangle d'impact est d'abord étalé verticalement sur la fibre moyenne de l'encorbellement selon le rectangle  $A' B' C' D'$ ;

2) le rectangle  $A' B' C' D'$  s'étale longitudinalement sur la fibre  $S_{1G}$ ; la longueur d'étalement  $2c_G = A'' B''$  s'obtient en menant du milieu des côtés  $A' D'$  et  $B' C'$  des droites inclinées à  $45^\circ$  sur la fibre correspondant à la section d'encastrement.

Les efforts par mètre longitudinal au droit des sections  $S_1$  sont alors supposés uniformément répartis sur la longueur  $2c$ . et ont pour valeur

$$\begin{aligned} m_G(x) &= + \frac{P}{2c_G} (e - e_0) \\ t_G(x) &= - \frac{P}{2c_G} \end{aligned} \quad (6')$$

lorsque  $P$  est disposé sur l'encorbellement de gauche et

$$\begin{aligned} m_D(x) &= - \frac{P}{2c_D} (e - e_0) \\ t_D(x) &= + \frac{P}{2c_D} \end{aligned} \quad (6')$$

lorsque  $P$  est disposé sur l'encorbellement de droite.



Par analogie avec les formules précédentes, nous poserons

$$p = \frac{P}{2c.}$$

valeur qui désignera dans la suite une densité de charge que nous supposons uniformément répartie sur une longueur  $2c.$ , nous noterons dans ce qui suit par  $m_G$  ou  $m_D$ ,  $t_G$  ou  $t_D$  les densités d'efforts produits par des surcharges uniformément réparties. Ces notations seront suivies d'un (x) pour des charges de densité variable c'est-à-dire essentiellement celles qui résulteront d'un développement en série de FOURIER.

#### 1.3.4 - Effets, dans la dalle centrale, des efforts tranchants et moments d'encastrement dans la section $S_1$ .

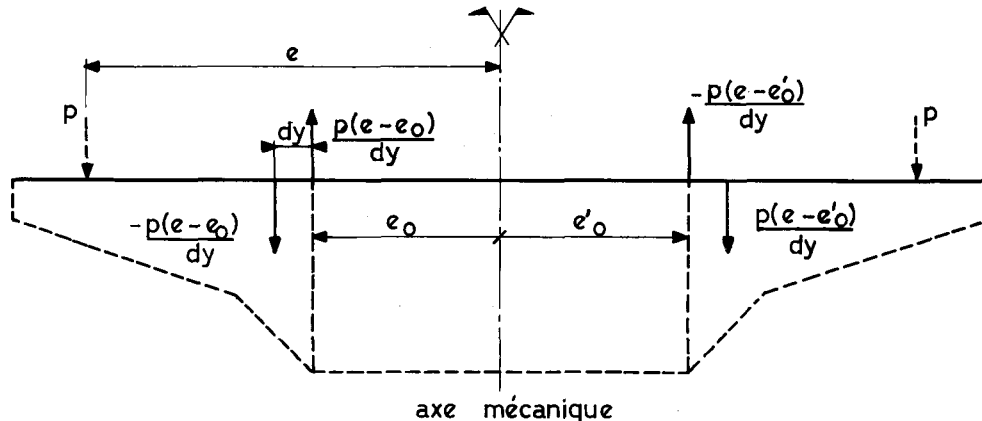
Appelons  $[Z]_y$  l'ordonnée à l'abscisse transversale  $y$  de la ligne d'influence de l'effet considéré (répartition transversale ou flexion transversale) au droit d'une fibre d'excentrement  $y_0$ : cette ligne d'influence est calculée, rappelons-le, sur la dalle équivalente de section rectangulaire (il sera tenu compte, s'il y a lieu, de plusieurs harmoniques).

La répartition transversale de l'effort tranchant exercé sur la section  $S_1$  produit, dans la fibre considérée, l'effet :

$$\begin{aligned} &= -t_G[Z]_{e_0} + p[Z]_{e_0} && \text{charge sur l'encorbellement de gauche} \\ &= t_D[Z]_{e'_0} + p[Z]_{e'_0} && \text{charge sur l'encorbellement de droite} \end{aligned}$$

D'autre part, les moments unitaires  $m_G$  et  $m_D$  sont respectivement équivalents à des couples de deux forces égales et opposées

$\frac{p(e-e_0)}{dy}$  et  $-\frac{p(e-e_0)}{dy}$  distantes de  $dy$  et qui, compte tenu des conventions de signes adoptées, sont disposées de la manière suivante ( $dy$  est considéré comme un accroissement positif, la densité de charge  $p$  est définie au paragraphe qui précède) :



Ces forces produisent dans la fibre considérée les effets suivants

$$\cdot \text{Charge de densité } p \text{ sur l'encorbellement de gauche}$$

$$-\frac{p(e-e_0)}{dy} [Z]_{e_0-dy} + \frac{p(e-e_0)}{dy} [Z]_{e_0} = \frac{[Z]_{e_0} - [Z]_{e_0-dy}}{dy} p(e-e_0)$$

Charge de densité  $p$  sur l'encorbellement de droite

$$-\frac{p(e-e'_0)}{dy} [Z]_{e'_0} + \frac{p(e-e'_0)}{dy} [Z]_{e'_0-dy} = \frac{[Z]_{e'_0-dy} - [Z]_{e'_0}}{dy} p(e-e'_0)$$

Lorsque  $dy$  tend vers zéro, les seconds membres des expressions ci-dessus deviennent

$$\cdot \text{à gauche } \left[ \frac{dZ}{dy} \right]_{e_0} p(e-e_0)$$

$$\cdot \text{à droite } \left[ \frac{dZ}{dy} \right]_{e'_0} p(e-e'_0)$$

où apparaissent les dérivées de la fonction  $Z$  respectivement au droit des sections  $S_1$  à gauche et à droite ; Si l'on exprime  $p(e-e_0)$  et

$p(e-e'_0)$  en fonction des densités de moment  $m_G$  et  $m_D$  définies plus haut, l'effet de ces moments dans la fibre  $y_0$  de la dalle centrale s'exprime par les expressions suivantes

$$\cdot \text{à gauche } \left[ \frac{dZ}{dy} \right]_{e_0} m_G$$

$$\cdot \text{à droite } - \left[ \frac{dZ}{dy} \right]_{e'_0} m_D$$

Après sommation des effets dus à l'effort tranchant et au moment fléchissant dans la section  $S_1$  nous pouvons donc conclure que l'effet dans la dalle centrale dû à une charge  $p$  placée sur l'encorbellement est de la forme :

$p$  sur l'encorbellement de gauche :

$$-t_G [Z]_{e_0} + m_G \left[ \frac{dZ}{dy} \right]_{e_0} = p \left\{ [Z]_{e_0} + \left[ \frac{dZ}{dy} \right]_{e_0} (e-e_0) \right\} \quad (7)$$

$p$  sur l'encorbellement de droite :

$$t_D [Z]_{e'_0} - m_D \left[ \frac{dZ}{dy} \right]_{e'_0} = p \left\{ [Z]_{e'_0} + \left[ \frac{dZ}{dy} \right]_{e'_0} (e-e'_0) \right\} \quad (7)$$

### 1.3.5 - Coefficient de répartition transversale.

L'approximation permise et illustrée par la formule (5) reste possible dans les conditions définies ci-après :

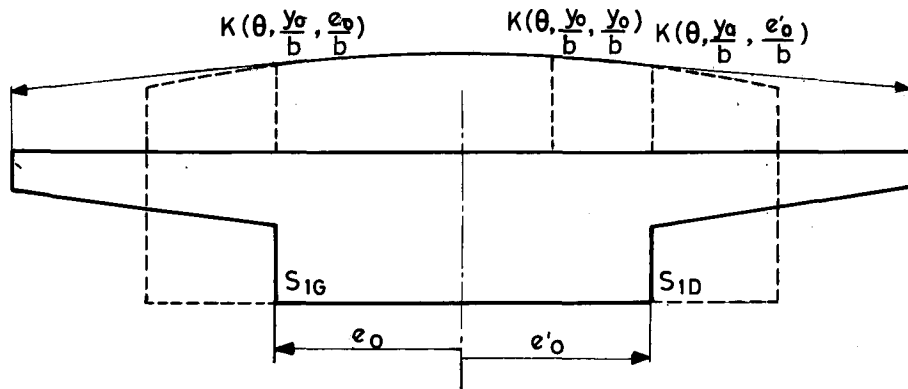
L'expression  $\frac{\sum P_i K_i}{\sum P_i}$  qui représente la majoration pour

excentrement des charges est étendue aux charges disposées sur l'encorbellement en substituant à ces dernières les moments et les efforts tranchants qui en résultent sur la dalle centrale et appliqués aux sections  $S_1$ . Considérons une charge ponctuelle  $p = 1$  disposée sur l'encorbellement, de gauche par exemple; le coefficient  $K\left(\frac{b}{2a}, \frac{y_0}{b}, \frac{e}{b}\right)$

se met, en vertu de ce qui précède et en négligeant l'incidence de l'étalement de  $p$ , sous la forme :

$$K\left(\frac{b}{2a}, \frac{y_0}{b}, \frac{e}{b}\right) = K\left(\frac{b}{2a}, \frac{y_0}{b}, \frac{e_0}{b}\right) + (e - e_0) \frac{dK}{dy}\left(\frac{b}{2a}, \frac{y_0}{b}, \frac{e_0}{b}\right)$$

( Valeur qui peut être obtenue directement en substituant à la )  
 ( ligne d'influence de  $K$  entre chaque extrémité d'encorbellement et la )  
 ( section  $S_1$ , la tangente à cette courbe au point  $S_1$ .



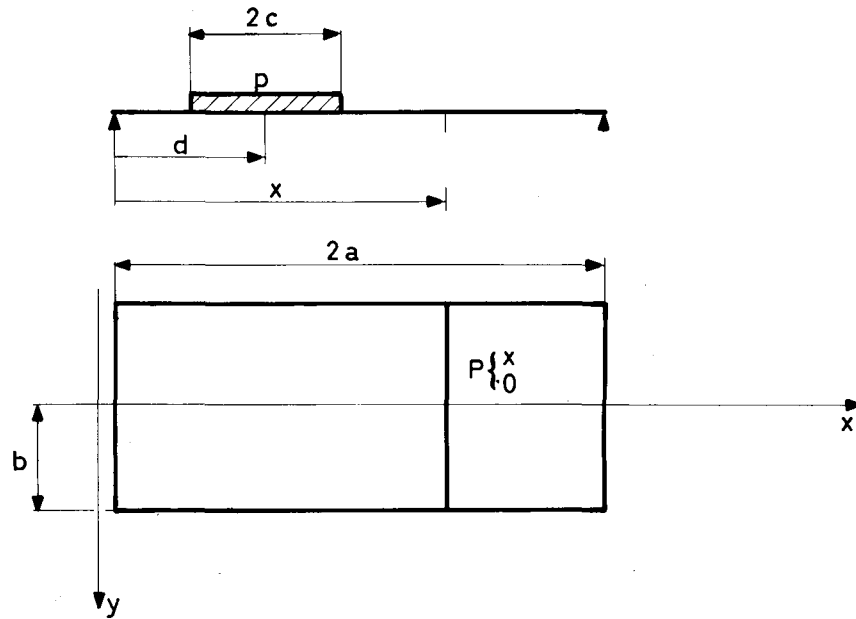
### 1.3.6 - Moments transversaux.

#### 1.3.6.1 - Expression générale.

Il convient tout d'abord de rappeler la méthode utilisée pour le calcul du moment transversal sous des charges situées sur la dalle centrale.

Appelons  $\mu_n$  l'ordonnée de la ligne d'influence du coefficient de flexion transversale dans la fibre  $y_0$  de la section d'abscisse  $x$ , pour l'harmonique de rang  $n$ , les charges se déplaçant entre les deux sections d'encastrement  $S_{1G}$  et  $S_{1D}$ ; cette ligne d'influence est calculée sur la dalle équivalente pour tenir compte de la participation des encorbellements aux efforts longitudinaux.

Considérons une charge linéaire  $p = \text{cste}$  établie sur une longueur  $2c$ , parallèle à l'axe longitudinal du pont et située sur la dalle centrale; appelons  $d$  l'abscisse du centre de gravité de cette charge.



L'expression du moment transversal est donnée au point  $(x, y_0)$  par la formule (3) :

$$m_y(x, y_0) = \sum_n b \mu_n \left( \frac{b}{2a}, \frac{y_0}{b}, \frac{e}{b} \right) p_n(x)$$

La densité de charge  $p = P/2c$ , étalée uniformément sur la longueur  $2c$  est développée en série de FOURIER avec :

$$p_n(x) = \frac{4p}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi c}{2a} \sin \frac{n\pi d}{2a} \sin \frac{n\pi x}{2a}$$

d'où l'expression du moment transversal, tenant compte d'un biais modéré de l'ouvrage (cf. § 1.2.2)

$$m_y(x, y_0) = \frac{4P}{2c \sin \psi} \frac{1}{\pi} \sum_n b \mu_n \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi c}{2a} \sin \frac{n\pi d}{2a} \sin \frac{n\pi x}{2a}$$

où

$$m_y(x, y_0) = \frac{4p}{\sin \psi} \frac{1}{\pi} \sum_n b \mu_n \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi c}{2a} \sin \frac{n\pi d}{2a} \sin \frac{n\pi x}{2a}$$

où  $c$  est le demi-étalement de la charge au droit de la fibre considérée, dans la direction des  $x$ .

En règle générale, pour obtenir le moment maximum transversal dans une section considérée, on place la charge sur cette section en sorte que  $x = d$ .

On constate également que la formule ci-dessus se simplifie lorsque la charge et la section se trouvent à l'abscisse longitudinale  $x = d = a$ , c'est-à-dire au milieu du tablier.

On a en effet :

$$\sin \frac{n \pi d}{2a} \sin \frac{n \pi x}{2a} = \sin^2 \frac{n \pi}{2} = 1 \text{ ou } 0 \text{ suivant que } n$$

est impair ou pair

Il vient alors

$$m_y(a, y_0) = \frac{4p}{\sin \psi} \frac{1}{\pi} \sum_n b \mu_n \sin \frac{n \pi c}{2a} \sin^2 \frac{n \pi}{2}$$

### 1.3.6.2 - Charges placées sur les encorbellements.

Nous appliquerons la formule générale (7) en substituant à la charge les densités de moments et d'efforts tranchants appliqués sur les bords de la dalle centrale. Ces efforts s'appliquent à l'abscisse  $d$  sur une longueur  $2c$  (qui peut être égale à la portée  $2a$ ). Ils peuvent être développés en série de FOURIER : le résultat de ce développement est de la forme :

$$m(x) = \frac{4m}{\sin \psi} \frac{1}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \sin \frac{n \pi x}{2a} \sin \frac{n \pi d}{2a} \sin \frac{n \pi c}{2a}$$

$$t(x) = \frac{4t}{\sin \psi} \frac{1}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \sin \frac{n \pi x}{2a} \sin \frac{n \pi d}{2a} \sin \frac{n \pi c}{2a}$$

Le moment transversal au point de coordonnées  $x, y$  nous est alors donné par la formule générale(3) en tenant compte de la forme nouvelle du coefficient de flexion transversale donné formule (7).

On obtient alors :

. Charge disposée sur l'encorbellement de gauche.

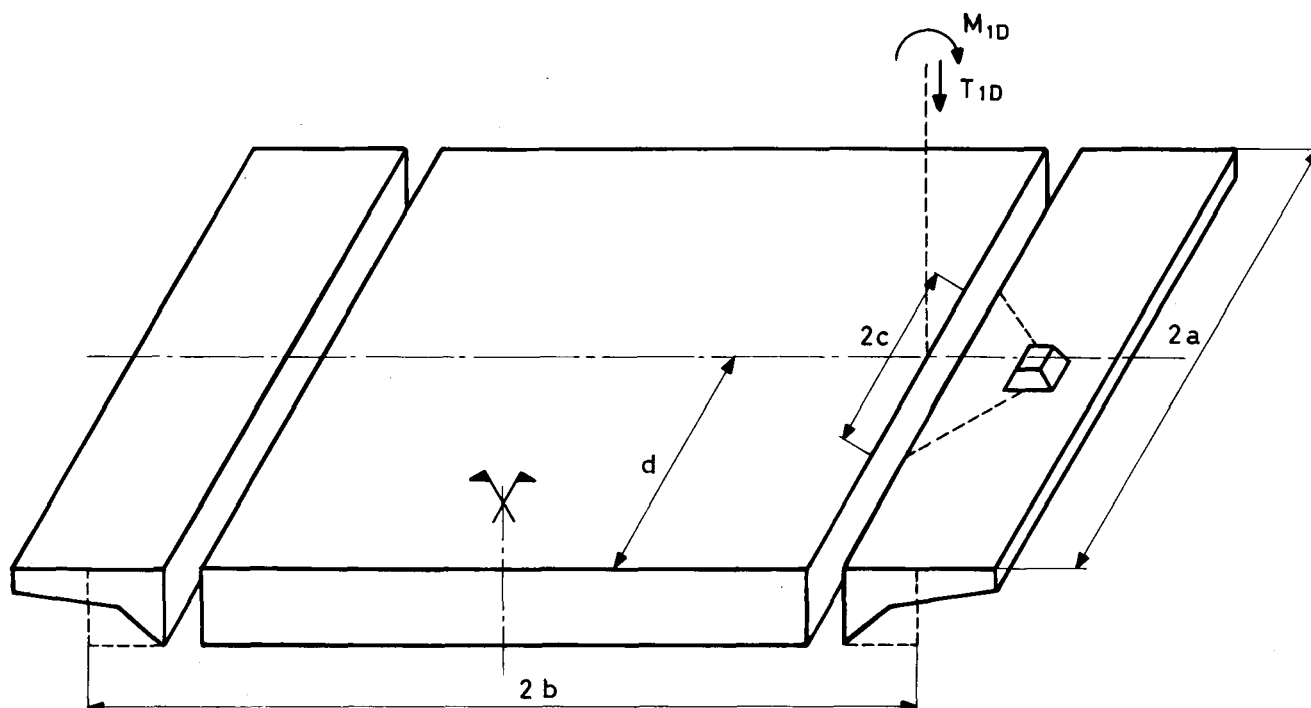
$$m_y(x, y) = \frac{4m_G b}{\sin \psi} \frac{1}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \left( \frac{d\mu}{dy} \right)_{y=e_0} \sin \frac{n \pi x}{2a} \sin \frac{n \pi c}{2a} \sin \frac{n \pi d}{2a}$$

$$- \frac{4t_G b}{\sin \psi} \frac{1}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} (\mu)_{y=e_0} \sin \frac{n \pi x}{2a} \sin \frac{n \pi c}{2a} \sin \frac{n \pi d}{2a}$$

. Charge disposée sur l'encorbellement de droite.

$$m_y(x, y) = - \frac{4m_D b}{\sin \psi} \frac{1}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \left( \frac{d\mu}{dy} \right)_{y=e_0} \sin \frac{n \pi x}{2a} \sin \frac{n \pi c}{2a} \sin \frac{n \pi d}{2a}$$

$$+ \frac{4t_D b}{\sin \psi} \frac{1}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} (\mu)_{y=e_0} \sin \frac{n \pi x}{2a} \sin \frac{n \pi c}{2a} \sin \frac{n \pi d}{2a}$$



### 1.3.6.3 - Charges placées sur la dalle centrale.

Les charges placées sur les encorbellements créent des moments négatifs dans la fibre  $y = 0$  de la dalle centrale; pour des ponts très larges, des charges très excentrées sur la dalle centrale peuvent également créer des moments transversaux négatifs qui viendront se cumuler aux précédents. Par ailleurs des charges centrées sur la dalle centrale créent des moments positifs. Tous ces moments seront calculés à partir des lignes d'influence de  $\mu$  pour la dalle équivalente de section rectangulaire.

Dans le calcul des moments transversaux sur un pont-dalle présentant de larges encorbellements on distinguera donc :

- 1°) les charges placées en tout ou partie sur les encorbellements (moments négatifs);
- 2°) les éléments de ces charges qui empiètent sur la dalle centrale (exemple : 2ème roue d'un camion Bc, 2ème chenille d'un char ou élément d'une voie chargée par A ( $l$ ));
- 3°) les charges placées sur la dalle centrale.

Les moments apportés dans la dalle centrale par les deux premières catégories de charges sont cumulés de toute manière, puisque les secondes sont indissociables des premières; ils viennent s'ajouter à la troisième catégorie s'ils sont défavorables pour l'effet que l'on a en vue (moments positifs ou négatifs).

(( A noter enfin que les moments transversaux de charges perma-  
 )) nentes (poids propre, superstructures et précontrainte transversale  
 (( éventuelle) doivent être calculés par l'intermédiaire des lignes d'in-  
 )) fluence de  $\mu$  et des densités de charge qui les représentent, car ces  
 (( termes ne sont pas négligeables comme ils le seraient dans le cas d'une  
 )) dalle rectangulaire sans encorbellement.

Dans le cas d'une dalle précontrainte longitudinalement par des câbles situés dans la dalle centrale, il convient de tenir compte des moments transversaux introduits par cette précontrainte en répartissant les charges fictives  $-Fy$  dues à la courbure des câbles, sur les lignes d'influence de  $\mu$ .

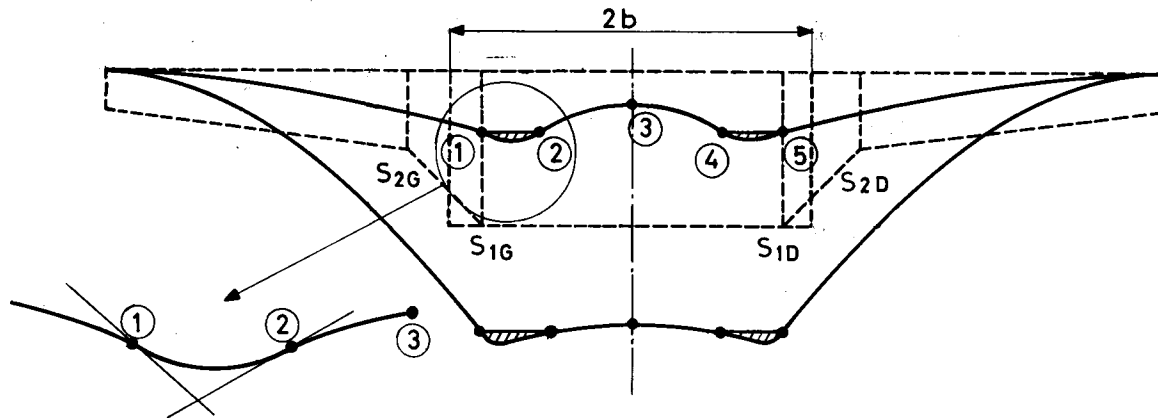
#### REMARQUES :

- 1) Analytiquement, la méthode qui vient d'être exposée conduit à prolonger la ligne d'influence de  $\mu_n$ , calculée pour la dalle équivalente, par des tangentes au-delà de la dalle centrale, mais il est important de retenir dans ce cas que l'étalement longitudinal de la charge, qui intervient dans son développement en série de FOURIER, doit être pris au droit de la section d'encastrement et non pas sur la fibre chargée.
- 2) A noter également que les efforts tranchants  $T_{1D}$  et  $T_{1G}$  ne sont pas les efforts tranchants maxima aux encastements, dans le cas de charges concentrées (BC, BR). Ils ne sauraient donc être utilisés pour un dimensionnement des armatures de cisaillement verticales au voisinage des encastements  $S_{1G}$  et  $S_{1D}$ . L'effort tranchant à prendre en compte dans ce but sera évalué prudemment en plaçant les surcharges contre les sections d'encastrement, là où leur étalement est minimum.\*
- 3) Lorsque la structure comporte deux encastements de part et d'autre de la dalle centrale (cf. figure ci-dessous), l'origine des encorbellements est la section la plus proche de l'axe de la dalle centrale ( $S_{1G}$  et  $S_{1D}$ ).
- 4) La méthode de calcul qui vient d'être exposée serait tout aussi applicable pour obtenir les densités de moments transversaux au droit d'une fibre de la dalle différente de  $y = 0$ . Notamment, pour obtenir les courbes enveloppes des moments fléchissants transversaux, on calculera les efforts pour les fibres  $y = -b/2$  et  $y = +b/2$  ( $2b$  étant la largeur de la dalle équivalente de section rectangulaire), en plus de la fibre centrale  $y = 0$ .

---

\* NOTA : l'effort tranchant réel dû à des surcharges ainsi placées, est un effort tranchant de poinçonnement; c'est-à-dire que leur poids se répartit entre des périmètres concentriques, et la participation des consoles réduit le cisaillement à la limite de la nervure; mais les variations d'épaisseur des consoles rendent difficile une évaluation plus précise.

On obtiendra alors des courbes enveloppes de moments transversaux calculées en 5 points, qui auront généralement la forme représentée ci-dessous.



Toutefois, sur la courbe ci-dessus, nous nous trouvons devant une incertitude sur la valeur du moment transversal dans la dalle centrale au voisinage des sections d'encastrement (partie hachurée). En effet, il ne peut exister de point anguleux au droit de  $S_{1G}$  et  $S_{1D}$ , s'il n'y a pas discontinuité transversale des efforts tranchants. Mais comme nous avons en fait négligé la participation longitudinale de l'encorbellement, les valeurs des moments fléchissants calculées dans les sections d'encastrement sont obtenues sans doute légèrement par excès en valeur absolue, la courbe interpolée peut être conservée. Cette courbe interpolée peut être obtenue entre les points 1 et 2 par exemple (cf. figure), en considérant que ces points sont des points d'inflexion sur le tracé de la courbe enveloppe qui pourra être assimilée à une parabole entre ces points.

### 1.3.7 - Applications pratiques des calculs qui précèdent. Dispositions constructives particulières.

#### 1.3.7.1 - Ferraillage transversal des encorbellements

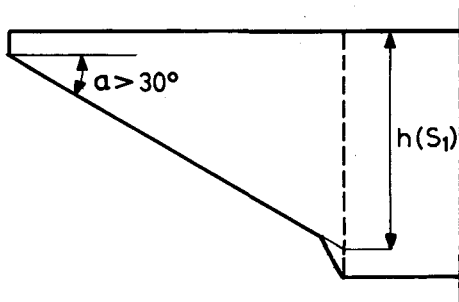
Pour la justification du ferraillage transversal au voisinage des sections  $S_1$  et  $S_2$ , il est intéressant de calculer les efforts tranchants et les moments fléchissants dans les sections  $S_2$ . - le calcul de ces efforts relève d'un calcul identique à celui qui a été exposé dans le paragraphe 1.3.3. Si le ferraillage transversal est disposé parallèlement aux lignes d'appuis, il y a lieu de multiplier les sections obtenues à partir des moments  $m_1$  et  $m_2$  par  $1/\sin^2 \varphi$

Il convient néanmoins de considérer, lors du calcul des sections d'armatures en  $S_1$  une section éventuellement réduite en épaisseur :

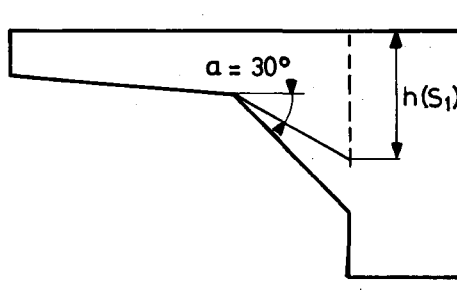
a) si la pente transversale de l'intrados entre l'extrémité de la dalle et la section  $S_2$ , prise par rapport à une horizontale excède  $30^\circ$  on prolongera fictivement la ligne jusqu'à son intersection avec la section  $S_1$ . Cette ligne coupe la section  $S_1$ ; on réduira alors la hauteur de la section  $S_1$  à la distance à l'extrados du point d'intersection.



b) si la pente transversale de l'intrados entre l'extrémité de la dalle et la section  $S_2$  est inférieure à  $30^\circ$  on mènera du point de rupture de pente en  $S_2$  une droite inclinée à  $30^\circ$  par rapport à une horizontale. Si cette ligne coupe la section  $S_1$  on réduira alors la hauteur de la section  $S_1$  à la distance à l'extrados du point d'intersection.



Cas a

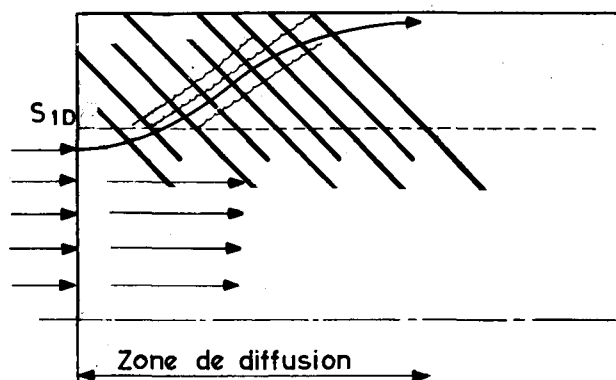


Cas b

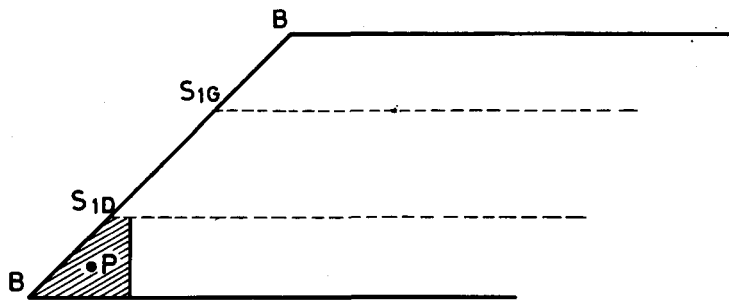
### 1.3.7.2 - Dispositions particulières aux abouts.

Dans le cas d'un ouvrage précontraint dans le sens longitudinal et armé dans le sens transversal il convient de tenir compte des efforts horizontaux qui se développent dans les zones voisines des abouts sur les encorbellements et qui sont dus au fait que la précontrainte ne s'exerce, dans ces zones où sa diffusion est progressive, que sur une fraction de l'encorbellement. De fait, de nombreux cas de fissuration ont été signalés dans ces parties d'ouvrages.

Un ferrailage horizontal, disposé perpendiculairement aux génératrices du cône de diffusion, ou à  $50$  grades, évitera ces inconvénients. Il ne sera pas nécessaire de le justifier d'une manière précise car un calcul rigoureux entraînerait des sections théoriques importantes et de telles sections ne sont généralement pas nécessaires à l'équilibre mécanique.



A noter enfin la nécessité, lorsque le pont est biais, de prévoir sur les piles culées un chevêtre incorporé à la structure et régnant sur toute la largeur biaise du tablier. Le schéma ci-dessous nous montre qu'il s'avère matériellement impossible de reprendre par la seule section  $S_{1D}$  des efforts introduits par des charges disposées dans l'angle aigu s'il n'existe pas d'appui selon  $BS_{1D}$ . Ce type d'ouvrage ne permet donc pas, en cas de biais prononcé, de diminuer la largeur des piles culées.



### 1.3.8 - Précontrainte transversale

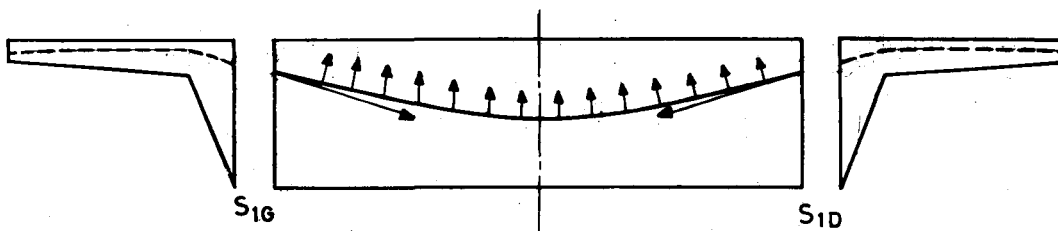
Supposons la dalle soumise à une précontrainte transversale d'intensité  $F$  par mètre linéaire de pont.

Dans les encorbellements, l'effet de cette précontrainte est celui d'une compression  $F$  excentrée de  $w$ , où  $w$  est repéré par rapport à la ligne moyenne, positivement vers le haut.

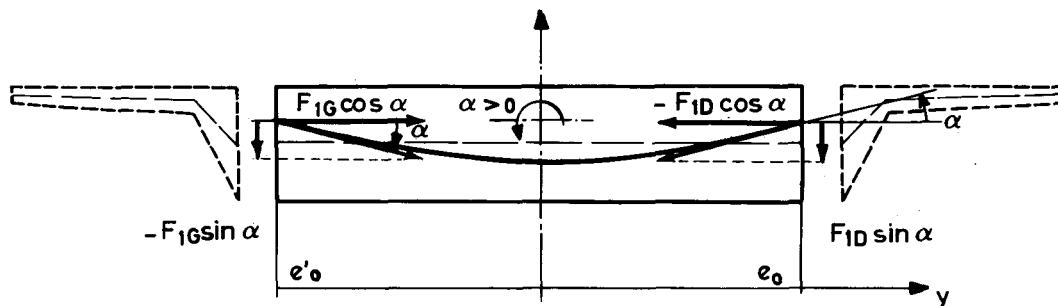
Dans la dalle centrale, l'action de la précontrainte transversale, considérée comme une charge extérieure directement appliquée est caractérisée par :

- Deux forces concentrées, appliquées aux sections  $S_{1G}$  et  $S_{1D}$ , portées par les tangentes au tracé des câbles transversaux et dirigées vers l'intérieur de la dalle centrale.

- Le long du câble, des forces dues à la courbure des câbles qui, compte tenu des faibles pentes de ces derniers, constituent une charge verticale répartie de densité  $-F \frac{d^2w}{dy^2}$ ; nous négligerons les forces réparties de variation de tension  $\frac{dF}{dy}$  dirigées parallèlement au tracé des câbles transversaux.



1.3.8.1 - Effet des forces concentrées appliquées dans les sections  $S_{1G}$  et  $S_{1D}$ .



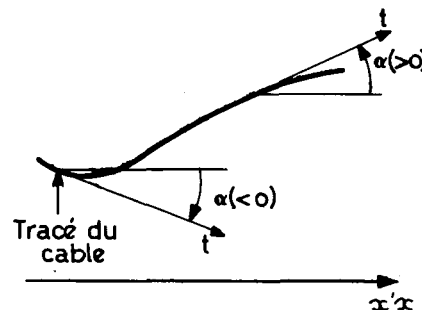
les efforts  $F_{1G}$  et  $F_{1D}$  appliqués aux sections  $S_{1G}$  et  $S_{1D}$  se décomposent en :

- deux efforts de compression simple d'intensité  $F_{1G} \cos \alpha$  et  $-F_{1D} \cos \alpha$  s'exerçant le long de la ligne moyenne.

- deux couples de flexion  $F_{1G} w_{1G} \cos \alpha_G$  et  $-F_{1D} w_{1D} \cos \alpha_D$ , où  $w_{1G}$  et  $w_{1D}$  sont les valeurs particulières de l'excentrement du câble  $w$  dans les sections  $S_{1G}$  et  $S_{1D}$ ; ces moments sont positifs dans le sens des aiguilles d'une montre.

- deux charges verticales d'intensité  $-F_{1G} \sin \alpha_G$  et  $F_{1D} \sin \alpha_D$ .

$\alpha = (\vec{x}'\vec{x}, \vec{T})$  étant l'angle dans la section  $S_1$ , de la tangente du tracé des câbles, avec un axe horizontal de référence  $\vec{x}'\vec{x}$ . L'axe  $\vec{x}'\vec{x}$  et  $\vec{T}$  étant orientés comme l'indique la figure ci-contre; le sens positif est le sens trigonométrique.



Nous pouvons donc écrire que la dalle centrale est soumise dans les sections  $S_1$ , aux densités d'efforts suivants, les angles  $\alpha$  étant petits :

$$\begin{aligned} \text{moments fléchissants } m_{1G} &= + F_{1G} w_{1G} & m_{1D} &= (- F_{1D} w_{1D}) = F_{1D} w_{1D} \\ \text{efforts tranchants } t_{1G} &= - F_{1G} \alpha_G & t_{1D} &= F_{1D} \alpha_D \end{aligned}$$

dont nous calculerons les effets dans la dalle centrale en un point  $(x, y_0)$  par application de la formule générale (7) :

$$\text{MOE } (x, y_0) = \frac{4b}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{2a} \sin^2 \frac{n\pi}{2} \left\{ -t_{1G} [\mu_n]_{e_0} + t_{1D} [\mu_n]_{e_0} + m_{1G} \left[ \frac{d\mu_n}{dy} \right]_{e_0} - m_{1D} \left[ \frac{d\mu_n}{dy} \right]_{e_0} \right\}$$

1.3.8.2. - Effet des forces réparties dues à la courbure des câbles transversaux :

Ces forces ont pour densité  $-F \frac{d^2 w}{dy^2}$  et sont disposées sur toute la largeur de la dalle centrale.

avec  $w = Y - Z$

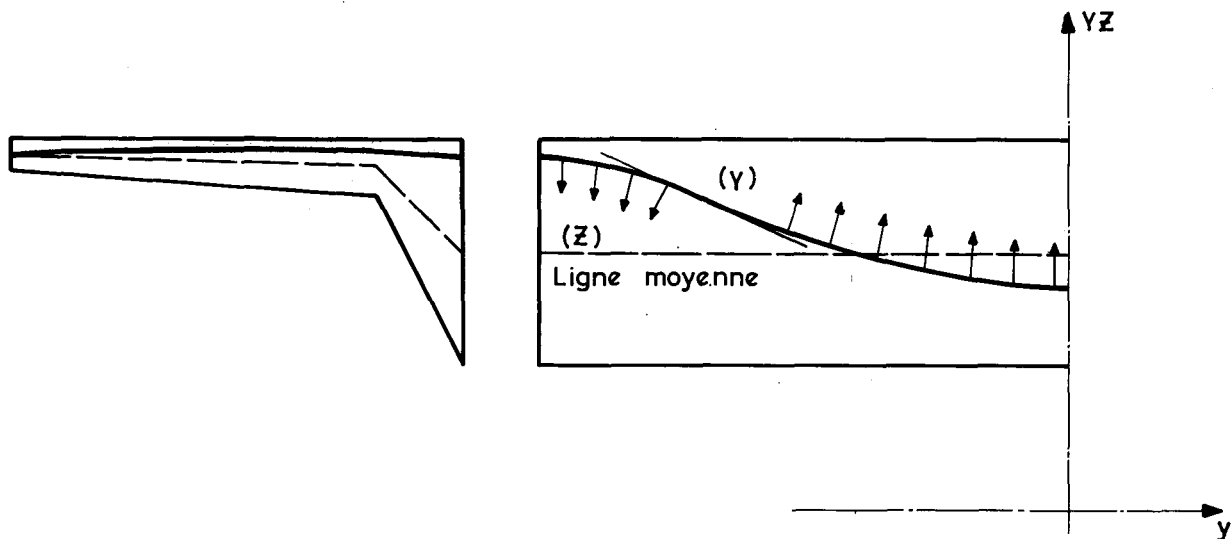
$$\text{et } \frac{d^2 w}{dy^2} = w'' = Y'' - Z''$$

Y représente la cote des câbles transversaux et Z celle de la ligne moyenne par rapport à une horizontale de référence.

En général pour les formes simples de coffrages (coffrages plans) le terme  $Z''$  est nul et seul  $Y''$  intervient dans la densité de charge répartie.

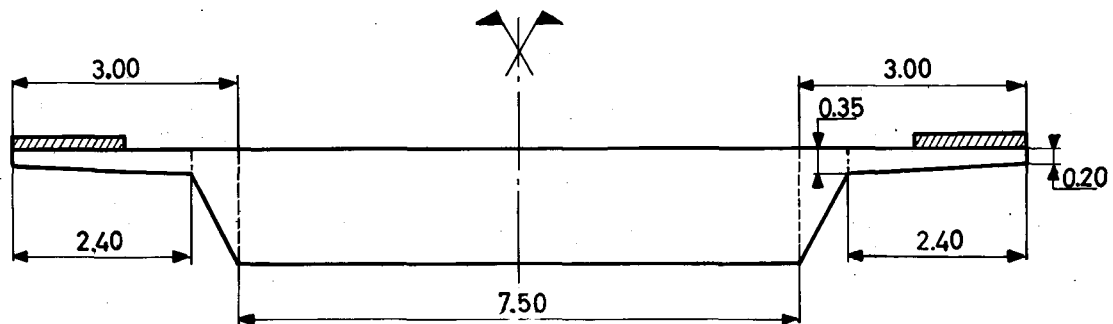
Le moment transversal dû à ces forces réparties en un point quelconque  $(x, y_0)$  de la dalle centrale s'exprime alors par

$$MN_2(y_0) = \frac{4b}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{2a} \sin^2 \frac{n\pi}{2} \int_{e_0}^{e'_0} -F(y) w''(y) \mu_n(y_0, y) dy$$



## 2. EXEMPLE D'APPLICATION

Nous nous proposons d'étudier la répartition transversale et les moments de flexion transversale dans un pont-dalle constitué d'une travée indépendante biaisée ( $\varphi = 80$  grades) de 18,50 m. de portée et dont la coupe transversale, symétrique, répond au schéma suivant :



Les charges appliquées sur cet ouvrage sont conformes à l'édition 1972 du fascicule 61 titre II du C.P.C.; les charges des véhicules militaires STANAG 120 sont également prévues.

L'ouvrage est un pont de première classe, selon définition du fascicule 61 titre II du C.P.C.

Le programme de calcul M.C.P.\* du S.E.T.R.A automatise en grande partie les calculs dont l'analyse a été présentée dans la première partie de ce document.

Nous n'aurons donc pour autre objectif, dans cette seconde partie, que de présenter et d'expliquer les résultats du calcul automatique dans le contexte de l'étude générale

### 2.1 - LARGEUR DE LA DALLE EQUIVALENTE DE SECTION RECTANGULAIRE.

L'épaisseur de la dalle centrale est 0,75m; nous en déduisons la largeur droite  $2b$  de la dalle équivalente de section rectangulaire dont l'inertie est égale à celle de la structure étudiée soit 0,354 m<sup>4</sup>

$$2b = \frac{12 I}{h^3} = 10,07 \text{ m}$$

\* cf. Manuel d'utilisation M.C.P. 70

Le paramètre d'entretoisement  $\theta$  utilisé pour l'étude de la flexion longitudinale est égal à  $\frac{b}{2a} = 0,272$

Le paramètre d'entretoisement  $\theta'$  utilisé pour l'étude de la flexion transversale est égal à  $\frac{b}{2a \sin^2 \psi} = 0,277$  ( $\psi = 91$  grades)

## 2.2 - ETUDE DE LA FLEXION LONGITUDINALE.

Nous nous proposons de rechercher la densité de moment de flexion longitudinale qui s'exerce au voisinage d'un point P, que nous choisirons à mi-portée de la dalle, dont l'excentrement, pris par rapport à l'axe longitudinal de la dalle équivalente de section rectangulaire a pour valeur  $y = -b = -5,03$  m.

Dans ce but, nous calculerons le coefficient de majoration dû à l'excentrement des charges qu'il conviendra de multiplier par la densité de moment moyen  $\frac{M(x)}{2b}$  dans la dalle, calculée sans répartition transversale, pour connaître la densité de moment au point P.

Ce coefficient de majoration est égal à

$$\frac{\sum Q_i K(\theta, \frac{y}{b}, \frac{e_i}{b})}{\sum Q_i}$$

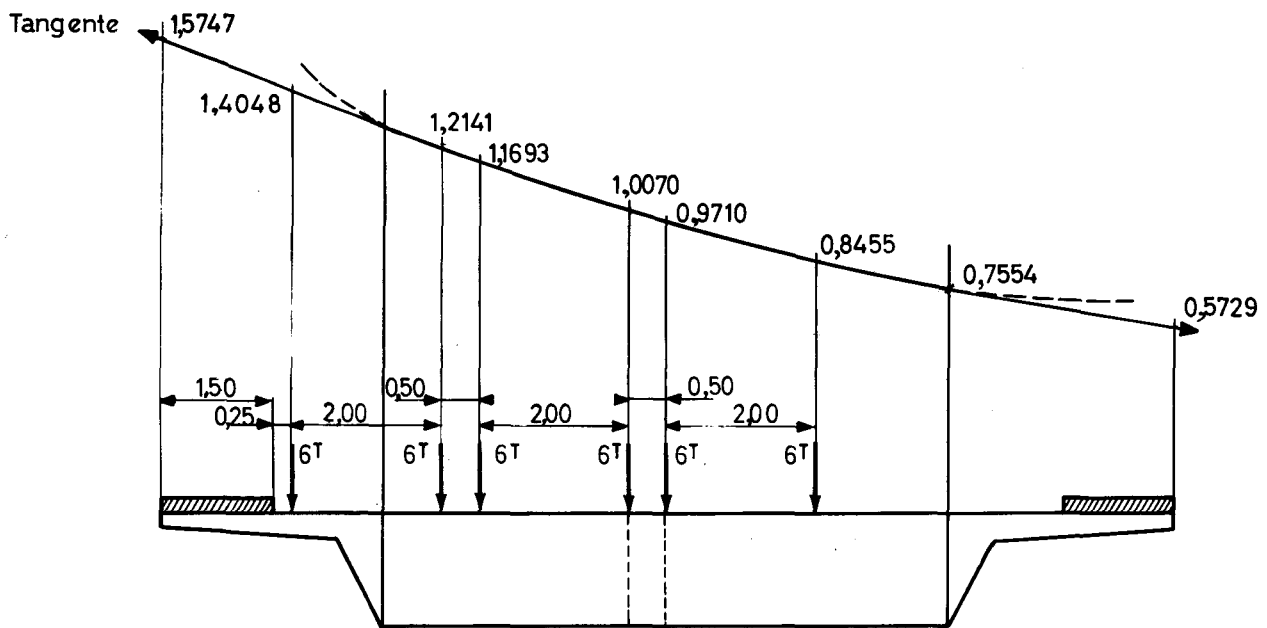
pour un ensemble de charges  $i$  d'intensité  $Q_i$  et d'excentrement  $e_i$ .

L'ordinateur calcule et imprime la ligne d'influence du coefficient de répartition transversale  $K(\theta, \frac{y}{b}, \frac{e_i}{b})$  lorsque la charge unité se déplace transversalement d'une extrémité à l'autre de l'ouvrage par bonds successifs de 0,25 m. Les résultats de ce calcul sont représentés graphiquement, pour la fibre d'excentrement  $y = -5,03$  m sur le graphique ci-contre où nous avons représenté également les impacts et le calcul des effets du convoi Bc.

Cette ligne d'influence calculée est conservée sur toute la largeur de la dalle centrale.

Pour des points extérieurs à la dalle centrale, c'est-à-dire situés sur les encorbellements, l'ordinateur substitue à la ligne d'influence calculée, la tangente à la courbe au droit des sections  $S_1$  (cf. § 1.3.6.2). Le calcul, effectué pour la surcharge Bc est semblable pour les autres types de surcharges et aboutit aux valeurs maximales suivantes pour le point P :

	A	B <sub>c</sub>	B <sub>r</sub>	B <sub>l</sub>	M <sub>c</sub>	M <sub>e</sub>
$\frac{\sum Q_i K(\theta, \frac{y}{b}, \frac{e_i}{b})}{\sum Q_i}$	0,90	1,047	1,405	1,157	1,233	1,240



Les camions sont disposés dans la position la plus excentrée et numérotés de la gauche vers la droite dans l'ordre croissant :

Camion de gauche :

$$6 (1,4048 + 1,2141) \times 1,20 = 18,856$$

Camions ① et ②

$$6 (1,4048 + 1,2141 + 1,1693 + 1,0070) \times 1,10 = 31,648$$

Camions ①② et ③

$$6 (1,4048 + 1,2141 + 1,1693 + 1,0070 + 0,9710 + 0,8455) \times 0,95 = 37,687$$

$$\text{d'où } \left( \frac{\sum P_i k_i}{\sum P_i} \right)_{B_c} = \frac{37,687}{6 \times 6} = 1,0468 \approx 1,047$$

(Les coefficients 1,20 1,10 et 0,95 sont les coefficients  $b_c$  de l'article 5,22 du fascicule 61 titre II du CPC, fonction du nombre de files de camions).

Le moment fléchissant régnant dans la dalle à l'abscisse considérée et pour une charge donnée est le produit de  $M(x)$  calculé pour cette charge et la valeur maximale de  $\frac{\sum Q_i K(\theta \cdot \frac{y}{b}, \frac{e_i}{b})}{\sum Q_i}$  après qu'un calcul similaire ait été fait pour plusieurs autres fibres (généralement :  $y = b, -b/2, 0, b/2, b$ )

### 2.3 - MOMENTS DE FLEXION TRANSVERSALE.

Nous rechercherons tout d'abord les densités de moments et d'efforts tranchants qui s'exercent au droit des sections d'encastrement en recherchant, pour chacune des charges, la longueur d'application de ces moments (étalement).

Les résultats de ce calcul sont consignés dans le tableau ci-dessous, ils s'entendent tous coefficients de pondération et de majoration exclus à l'exception de ceux dus aux effets dynamiques.

	Encorbellement de gauche (S <sub>1G</sub> )			Encorbellement de droite (S <sub>1D</sub> )		
	m <sub>1G</sub>	t <sub>1G</sub>	2c <sub>G</sub>	m <sub>1D</sub>	t <sub>1D</sub>	2c <sub>D</sub>
C.P. + superstructures	-6,241	-3,945	18,50	-6,241	3,945	18,50
A	-1,587	-2,115	18,50	-1,587	2,115	18,50
B <sub>c</sub>	-3,647	-2,918	4,68	-3,647	2,918	4,68
B <sub>r</sub>	-4,359	-3,632	3,13	-4,359	3,632	3,13
B <sub>t</sub>	-4,508	-4,508	4,045	-4,508	4,508	4,045
Trottoirs 0,450 t/m (Roue de 6t isolée)*	-1,519	-0,675	18,50	-1,519	0,675	18,50
M <sub>c</sub>	-7,083	-7,218	13,01	-7,083	7,218	13,01
M <sub>e</sub>	-6,410	-8,55	4,343	-6,410	8,55	4,343

Exemples de calcul :

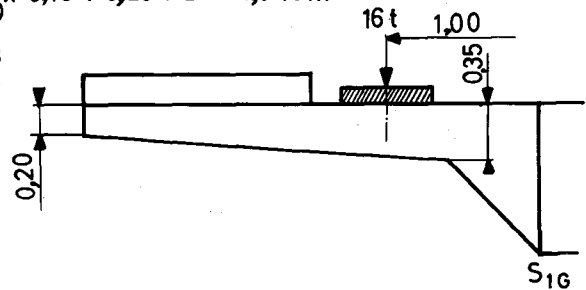
1°/ Surcharge B<sub>t</sub> sur l'encorbellement de gauche une seule file de roues est sur l'encorbellement.

Étalement longitudinal des 2 roues disposées à cheval sur la section à mi-travée

$$2c = 1,60 + \frac{3}{2} \times 0,08 + \frac{2}{2,60} \times 0,15 + 0,20 + 2 = 4,045 \text{ m}$$

$$m_{1G} = \frac{16 \times 1}{4,045} \times 1,14 = -4,508$$

DYNAB<sub>c</sub>



2°/ Moments dû à M<sub>e</sub>

$$M = p \left[ \int_0^{0,60} \frac{x dx}{2,82 + 1,34x} + \int_{0,60}^{1,50} \frac{x dx}{2,46 + 1,94x} \right]$$

avec  $p = 24,75 \text{ t/ml transversal}$

(cf. manuel d'utilisation MCP page 144 : pour ce type de charge, le rectangle d'impact étalé verticalement sur la fibre moyenne de l'encorbellement doit tenir compte des discontinuités de pentes de ce dernier).

\* à considérer pour l'état limite ultime.



### 2.3.1 - Calcul du ferrailage transversal aux amorces d'encorbellements.

Outre l'intérêt des moments ci-dessus dans l'étude de la flexion transversale de la dalle centrale, ils nous permettent de calculer le ferrailage transversal (ou la précontrainte transversale) à prévoir dans les sections  $S_1$ .

Nous recherchons ci-après le moment maximal à prendre en compte pour une vérification à l'état limite d'utilisation.

Charge	Coefficient de pondération	Autres coefficients		
Charge permanente superstructures				
- 6,241 x	1,03	-	=	- 6,428
trottoirs (0,450 t/m <sup>2</sup> )				
- 1,519 x	1,20		=	- 1,822
charge Bc				
- 3,647 x	1,20	x	1,20 <sup>(1)</sup>	= - 5,251
charge A				
- 1,587 x	1,20	x	1 <sup>(2)</sup>	= - 1,904
charge B <sub>t</sub>				
- 4,508 x	1,20		=	- 5,409
charge B <sub>r</sub>				
- 4,359 x	1,20		=	- 5,230
charge M <sub>c</sub>				- 7,083
charge M <sub>e</sub>				- 6,410

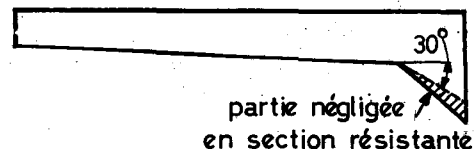
Le moment à prendre en compte est alors :

$$\text{charges civiles} - 6,428 - 1,822 - 5,409 = - 13,66 \text{ t.m.}$$

$$\text{charges militaires} - 6,428 - 1,822 - 7,083 = -15,33 \text{ t.m.}$$

Compte tenu de la remarque n° 1 du § 1.3.7.1, la hauteur (réduite) de la section  $S_1$  pour le calcul des sections d'armatures sera de 0,7 m.

$$\text{soit } 0,35 + 0,60 \text{ tg } 30^\circ$$



(1) coefficient  $b_c$  relatif à une voie chargée

(2) produit des coefficients  $a_1 a_2$  pour une voie chargée.

### 2.3.2. - Etude de la dalle centrale.

Nous nous intéressons à la section médiane de la travée et nous choisirons, à titre d'exemple, de calculer les densités de moments transversaux au droit de l'axe de la dalle équivalente de section rectangulaire. Nous calculerons ces moments transversaux dans leur direction principale (selon le biais mécanique) en adoptant, pour un premier calcul, une valeur nulle du coefficient de POISSON.

L'ordinateur calcule et imprime la ligne d'influence du coefficient de flexion transversale  $\mu$  et nous avons représenté ci-contre cette ligne d'influence pour le premier harmonique - Sur ce diagramme nous avons disposé les surcharges prépondérantes dans la position la plus défavorable pour le calcul des moments maxima (trait gras) et pour le calcul des moments minima (trait fin).

Les résultats ci-après s'entendent tous coefficients de pondération ou de majoration exclus, à l'exception de ceux dus aux effets dynamiques.

Dans la recherche des moments négatifs nous devons considérer 3 termes :

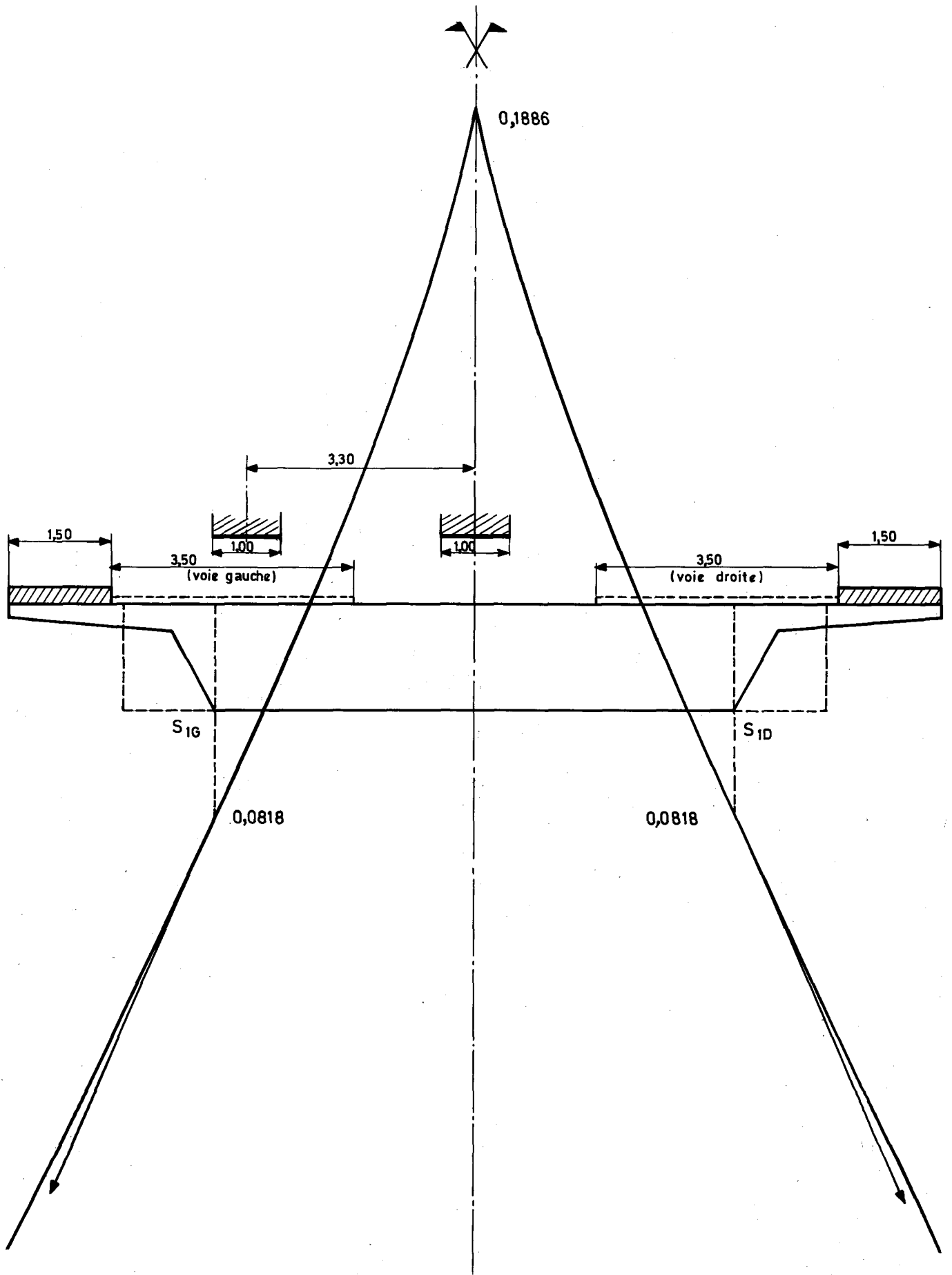
1) MOE : Moments dus aux charges disposées sur les encorbellements

2) MN1 : Moments dus aux éléments de ces charges qui empiètent sur la dalle centrale;

3) MN2<sup>-</sup> : Moments négatifs dus aux charges entièrement disposées sur la dalle centrale selon leur excentrement maximum, compte tenu de la présence éventuelle des surcharges étudiées en a) et b).

La recherche des moments positifs se fait en disposant les charges sur la dalle centrale (MN<sub>2</sub><sup>+</sup>).

33  
LIGNE D'INFLUENCE DE  $\mu_1$



## MOE

Moments dans la dalle centrale dus aux moments et efforts tranchants appliqués dans les sections  $S_1$ .

Section étudiée  $x = 9,25$   $y = 0$

1) RESULTATS (symétriques : valables aussi bien pour les charges disposées sur l'encorbellement de gauche ou sur l'encorbellement de droite.

Charge permanente - superstructures	- 4,100
Précontrainte transversale (pour mémoire)	-
A	- 1,587
B <sub>c</sub>	- 1,266
B <sub>r</sub>	- 1,077
B <sub>t</sub> *	- 1,301
Trottoirs 0,450 t/m <sup>2</sup>	- 0,858
M <sub>c</sub>	- 5,574
II <sub>e</sub> *	- 2,443

2) EXEMPLE DE CALCUL (B<sub>c</sub> placé sur l'encorbellement de gauche - calcul du premier harmonique).

ordonnée de la ligne d'influence de  $\mu_1$  en  $S_{1G}$  = - 0,0818

pente de la tangente à  $\mu_1$  en ce point 0,0551

Etalement longitudinal 4,68 m

$$MOE (B_c) = \frac{4 \times 5,04}{\pi \sin 91} \sin^2 \frac{\pi}{2} \sin \frac{2,34 \pi}{18,50} \left[ - 3,647 \times 0,0551 - 2,918 \times 0,0818 \right]$$

$$MOE (B_c) = - 1,109$$

Le complément obtenu après prise en compte des harmoniques 3 et 5 (0,163) représente une majoration de 15 % du moment calculé avec le seul harmonique 1

\* premier harmonique seul (calcul non automatisé) - le résultat est donc approché.

MN 1

Moments transversaux dans la dalle centrale dus aux éléments de charges des encorbellements qui empiètent sur la dalle centrale.

Section étudié  $x = 9,25$   $y = 0$

1) RESULTATS (symétriques, valables aussi bien pour les charges disposées sur l'encorbellement de gauche ou sur l'encorbellement de droite.

Charge permanente - superstructures	voir MN2 <sup>+</sup>
A	- 0,349
B <sub>c</sub>	- 0,463
B <sub>r</sub>	-
B <sub>t</sub> *	- 0,239
Trottoirs 0,450 t/m <sup>2</sup>	-
M <sub>c</sub>	+ 2,281
M <sub>e</sub> *	- 0,182

2) EXEMPLE DE CALCUL (B<sub>t</sub> placé sur l'encorbellement de gauche - la 2ème file de roues empiète sur la dalle centrale)

Excentrement de la 2ème file - 2,750 m

Valeur de  $\mu_1$  en ce point - 0,0239

Etalement longitudinal  $2c = 1,60 + \frac{3}{2} \times 0,08 + 0,75 = 2,470$  m

Poids 16 tonnes

$$MN_1(B_t) = - \frac{4 \times 5,04}{\pi \sin 91} \times \frac{16}{2,47} \times 0,0239 \sin \frac{1,235 \pi}{18,50} \sin^2 \frac{n \pi}{2}$$

$$MN_1(B_t) = - 0,210 \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{DYNA} B_c}}{1,14} = - 0,239$$

\* résultat approché - 1er harmonique seul.

# MN 2

Moments transversaux négatifs dus à des charges entièrement disposées sur la nervure, en supplément et compte tenu de la position des charges utilisées dans le calcul de MOE et MN1

Section étudiée  $x = 9,25$   $y = 0$

Dans le cas d'espèce, aucune autre charge que celle due à la courbure des câbles de précontrainte longitudinale ne produit d'effet négatif dans la fibre considérée, susceptible de venir s'ajouter aux charges précédentes.

Il reste à calculer l'effet de la courbure des câbles longitudinaux en calculant l'effet d'une charge de densité longitudinale  $- F \frac{d^2e}{dx^2}$  (1) appliquée sur toute la largeur de la dalle centrale. Le cablage de la travée étant parabolique dans le cas d'espèce le terme  $- F e''$  peut être considéré comme constant sur toute la longueur de la travée.

$$F = 4360 \text{ tonnes}$$

$$- F y'' = 4360 \times 0,0050 = - 21,800 \text{ tonnes/ml}$$

la valeur moyenne de  $\mu_1$  entre les sections  $S_{1G}$  et  $S_{1D}$  est le quotient de l'aire de cette ligne sur la zone correspondant à la dalle centrale par la largeur de celle-ci soit 0,0398

$$MN_2^-(P_e) = - \frac{4 \times 5,040}{\pi \sin 91} \times 21,800 \times 0,0398 \times \sin \frac{3\pi}{2}$$

$$MN_2^-(P_e) = - 5,62 \text{ (1}^{\text{er}} \text{ harmonique) t.m.}$$

valeur obtenue après prise en compte de 5 harmoniques

$$MN_2^-(P_e) = - 5,271 \text{ t.m.}$$

(1)  $e$  est ici l'excentrement vertical du câble moyen par rapport à la fibre moyenne.

Section étudiée  $\alpha = 9,25$   $y = 0$ 

 1) RESULTATS

Charge permanente et superstructures	3,727
Précontrainte transversale (pour mémoire)	
A (voie centrale)	3,262
$B_c$ (1 camion)	2,482
$B_c$ (2 camions)	3,796
$B_r$	2,070
$B_t^*$ (2 tandems)	2,402
$M_c$	7,948
$M_e^*$	3,50

 2) EXEMPLE DE CALCUL camions  $B_c$  (1<sup>er</sup> harmonique)

<u>1 camion</u> excentrement des roues	0	2
valeur de $\mu_1$	0,1886	0,0244

$$2c = 1,75 + \frac{3}{2} \times 0,08 + 0,750 = 2,620$$

$$\begin{aligned} MN_2^*(B_c^1) &= \frac{4 \times 5,040}{\pi \sin 91} \times \frac{12}{2,62} (0,1886 + 0,0244) \sin \frac{1,31\pi}{18,50} \sin^2 \frac{\pi}{2} \\ &= 1,395 \times \text{DYNAB}_c(1,14) = 1,590 \end{aligned}$$

<u>2<sup>ème</sup> camion</u> excentrement des roues	- 0,50	- 2,50
valeur de $\mu_1$	0,141	- 0,083

$$\begin{aligned} MN_2^*(B_c^2) &= \frac{4 \times 5,040}{\pi \sin 91} \times \frac{12}{2,62} (0,141 - 0,083) \sin \frac{1,31\pi}{18,50} \sin^2 \frac{\pi}{2} \\ &= 0,869 \times \text{DYNAB}_c(1,14) = 0,990 \end{aligned}$$

### 2.3.3 - Moments transversaux principaux extrêmes, prise en compte du coefficient de POISSON.

A l'aide des résultats précédents, nous recherchons les moments transversaux extrêmes, tous coefficients de majoration et de pondération compris - pour A et Bc nous tenons compte de la dégressivité transversale et, supposant la dalle armée dans le sens transversal, nous appliquons le coefficient 1,20 de pondération du premier genre.

A ces moments extrêmes nous ajoutons le terme  $k v m_x$  où  $m_x$  est la densité de moment principal longitudinal au centre de la dalle ( $m_x = m_x \sin \psi$ )

Le tableau de la page ci-contre recherche le moment maximal à prendre en compte pour la recherche des sections d'armatures transversales au voisinage de l'axe longitudinal de la dalle.



# MY+

Moments transversaux principaux positifs au centre de la dalle.

$$2b = 10,07 \quad k = 0,54 \quad \nu = 0,20 \text{ (coefficient de Poisson)} \quad k\nu = 0,11$$

tous coefficients de majoration et de pondération pris en compte

	$m_x$	$m_x = m_x \sin \psi$	$k\nu m_x$ pondéré	MOE	$MN_1$ pondéré et majoré	$MN_2$	$M_y$
Charge permanente	101,76	100,74	11,08	8,200		3,838	6,718
Précontrainte longitudinale	-128,71	-127,42	-14,016			-5,271	-19,287
Précontrainte transversale	-	-	-			-	-
A	68,04	67,35	7,41			3,914	11,324
B <sub>c</sub>	54,69	54,14	5,95			5,010	10,960
B <sub>r</sub>	7,74	7,66	0,842			2,484	3,326
B <sub>t</sub>	41,35	40,94	4,50			2,882	7,385
Trottoirs 0,450 t/m <sup>2</sup>	7,27	7,19	0,80			-	0,800
M <sub>c</sub>	58,033	57,45	6,32			7,948	14,268
M <sub>e</sub>	37,62	37,247	4,097			3,500	7,597

### Exemple de calcul

Véhicule à chenille STANAG 120 (M<sub>c</sub>)

Moment de flexion longitudinale  $m_x = 58,03 \text{ t.m/m}$

$$m_x = 0,99 \times 58,03 = 57,45$$

$$k\nu m_x = 0,11 \times 57,45 = 6,32$$

$$MN_2^+ = 7,948$$

$$\text{d'où } [m_y]^+_{M_c} = 7,948 + 6,320 = 14,268 \text{ t.m/m}$$

d'où la valeur enveloppe maximale (M<sub>c</sub>)

$$M_y^+ = 6,718 - 19,287 + 14,268 + \frac{0,800}{1,20} = 2,366 \text{ t.m}$$

On vérifie a posteriori que l'effet global du coefficient de POISSON est défavorable.

# MY<sup>-</sup>

Moments transversaux principaux négatifs au centre de la dalle.

$2b = 10,07$

$k = 0,54$

$v = 0,20$

$k v = 0,11$

tous coefficients de majoration et de pondération pris en compte.

	$m_x$	$m_x \approx m_x \sin \psi$	$k v m_x$ pondéré	MOE	MN 1	MN 2	$M_y^-$
				pondérés et majorés			
Charge permanente	98,798	97,80	10,76	- 8,450		+ 3,727	6,04
Précontrainte longi- tudinale	-128,71	- 127,42	- 14,016			- 5,271	- 19,287
Précontrainte trans- versale	-	-	-	-			-
A			[ Le terme $k v m_x$ étant favorable, il n'est pas pris en compte ]	- 3,808	- 0,837	[ Valeurs nulles dans le cas d'espèce ]	- 4,645
B <sub>c</sub>				- 3,342	- 1,221		- 4,563
B <sub>r</sub>				- 1,292	-		- 1,292
B <sub>t</sub>				- 3,122	- 0,573		- 3,696
Trottoirs 0,450 t/m <sup>2</sup>				- 1,029			- 1,029
M <sub>c</sub>				- 5,574	+ 2,281		- 3,293
M <sub>e</sub>				- 2,443	- 0,182		- 2,625

Exemple de calcul - Bc et A

$$A : (M_Y)_{v=0} = MOE + MN1 \text{ à gauche et à droite} = 2 \left[ - 1,587 - 0,349 \right] \times 1 \times 1,2$$

$$\left[ M_Y \right]_A = - 4,645 \quad \begin{array}{l} \uparrow \text{dégres. trans.} \\ \uparrow \text{1}^{\text{er}} \text{genre} \end{array}$$

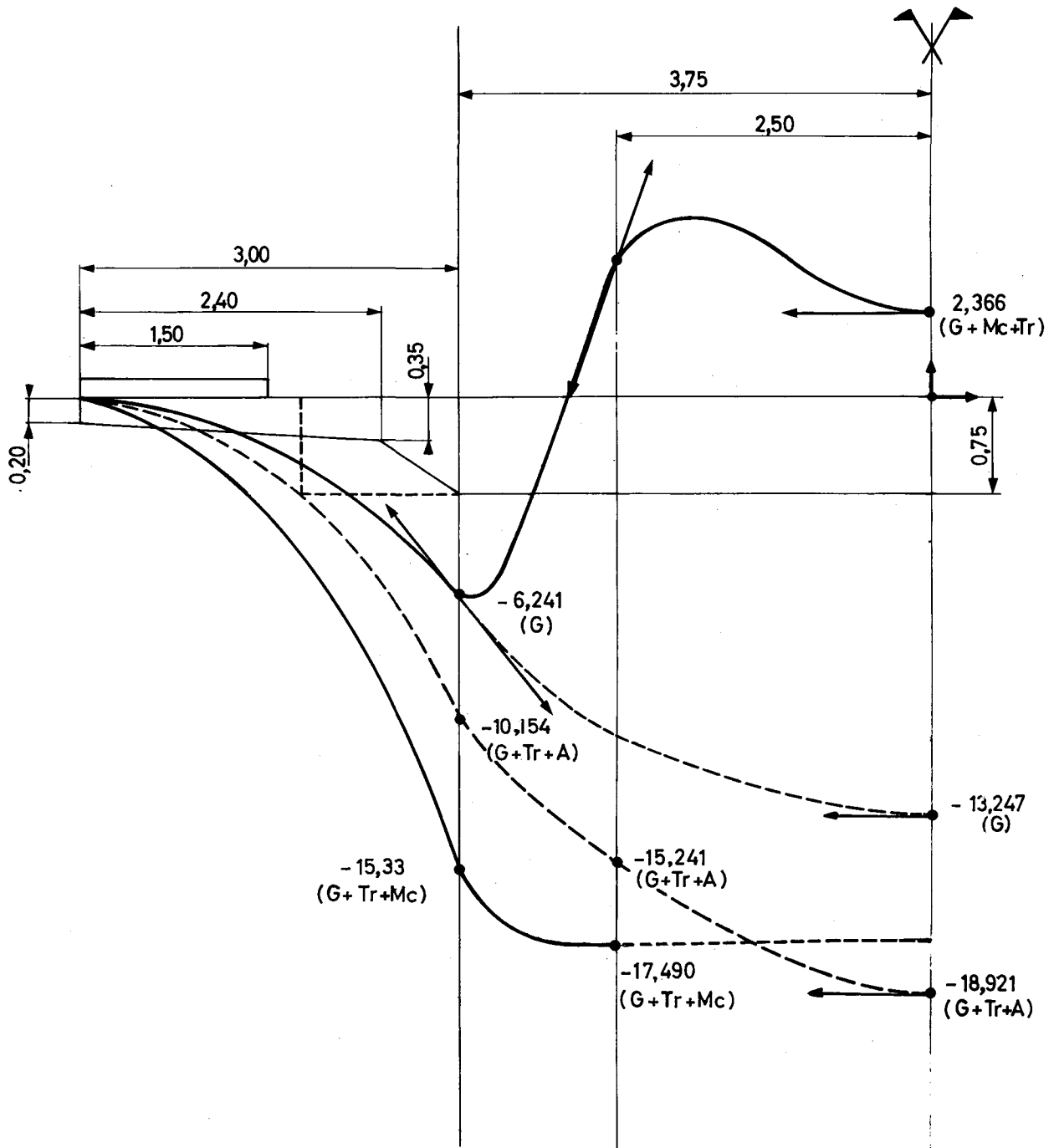
$$B_c : (M_Y)_{v=0} = MOE + MN1 \text{ à gauche et à droite} = 2 \left[ - 1,266 - 0,463 \right] \times 1,10 \times 1,20$$

$$\quad \quad \quad \uparrow \text{dégres. trans.} \quad \uparrow \text{1}^{\text{er}} \text{genre}$$

D'où la valeur enveloppe minimale

$$M_y^- = 6,04 - 19,287 - 4,645 - 1,029 = - 18,921 \text{ t.m}$$

Courbes enveloppes des Moments transversaux  
extrêmes  $M_{\hat{y}}$  et  $M_{\bar{y}}$



## ANNEXE 1

## DEVELOPPEMENTS EN SERIES DE FOURIER DES CAS DE CHARGE USUELS

1) Expression Générale.

$$p(x) = \sum_1^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} = A_1 \sin \frac{\pi x}{\ell} + A_2 \sin \frac{2\pi x}{\ell} + \dots$$

on démontre qu'un terme de rang quelconque est de la forme

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} p(x) \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

2) Charge uniformément répartie, de densité p, sur toute la longueur  $\ell=2a$  de la poutre.

$$A_k = \frac{2p}{\ell} \int_0^{2a} \sin \frac{k\pi x}{2a}$$

$$\text{si } k \text{ impair } A_k = \frac{4p}{k\pi}$$

$$\text{si } k \text{ pair } A_k = 0$$

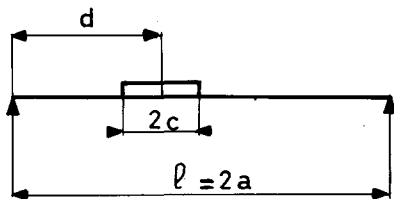
$$\text{d'où } p(x) = \frac{4p}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{2a} \quad (\text{avec } n \text{ impair})$$

3) Charge uniformément répartie sur une longueur  $2c$  à l'abscisse  $d$ 

$$A_k = \frac{2p}{2a} \int_{d-c}^{d+c} \sin \frac{k\pi x}{2a}$$

$$A_k = \frac{2p}{k\pi} \left[ \cos \frac{n\pi(d-c)}{2a} - \cos \frac{n\pi(d+c)}{2a} \right]$$

$$A_k = \frac{4p}{k\pi} \sin \frac{n\pi d}{2a} \sin \frac{n\pi c}{2a}$$



d'où

$$p(x) = \frac{4p}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi c}{2a} \sin \frac{n\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi d}{2a}$$

on remarque qu'en posant  $2c = 2a$  (cas de charge uniformément répartie sur toute la portée) on retrouve la formule de l'alinéa 2, sans restriction sur la parité de  $n$  puisqu'apparaît le terme  $\sin^2 \frac{n\pi}{2}$  qui est égal à 1 ou 0 selon que  $n$  est impair ou pair.

4) Charge concentrée  $P$  à l'abscisse  $d$ : si dans la résolution précédente on pose  $p = P/2c$  et que l'on fait tendre  $2c$  vers zéro, il vient

$$A_k = \frac{2P}{2a} \sin \frac{k\pi(d-c)}{2a}$$

$$\text{d'où } p(x) = \frac{2P}{2a} \sum_1^{\infty} \sin \frac{n\pi d}{2a} \sin \frac{n\pi x}{2a}$$

## ANNEXE 2

COEFFICIENTS DE REPARTITION TRANSVERSAUX  $K_n$  ET  $\mu_n$   
DES PLAQUES RECTANGULAIRES ANISOTROPES SUR APPUIS SIMPLES

## DONNEES

$$\beta = \frac{I_x}{I_y}, \quad \alpha = \frac{I_x + I_y}{4\sqrt{I_x I_y}} \quad a, b, \gamma, e$$

## SYMBOLES

$$\omega = \frac{\pi y}{b}, \quad \psi = \frac{\pi e}{b}, \quad \theta = \frac{b}{2a} \sqrt{\beta}, \quad \sigma = \theta \pi, \quad \Phi = \theta \pi \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}, \quad \delta = \theta \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}, \quad \gamma = \theta \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}, \quad \eta = \theta \pi \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}$$

COEFFICIENTS  $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, M, N, P$ 

$$A_n = \frac{E_0}{M} (\text{ch } \Phi - \text{sh } \Phi) \left\{ \left[ \text{ch } \gamma \psi \cos \delta \psi \left( \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \sin \eta - \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} \cos \eta \right) - \text{sh } \gamma \psi \sin \delta \psi \left( \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \cos \eta + \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} \sin \eta \right) \right] \times \left[ -\text{sh } \Phi \cos \eta + \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \text{ch } \Phi \sin \eta \right] \right. \\ \left. + \left[ \text{ch } \gamma \psi \cos \delta \psi \left( \alpha \sin \eta + \sqrt{1-\alpha^2} \cos \eta \right) - \text{sh } \gamma \psi \sin \delta \psi \left( \alpha \cos \eta - \sqrt{1-\alpha^2} \sin \eta \right) \right] \times \left[ \sqrt{2(1+\alpha)} \text{ch } \Phi \cos \eta + \frac{2\alpha}{\sqrt{2(1-\alpha)}} \text{sh } \Phi \sin \eta \right] \right\}$$

$$B_n = \frac{E_0}{N} (\text{ch } \Phi - \text{sh } \Phi) \left\{ \left[ \text{sh } \gamma \psi \cos \delta \psi \left( \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \sin \eta - \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} \cos \eta \right) - \text{ch } \gamma \psi \sin \delta \psi \left( \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \cos \eta + \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} \sin \eta \right) \right] \times \left[ -\text{ch } \Phi \cos \eta + \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \text{sh } \Phi \sin \eta \right] \right. \\ \left. + \left[ \text{sh } \gamma \psi \cos \delta \psi \left( \alpha \sin \eta + \sqrt{1-\alpha^2} \cos \eta \right) - \text{ch } \gamma \psi \sin \delta \psi \left( \alpha \cos \eta - \sqrt{1-\alpha^2} \sin \eta \right) \right] \times \left[ \sqrt{2(1+\alpha)} \text{sh } \Phi \cos \eta + \frac{2\alpha}{\sqrt{2(1-\alpha)}} \text{ch } \Phi \sin \eta \right] \right\}$$

$$C_n = -\frac{E_0}{N} \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} (\text{ch } \Phi - \text{sh } \Phi) \left\{ \left[ \text{sh } \gamma \psi \cos \delta \psi \left( \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \sin \eta - \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} \cos \eta \right) - \text{ch } \gamma \psi \sin \delta \psi \left( \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \cos \eta + \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} \sin \eta \right) \right] \times \left[ \text{sh } \Phi \sin \eta + \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \text{ch } \Phi \cos \eta \right] \right. \\ \left. + \left[ \text{sh } \gamma \psi \cos \delta \psi \left( \alpha \sin \eta + \sqrt{1-\alpha^2} \cos \eta \right) - \text{ch } \gamma \psi \sin \delta \psi \left( \alpha \cos \eta - \sqrt{1-\alpha^2} \sin \eta \right) \right] \times \left[ -\sqrt{2(1+\alpha)} \text{ch } \Phi \sin \eta + \frac{2\alpha}{\sqrt{2(1-\alpha)}} \text{sh } \Phi \cos \eta \right] \right\}$$

$$D_n = -\frac{E_0}{M} \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} (\text{ch } \Phi - \text{sh } \Phi) \left\{ \left[ \text{ch } \gamma \psi \cos \delta \psi \left( \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \sin \eta - \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} \cos \eta \right) - \text{sh } \gamma \psi \sin \delta \psi \left( \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \cos \eta + \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} \sin \eta \right) \right] \times \left[ \text{ch } \Phi \sin \eta + \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \text{sh } \Phi \cos \eta \right] \right. \\ \left. + \left[ \text{ch } \gamma \psi \cos \delta \psi \left( \alpha \sin \eta + \sqrt{1-\alpha^2} \cos \eta \right) - \text{sh } \gamma \psi \sin \delta \psi \left( \alpha \cos \eta - \sqrt{1-\alpha^2} \sin \eta \right) \right] \times \left[ -\sqrt{2(1+\alpha)} \text{sh } \Phi \sin \eta + \frac{2\alpha}{\sqrt{2(1-\alpha)}} \text{ch } \Phi \cos \eta \right] \right\}$$

$$E_n = \frac{b^3}{2\sqrt{2(1+\alpha)} I_y n^3 \theta^3 \pi^3}$$

$$M = (2\alpha + 1) \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} \text{sh } \Phi \text{ch } \Phi - (2\alpha - 1) \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \sin \eta \cos \eta$$

$$N = (2\alpha + 1) \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} \text{sh } \Phi \text{ch } \Phi + (2\alpha - 1) \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} \sin \eta \cos \eta$$

$$P = A_n \text{ch } n\gamma \omega \cos n\delta \omega + B_n \text{sh } n\gamma \omega \cos n\delta \omega + \frac{C_n}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \text{ch } n\gamma \omega \sin n\delta \omega + \frac{D_n}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \text{sh } n\gamma \omega \sin n\delta \omega \\ + E_n \left[ \text{ch } n\gamma |\omega - \psi| - \text{sh } n\gamma |\omega - \psi| \right] \left[ \cos n\delta |\omega - \psi| + \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \sin n\delta |\omega - \psi| \right]$$

COEFFICIENTS DE REPARTITION TRANSVERSAUX  $K_n$  POUR LES MOMENTS LONGITUDINAUX

$$K_n = \frac{2b I_x n^4 \pi^4}{16 a^4} P$$

COEFFICIENTS DE REPARTITION TRANSVERSAUX  $\mu_n$  POUR LES MOMENTS TRANSVERSAUX

$$\mu_n = -I_y \frac{\pi^2 n^2}{b^3} \left\{ 2\gamma \delta \left( -A_n \text{sh } n\gamma \omega \sin n\delta \omega - B_n \text{ch } n\gamma \omega \sin n\delta \omega + \frac{C_n}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \text{sh } n\gamma \omega \cos n\delta \omega + \frac{D_n}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}} \text{ch } n\gamma \omega \cos n\delta \omega \right) \right. \\ \left. + E_n \left[ \text{sh } n\gamma |\omega - \psi| - \text{ch } n\gamma |\omega - \psi| \right] \left[ -\sin n\delta |\omega - \psi| + \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \cos n\delta |\omega - \psi| \right] \right\} P (\gamma^2 - \delta^2)$$