

## Documents scientifiques et techniques

# GUIDE POUR L'ÉVALUATION DU COMPORTEMENT VIBRATOIRE DES PASSERELLES PIÉTONNES SOUS L'ACTION DES PIÉTONS

# *GUIDE TO ASSESSING PEDESTRIAN-INDUCED VIBRATORY BEHAVIOUR OF FOOTBRIDGES*

Juin 2006

## INTRODUCTION

Le présent guide a été préparé dans le cadre du groupe de travail Sétra/AFGC sur le "Comportement dynamique des passerelles piétonnes", animé par Pascal Charles (Direction Régionale de l'Équipement de l'Ile-de-France puis Sétra) et Wasoodev Hoorpah (OTUA puis MIO).

La rédaction du guide a été réalisée par :

Valérie BONIFACE	(RFR)
Vu BUI	(Sétra)
Philippe BRESSOLETTE	(CUST - LERMES)
Pascal CHARLES	(DREIF puis Sétra)
Xavier CESPEDES	(Setec-TPI)
François CONSIGNY	(RFR puis ADP)
Christian CREMONA	(LCPC)
Claire DELAUAUD	(DREIF)
Luc DIELEMAN	(SNCF)
Thierry DUCLOS	(Sodeteg puis Arcadis-EEGSimecsol)
Wasoodev HOORPAH	(OTUA puis MIO)
Eric JACQUELIN	(Université Lyon1 - L2M)
Pierre MAITRE	(Socotec)
Raphael MENARD	(OTH)
Serge MONTENS	(Systra)
Philippe VION	(Sétra)

Les actions exercées par les piétons sur les passerelles peuvent entraîner des phénomènes vibratoires. Ces phénomènes ne sont généralement pas préjudiciables pour la structure, mais peuvent créer une sensation d'inconfort pour l'usager.

Le présent guide présente un état des connaissances sur le comportement dynamique des passerelles sous les chargements piétonniers. Il propose une méthodologie d'analyse et des recommandations afin de guider le projeteur d'une passerelle neuve pour la prise en compte des effets dynamiques.

La méthodologie, basée sur la notion de classe de la passerelle (fonction du niveau de trafic) et sur le niveau d'exigence de confort, s'appuie sur l'interprétation des résultats d'essais réalisés sur la passerelle de Solférino et sur une plate-forme expérimentale. Ces essais ont été financés sur des crédits de la Direction des Routes, et pilotés par le Sétra avec le soutien du réseau scientifique et technique du Ministère de l'Équipement, des Transports, de l'Aménagement du territoire, du Tourisme et de la Mer, et plus particulièrement de la DREIF (Division des Ouvrages d'Art et des Tunnels et Laboratoire Régional de l'Est Parisien).

**INTRODUCTION**

*This guide was drawn up by the SETRA/AFGC "Dynamic behaviour of footbridges" working group led by Pascal Charles (Direction Régionale de l'Équipement de l'Île-de-France–DREIF—, later Sétra) and Wasoodev Hoopah (OTUA, later MIO).*

*The guide was drafted by:*

<i>Valérie BONIFACE</i>	<i>(RFR)</i>
<i>Vu BUI</i>	<i>(Sétra)</i>
<i>Philippe BRESSOLETTE</i>	<i>(CUST - LERMES)</i>
<i>Pascal CHARLES</i>	<i>(DREIF puis Sétra)</i>
<i>Xavier CESPEDES</i>	<i>(Setec-TPI)</i>
<i>François CONSIGNY</i>	<i>(RFR puis ADP)</i>
<i>Christian CREMONA</i>	<i>(LCPC)</i>
<i>Claire DELAUAUD</i>	<i>(DREIF)</i>
<i>Luc DIELEMAN</i>	<i>(SNCF)</i>
<i>Thierry DUCLOS</i>	<i>(Sodeteg puis Arcadis-EEGSimecsol)</i>
<i>Wasoodev HOORPAH</i>	<i>(OTUA puis MIO)</i>
<i>Eric JACQUELIN</i>	<i>(Université Lyon1 - L2M)</i>
<i>Pierre MAITRE</i>	<i>(Socotec)</i>
<i>Raphael MENARD</i>	<i>(OTH)</i>
<i>Serge MONTENS</i>	<i>(Systra)</i>
<i>Philippe VION</i>	<i>(Sétra)</i>

*The crossing of pedestrians on footbridges can set up vibratory phenomena. These phenomena do not generally affect structural integrity, but they can make users feel uncomfortable.*

*These guidelines present a review of the state of the art regarding the pedestrian-induced dynamic behaviour of footbridges. It proposes a methodology for analysis and recommendations for guiding the designer of a new footbridge on how to take account of dynamic effects.*

*The methodology—based on the concept of footbridge category (as a function of the density of traffic) and the level of comfort required—uses interpretation of the results of tests carried out on the Solferino footbridge in Paris and on an experimental platform. These tests were financed by the French Roads Directorate (Direction des Routes) and were supervised by Sétra, with the support of the scientific and technical network of the Ministry of Public Works, Transport, National Development, Tourism, and the Sea, and particularly of the Île de France Public Works Department (DREIF - Bridges and Tunnels Division and Eastern Paris Regional Laboratory).*

Ce document inclut notamment les éléments suivants:

- une description des phénomènes dynamiques propres aux passerelles piétonnes, avec identification des paramètres qui influent sur le dimensionnement de ces structures ;
- une méthodologie d'analyse dynamique des passerelles sur la base de classes qui sont fonction du niveau de trafic ;
- une présentation des méthodes de calcul pratique des fréquences et modes propres, ainsi que de la réponse au chargement ;
- des recommandations pour l'élaboration des pièces écrites d'études et de travaux.

Des compléments théoriques (rappels de dynamique des structures, modélisation de la charge piétonne) et pratiques (systèmes amortisseurs, exemples de passerelles récentes, exemples de calculs) sont rassemblés dans les annexes jointes au texte du guide.

La traduction du guide a été réalisée par Alexander Greenland.

*The guide comprises the following:*

- *a description of the dynamic phenomena specific to footbridges, with identification of the parameters affecting footbridge design;*
- *a methodology for dynamic analysis of footbridges, on the basis of categories determined by the pedestrian traffic;*
- *a presentation of methods for practical calculation of frequencies and modes, as well as the response to loading;*
- *recommendations for drafting design and construction documents.*

*The appendices to this guide present theoretical (background to structural dynamics, modelling of pedestrian loads) and practical complements (damping systems, examples of recent footbridges, examples of calculation).*

*Translation by Alex Greenland.*

## SOMMAIRE

<b>NOTATIONS PRINCIPALES</b>	<b>10</b>
<b>PREAMBULE</b>	<b>14</b>
<b>1 L'ETUDE DYNAMIQUE DES PASSERELLES PIETONNES</b>	<b>16</b>
1.1 Dynamique des structures et passerelles piétonnes.	16
1.2 Le chargement piétonnier	22
1.3 Paramètres intervenant dans le dimensionnement : fréquence, seuil de confort, critère de confort...	56
1.4 Amélioration du comportement dynamique	64
<b>2 METHODOLOGIE D'ANALYSE DYNAMIQUE DES PASSERELLES</b>	<b>70</b>
2.1 Etape 1 : détermination de la classe de la passerelle	72
2.2 Etape 2 : choix du niveau de confort par le maître d'ouvrage	74
2.3 Etape 3 : détermination des fréquences et de la nécessité de mener ou non un calcul avec cas de charge dynamiques	76
2.4 Etape 4 si nécessaire : calcul avec cas de charge dynamiques	80
2.5 Etape 5 : modification du projet ou de la passerelle	88
2.6 Vérifications structurelles sous charges dynamiques	96
<b>3 METHODES DE CALCUL PRATIQUE</b>	<b>102</b>
3.1 Méthodes de calcul utilisables	102
3.2 Calcul dynamique appliqué aux passerelles	104
<b>4 CAHIER DES CHARGES ETUDES ET TRAVAUX, EPREUVES</b>	<b>128</b>
4.1 Exemples d'éléments pour un cahier des charges d'études de dynamique des passerelles	128
4.2 Exemples d'éléments à insérer dans le CCTP travaux d'une passerelle	128
4.3 Epreuves dynamiques ou essais sur des passerelles	128
<b>ANNEXES</b>	<b>134</b>
<b>ANNEXE 1 : RAPPELS DE DYNAMIQUE DES STRUCTURES</b>	<b>136</b>
A1.1 L'oscillateur simple	136
A1.2 Systèmes linéaires à n DDL	158
A1.3 Systèmes élastiques continus	182
A1.4 Discrétisation des systèmes continus	198
<b>ANNEXE 2 : MODELISATION DE LA CHARGE PIETONNE</b>	<b>208</b>
A2.1 Marche	210
A2.2 Course	218

**CONTENTS**

<b>MAIN NOTATION</b>	<b>11</b>
<b>FOREWORD</b>	<b>15</b>
<b>1 DYNAMIC STUDY OF FOOTBRIDGES</b>	<b>17</b>
1.1 <i>Dynamics of footbridges and other pedestrian structures</i>	17
1.2 <i>Pedestrian loading</i>	34
1.3 <i>Design parameters: frequency, comfort threshold, comfort level, etc.</i>	57
1.4 <i>Improvement of dynamic behaviour</i>	65
<b>2 METHODOLOGY FOR DYNAMIC ANALYSIS OF FOOTBRIDGES</b>	<b>71</b>
2.1 <i>Step 1: determination of footbridge category</i>	73
2.2 <i>Step 2: project owner's choice of comfort level</i>	75
2.3 <i>Step 3: determination of frequencies and of the need to carry out calculations with dynamic load cases</i>	77
2.4 <i>Step 4, if necessary: calculation with dynamic load cases</i>	81
2.5 <i>Step 5: modification of the design or of the footbridge</i>	89
2.6 <i>Structural verifications under dynamic loading</i>	97
<b>3 PRACTICAL CALCULATION METHODS</b>	<b>103</b>
3.1 <i>Calculation methods that can be used</i>	103
3.2 <i>Dynamic calculation applied to footbridges</i>	105
<b>4 SPECIFICATIONS FOR DESIGN, WORKS, AND TRIALS</b>	<b>129</b>
4.1 <i>Examples of requirements for specifications for dynamic studies of footbridges</i>	129
4.2 <i>Examples of requirements to be included in the special technical specifications for footbridge construction</i>	129
4.3 <i>Dynamic trials or tests on footbridges</i>	129
<b>APPENDICES</b>	<b>135</b>
<b>APPENDIX 1: REVIEW OF STRUCTURAL DYNAMICS</b>	<b>137</b>
A1.1 <i>SDOF oscillator</i>	137
A1.2 <i>Linear MDOF systems</i>	159
A1.3 <i>Continuous elastic systems</i>	183
A1.4 <i>Discretization of continuous systems</i>	199
<b>APPENDIX 2: MODELLING PEDESTRIAN LOAD</b>	<b>209</b>
A2.1 <i>Walking</i>	211

A2.2	<i>Running</i>	219
<b>ANNEXE 3 : SYSTEMES AMORTISSEURS</b>		<b>226</b>
A3.1	Amortisseurs visco-élastiques	226
A3.2	Amortisseurs visqueux	230
A3.3	Amortisseurs dynamiques accordés (ADA)	232
A3.4	Amortisseurs dynamiques accordés fluides	240
A3.5	Tableau comparatif	246
<b>ANNEXE 4 : EXEMPLES DE PASSERELLES</b>		<b>248</b>
A4.1	Poutres latérales type Warren : passerelle de Cavaillon	248
A4.2	Poutre caisson métallique : passerelle du Stade de France	250
A4.3	Dalle nervurée : passerelle de Noisy-le-Grand	252
A4.4	Arc bow-string : passerelle de Montigny-les-Cormeilles	254
A4.5	Structure suspendue : passerelle sur l' Aisne à Soissons	256
A4.6	Arc métallique : Passerelle Solferino	258
A4.7	Structure haubanée : Passerelle du pas du lac à Saint Quentin	262
A4.8	Poutre en ossature mixte : passerelle de Mont-Saint-Martin	264
<b>ANNEXE 5 : EXEMPLES DE CALCUL DE PASSERELLES</b>		<b>266</b>
A5.1	Exemples de calculs complets de passerelles	266
A5.2	Etude de sensibilité de passerelles types	288
<b>ANNEXE 6 : BIBLIOGRAPHIE</b>		<b>300</b>
A6.1	Généralités	300
A6.2	Règles	300
A6.3	Amortisseurs	300
A6.4	Analyse du comportement	302
A6.5	Méthodes de calcul	304
A6.6	Articles sur passerelle soit vibrante, soit instrumentée	304
A6.7	Passerelles spécifiques	306
A6.8	Bibliographies complémentaires	306



<b>APPENDIX 3: DAMPER SYSTEMS</b>	<b>227</b>
A3.1 <i>Visco-elastic dampers</i>	227
A3.2 <i>Viscous dampers</i>	231
A3.3 <i>Tuned mass dampers (TMD)</i>	233
A3.4 <i>Tuned liquid dampers</i>	241
A3.5 <i>Comparative table</i>	247
<b>APPENDIX 4: FOOTBRIDGE EXAMPLES</b>	<b>249</b>
A4.1 <i>Warren-girder through bridge: Cavaillon footbridge</i>	249
A4.2 <i>Steel box-girder bridge: Stade de France footbridge</i>	251
A4.3 <i>Ribbed deck bridge: Noisy le Grand footbridge</i>	253
A4.4 <i>Bow-string bridge: Montigny lès Cormeilles footbridge</i>	255
A4.5 <i>Suspension bridge: Aisne river footbridge in Soissons</i>	257
A4.6 <i>Steel arch bridge: Solferino footbridge</i>	259
A4.7 <i>Cable-stayed bridge: pas du lac footbridge in Saint Quentin</i>	263
A4.8 <i>Composite steel-concrete deck bridge: Mont Saint Martin footbridge</i>	265
<b>APPENDIX 5: EXAMPLES OF FOOTBRIDGE CALCULATION</b>	<b>267</b>
A5.1 <i>Examples of full footbridge design</i>	267
A5.2 <i>Sensitivity study of typical footbridges</i>	280
<b>APPENDIX 6: BIBLIOGRAPHY</b>	<b>301</b>
6.1 <i>General</i>	301
6.2 <i>Regulations</i>	301
6.3 <i>Dampers</i>	301
6.4 <i>Behavioural analysis</i>	303
6.5 <i>Calculation methods</i>	305
6.6 <i>Articles on vibrating or instrumented footbridges</i>	305
6.7 <i>Particular footbridges</i>	307
6.8 <i>Additional bibliographies</i>	307

## NOTATIONS PRINCIPALES

$A(\omega)$ :	amplification dynamique
$[C]$ :	matrice d'amortissement
$C_i$ :	amortissement n° i d'un système à n degrés de liberté (N/(m/s))
$E$ :	module de Young (N/m <sup>2</sup> )
$F(t)$ :	excitation dynamique (N)
$[F(t)]$ :	vecteur chargement dynamique
$F_0$ :	amplitude d'une force harmonique (N)
$[F_0]$ :	vecteur amplitude d'une force harmonique (N)
$H_{r,e}(\omega)$ :	fonction de transfert entre l'entrée e et la réponse r
$I$ :	inertie d'une poutre (m <sup>4</sup> )
$J$ :	inertie de torsion d'une poutre (m <sup>4</sup> )
$[K]$ :	matrice de raideur
$K_i$ :	raideur n° i d'un système à n degrés de liberté (N/m)
$L$ :	longueur d'une poutre (m)
$[M]$ :	matrice de masse
$M_i$ :	masse n° i d'un système à n degrés de liberté (kg)
$N$ :	nombre de piétons
$S$ :	section d'une poutre (m <sup>2</sup> )
$[X]$ :	vecteur des degrés de liberté
$c_i$ :	amortissement généralisé du mode i
$f_0$ :	fréquence propre d'un oscillateur simple (Hz)
$f_i$ :	i <sup>ème</sup> fréquence propre d'un oscillateur à n degrés de liberté (Hz)
$f$ :	fréquence
$k_i$ :	raideur généralisée du mode i
$m_i$ :	masse généralisée du mode i
$[p(t)]$ :	vecteur des participations modales
$[q(t)]$ :	vecteur des variables modales
$t$ :	variable désignant le temps (s)

**MAIN NOTATION**

- $A(\omega)$  ..... : *dynamic amplification coefficient*
- $[C]$  ..... : *damping matrix*
- $C_i$  ..... : *damping No.  $i$  in an MDOF system (N/(m/s))*
- $E$  ..... : *modulus of elasticity (N/m<sup>2</sup>)*
- $F(t)$  ..... : *dynamic excitation (N)*
- $[F(t)]$  ..... : *dynamic loading vector*
- $F_0$  ..... : *amplitude of a harmonic force (N)*
- $[F_0]$  ..... : *amplitude vector of a harmonic force (N)*
- $H_{r,e}(\omega)$  ..... : *transfer function between input  $e$  and response  $r$*
- $I$  ..... : *inertia of a beam (m<sup>4</sup>)*
- $J$  ..... : *torsional inertia of a beam (m<sup>4</sup>)*
- $[K]$  ..... : *stiffness matrix*
- $K_i$  ..... : *stiffness No.  $i$  in an MDOF system (N/m)*
- $L$  ..... : *length of a beam (m)*
- $[M]$  ..... : *mass matrix*
- $M_i$  ..... : *mass No.  $i$  in an MDOF system (kg)*
- $N$  ..... : *number of pedestrians*
- $S$  ..... : *sectional area of a beam (m<sup>2</sup>)*
- $[X]$  ..... : *vector of degrees of freedom*
- $c_i$  ..... : *generalized damping of mode  $i$*
- $f_0$  ..... : *natural frequency of an SDOF oscillator (Hz)*
- $f_i$  ..... :  *$i^{\text{th}}$  natural frequency of an MDOF oscillator (Hz)*
- $f$  ..... : *frequency*
- $k_i$  ..... : *generalized stiffness of mode  $i$*
- $m_i$  ..... : *generalized mass of mode  $i$*
- $[p(t)]$  ..... : *vector of modal participations*
- $[q(t)]$  ..... : *vector of modal variables*
- $t$  ..... : *variable for time (s)*

$u(t), v(t), w(t)$ :	déplacements (m)
$x(t)$ :	position d'un oscillateur simple repérée par rapport à sa position d'équilibre (m)
$\Omega$ :	pulsation réduite
$\delta$ :	décrément logarithmique
$\xi_i$ :	$i^{\text{ème}}$ taux d'amortissement critique d'un oscillateur à n degrés de liberté (sans unité)
$\rho$ :	masse volumique ( $\text{kg/m}^3$ )
$[\phi_i]$ :	$i^{\text{ème}}$ vecteur propre
$\phi(\omega)$ :	argument de $H_{r,e}$ - déphasage entre l'entrée et la sortie (rad)
$\omega_0$ :	pulsation propre d'un oscillateur simple (rad/s) : $\omega_0 = 2 \pi f_0$
$\omega_i$ :	$i^{\text{ème}}$ pulsation propre d'un oscillateur à n degrés de liberté (rad/s) : $\omega_i = 2 \pi f_i$
$\omega$ :	pulsation (rad/s)

- $u(t), v(t), w(t).....$ : displacements (m)
- $x(t) .....$ : position of an SDOF oscillator relative to its equilibrium position (m)
- $\Omega .....$ : reduced angular frequency
- $\delta .....$ : logarithmic decrement
- $\xi_j.....$ :  $i^{th}$  damping ratio of an MDOF oscillator (no unit)
- $\rho .....$ : density ( $kg/m^3$ )
- $[\phi_i] .....$ :  $i^{th}$  eigenvector
- $\phi(\omega) .....$ :  $H_{r,e}$  argument - phase difference between input and output (rad)
- $\omega_0 .....$ : natural angular frequency of an SDOF oscillator (rad/s):  $\omega_0 = 2 \pi f_0$
- $\omega_i .....$ :  $i^{th}$  natural angular frequency of an MDOF oscillator (rad/s):  $\omega_i = 2 \pi f_i$
- $\omega .....$ : angular frequency (rad/s)

## PRÉAMBULE

Le présent document a été élaboré sur la base des connaissances scientifiques et techniques actuelles acquises en France et à l'étranger. La réglementation française ne donne aucune indication au sujet des phénomènes dynamiques et vibratoires des passerelles, et les règles européennes présentent des insuffisances sur certains aspects particuliers mis en évidence sur des ouvrages récents.

La fermeture de deux passerelles piétonnes situées en plein centre de Paris et Londres, très rapidement après leur inauguration car elles présentaient des oscillations transversales gênantes en présence de foules, a conduit à des études plus poussées de leur comportement sous l'action des piétons. Ces études ont nécessité la mise en œuvre d'essais in-situ, et ont confirmé l'existence d'un phénomène qui s'était déjà manifesté auparavant mais qui est resté assez peu connu du milieu scientifique et technique. Ce phénomène appelé "synchronisation forcée", "lock-in" en anglais, est à l'origine de la vibration transversale à fortes amplitudes de ces passerelles.

Il est apparu utile de publier un guide faisant la synthèse des problèmes dynamiques pouvant se poser aux passerelles, avec comme ambition de fournir aux concepteurs et projeteurs les informations et les moyens pour éviter la reproduction d'incidents du même type.

Ce guide s'applique aux passerelles pour des utilisations normales vis-à-vis du critère de confort, et pour des cas de vandalisme vis-à-vis de la résistance. Ce guide ne s'applique pas pour garantir le confort dans le cas de manifestations exceptionnelles sur les passerelles : marathon, manifestation, bal, défilé militaire, inauguration, etc.

Le comportement dynamique des passerelles sous les effets du vent n'est pas traité dans ce guide.

La méthodologie d'analyse dynamique est fonction de la classe de la passerelle qui dépend du niveau de trafic. Cela signifie que les passerelles en site urbain ne sont pas traitées de la même manière que les passerelles en rase campagne.

Le rôle du Maître d'Ouvrage est important, car c'est lui qui choisit le critère de confort pour la passerelle, et cela influe sur la conception de la structure. Pour un confort maximal on ne tolérera aucune vibration sur la passerelle, la structure sera alors, soit peu élancée donc éventuellement peu esthétique, soit élancée mais équipée d'amortisseurs donc plus chère et compliquée à entretenir. Pour un confort minimal on pourra autoriser des vibrations modérées et maîtrisées sur la passerelle, la structure sera plus élancée donc en général plus esthétique, et elle pourra aussi être équipée d'amortisseurs.

Ce document n'est qu'un guide et les dispositions proposées ne le sont qu'au titre de conseil sans aucun caractère d'obligation.

## FOREWORD

*The document was drawn up on the basis of scientific and technical knowledge determined to date in France and abroad. French building regulations make no mention of the dynamic and vibratory behaviour of footbridges, and European rules have shortcomings in certain areas, as has been attested in recent bridges.*

*Located in the hearts of Paris and London, two footbridges were forced to close very soon after their official opening because of troubling lateral oscillations when crowds of people used them. This led to more thorough studies of their behaviour under pedestrian traffic. The studies required that in situ tests be carried out, confirming the existence of a phenomenon which, although having already been encountered, was little known by the scientific and technical community. The phenomenon of 'forced synchronization' or 'lock-in' was the cause of the high-amplitude lateral vibration of these two footbridges.*

*It was felt to be an opportune moment to publish guidelines summarizing the dynamic problems that could arise with footbridges, and to provide designers with the information and resources to prevent similar incidents of this type occurring again.*

*The guide applies to footbridges intended to ensure reasonable comfort under normal use and also subject to vandalism affecting their strength. It is not applicable when wishing to ensure comfort for exceptional events or circumstances occurring on footbridges: marathons, protest marches, dances, military parades, opening ceremonies, etc.*

*Nor is the wind-induced dynamic behaviour of footbridges addressed in this guide.*

*The methodology for dynamic analysis depends on the category of footbridge, which in turn depends on the level of pedestrian traffic. Consequently, footbridges in urban environments are not dealt with in the same way as footbridges in isolated country areas.*

*The role of the project owner is important, since he determine the comfort criterion for the bridge affecting the structural design. For maximum comfort there must be no vibration in the bridge, meaning that the structure will either not be particularly slender, and possibly therefore not pleasing to the eye, or may be slender, but at the cost of being equipped with expensive dampers requiring complicated maintenance. For the minimum comfort level, moderate, controlled vibration may be acceptable, probably making the footbridge more slender, and more aesthetically pleasing, yet it may also be equipped with dampers.*

*This document is only a guide, and the provisions herein are nothing more than advice, entailing no obligation of any kind.*

## 1. L'ÉTUDE DYNAMIQUE DES PASSERELLES PIÉTONNES

Ce premier chapitre a pour objectif de dresser l'état des lieux des connaissances sur les phénomènes dynamiques se produisant sur les passerelles piétonnes. Il présente aussi les différents essais réalisés, ainsi que les études qui permettront d'aboutir aux recommandations décrites dans le chapitre suivant.

### 1.1. Dynamique des structures et passerelles piétonnes

#### 1.1.1. Généralités

Les charges statiques sont par définition des charges constantes ou très peu variables dans le temps (quasi-statiques). A l'inverse, les charges dynamiques, fonction du temps, peuvent être classées dans quatre catégories :

- les charges harmoniques ou purement sinusoïdales ;
- les charges périodiques qui se répètent à l'identique à des intervalles réguliers de temps appelés périodes ;
- les charges aléatoires qui varient de façon arbitraire à la fois en durée, en intensité, en direction... ;
- les charges d'impulsion qui caractérisent les charges de très brèves durées.

Généralement l'action des piétons est une action variable dans le temps et qui peut être classée dans la catégorie de charges périodiques. Une des caractéristiques principales de l'action dynamique des piétons est sa faible intensité. Appliquée à des structures très rigides et massives cette action aurait peu de chance de les faire vibrer de manière sensible. Cependant les évolutions à la fois esthétiques, techniques et technologiques qui conduisent à une recherche de structures de plus en plus élancées, de plus en plus souples font que les passerelles piétonnes, n'échappant pas à cette tendance générale, sont à l'heure actuelle conçues et réalisées avec une sensibilité bien plus grande vis à vis des déformations. En conséquence c'est plus souvent qu'elles demandent un traitement dynamique plus approfondi.

L'étude d'un modèle élémentaire qu'on appelle oscillateur simple permet d'illustrer les principes de base d'une analyse dynamique et met en évidence le rôle des différents paramètres structuraux impliqués dans le processus. Il n'est rappelé ici que les principaux résultats directement utiles aux projecteurs. L'annexe 1 du guide donne une présentation plus approfondie de ces résultats et traite aussi de la généralisation aux modèles complexes.

#### 1.1.2. L'oscillateur simple

L'oscillateur simple est constitué d'une masse  $m$ , reliée à un support par l'intermédiaire d'un ressort linéaire de raideur  $k$  et d'un amortisseur linéaire de viscosité  $c$  et sollicité par une force extérieure  $F(t)$  (figure 1.1). Cet oscillateur est supposé ne pouvoir se déplacer que par translation dans une seule direction et a ainsi 1 seul degré de liberté (noté "ddl" dans la suite du document) défini par la position  $x(t)$  de sa masse. Les calculs détaillés figurent en Annexe 1.



## 1. DYNAMIC STUDY OF FOOTBRIDGES

The purpose of this chapter is to present the state of the art regarding knowledge of dynamic phenomena occurring on footbridges. It also presents the different tests carried out and the studies leading to the recommendations given in the next chapters.

### 1.1. Dynamic behaviour of footbridges and other pedestrian structures

#### 1.1.1. General

Static loads are by definition constant or vary little over time (quasi-static). Dynamic loads, on the contrary, are a function of time; they can be classified in four categories:

- harmonic or purely sine loads;
- periodic loads that repeat identically at regular intervals known as 'periods';
- random loads with vary arbitrarily in duration, intensity, direction, etc.;
- impulse loads which characterize very-short-duration loading.

Generally speaking, pedestrian traffic is a time-variable loading and can be classified in the 'periodic load' category. One of the main characteristics of the dynamic action of pedestrians is its low intensity. Applied to very stiff, massive structures, this action would stand little chance of setting up any appreciable vibration. However, aesthetic, technical, and technological changes leading to the active development of increasingly slender, flexible structures mean that footbridges, which certainly are no exception to this general rule, are currently designed and built with much greater inherent sensitivity to deformation. Consequently, they more frequently require more thorough consideration of their dynamic behaviour.

Study of an elementary model known as a single-degree-of-freedom (SDOF) oscillator illustrates the basic principles of dynamic analysis and highlights the role of the different structural parameters plying in the process. This document mentions only the main results most relevant to the work of designers. Appendix 1 gives a more detailed presentation of these results and also addresses the question of generalization to complex models.

#### 1.1.2. The SDOF oscillator

The SDOF oscillator consists of a mass,  $m$ , connected to a support by a linear spring of stiffness  $k$  and a linear damper of viscosity  $c$ , that is subject to an external force,  $F(t)$  (figure 1.1). The oscillator is assumed to be able to move only in translation and in only one direction, and therefore has a single degree of freedom ('DOF' hereafter) defined by the position  $x(t)$  of its mass. Detailed calculations are given in Appendix 1.

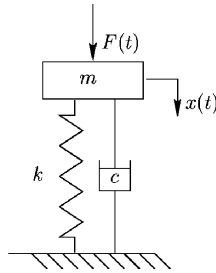


Figure 1.1 : Oscillateur simple

Les paramètres dynamiques caractéristiques et propres à cet oscillateur sont :

- $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2 \pi f_0$  : pulsation propre (rad/s),  $f_0$  étant la fréquence propre (Hz).

On rappelle que  $m$  est une masse : son unité S.I. est donc le kilogramme.

- $\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$  : taux d'amortissement critique (sans dimension) ou pourcentage d'amortissement critique. Dans la pratique  $\xi$  est toujours inférieur à 1.

Toutefois, il faut avoir conscience que l'on ne peut avoir qu'une estimation du taux d'amortissement critique tant que l'on n'a pas réalisé des essais expérimentaux. L'origine de l'amortissement est très variée : elle dépend des matériaux (acier, béton, bois...), de la fissuration ou non dans le cas du matériau béton (béton armé, béton précontraint), des assemblages dans le cas du matériau acier (boulonnage, soudage,...).

Le phénomène de résonance est particulièrement bien mis en évidence lorsqu'on excite l'oscillateur simple avec une force harmonique (ou sinusoïdale) de la forme  $F_0 \sin(\omega t)$ .

Si par définition sa réponse statique obtenue avec une force constante égale à  $F_0$  est :

$$x_{\text{statique}} = \frac{F_0}{k} = \frac{F_0 / m}{\omega_0^2}$$

la réponse dynamique peut être amplifiée d'un facteur  $A(\Omega)$  et est égale à :

$$x_{\text{max}} = x_{\text{statique}} A(\Omega)$$

où  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$  est la pulsation réduite (ou relative) et

$$A(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4 \xi^2 \Omega^2}}$$
 est l'amplification dynamique.

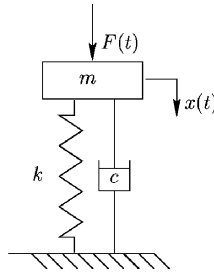


Figure 1.1: SDOF oscillator

The characteristic and specific dynamic parameters of this oscillator are:

- $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2 \pi f_0$ : natural angular frequency (rad/s),  $f_0$  being the natural frequency (Hz).  
Since  $m$  is a mass, its S.I. unit is the kilogram.
- $\xi = \frac{c}{2 \sqrt{k m}}$ : damping ratio (no unit). In practice,  $\xi$  is always less than unity.

However, it must be remembered that the damping ratio can only be estimated until tests have been carried out. The origin of damping is highly varied: it depends on the materials used (steel, concrete, wood, etc.), the cracking/integrity of concrete (reinforced or prestressed), the connections in steel construction (bolted, welded, etc.).

The phenomenon of resonance is particularly well demonstrated when the SDOF oscillator is excited with a harmonic (or sine-wave) force:  $F_0 \sin(\omega t)$ .

Although by definition its static response obtained with a constant force  $F_0$  is:

$$x_{\text{static}} = \frac{F_0}{k} = \frac{F_0 / m}{\omega_0^2}$$

its dynamic response can be amplified by a factor  $A(\Omega)$ , becoming:

$$x_{\text{max}} = x_{\text{static}} A(\Omega)$$

where  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$  is the reduced (or relative) angular frequency and

$$A(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4 \xi^2 \Omega^2}}$$

is the dynamic amplification coefficient.

L'amplification dynamique est fonction de  $\Omega$  et de  $\xi$ . On peut la représenter par une famille de courbes paramétrées par  $\xi$ . Quelques unes d'entre-elles sont données sur la figure 1.2 pour quelques valeurs particulières du pourcentage d'amortissement critique. Ces courbes présentent un maximum pour la valeur de  $\Omega_R = \sqrt{1 - 2\xi^2}$  caractérisant la résonance et qui correspond donc à la pulsation de résonance  $\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$  et à la fréquence de résonance  $f_R = \frac{\omega_R}{2\pi}$ . Dans ce cas la réponse est supérieure (voire très supérieure) à la réponse statique.

On notera que la résonance n'a pas lieu pour  $\omega = \omega_0$  mais pour  $\omega = \omega_R$ . Compte tenu en pratique des amortissements faibles des structures on peut considérer qu'il y a résonance pour  $\omega = \omega_0$  et que l'amplification vaut :

$$A(\Omega_R = 1) \approx \frac{1}{2\xi}$$

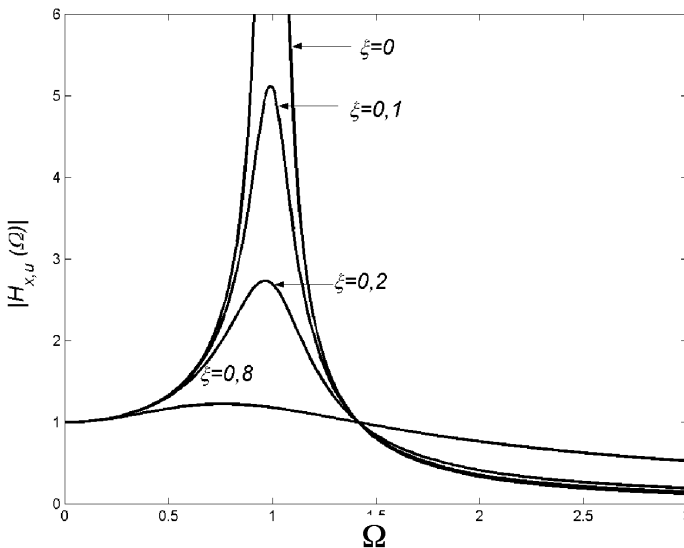


Figure 1.2 : Courbes de résonance

Le dimensionnement des structures sur la base de chargements dynamiques ne peut pas être fait en utilisant uniquement l'intensité maximale de la sollicitation. Ainsi, par exemple, la charge  $F(t) = F_0 \sin(\omega_1 t)$  peut générer des déplacements ou contraintes très inférieurs à la charge  $F(t) = (F_0/10) \sin(\omega_2 t)$  qui a pourtant une amplitude 10 fois moindre, si cette deuxième a une fréquence bien plus proche de la fréquence de résonance de la structure.

Dynamic amplification is a function of  $\Omega$  and of  $\xi$ . It can be represented by a set of curves parametered by  $\xi$ . Some of these are shown in figure 1.2 for particular damping ratios. They reach their maximum value for  $\Omega_R = \sqrt{1 - 2\xi^2}$  characterizing resonance which therefore corresponds to the resonant angular frequency  $\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$  and to the resonant frequency  $f_R = \frac{\omega_R}{2\pi}$ . In this case the response is greater (even much greater) than the static response.

It should be noted that resonance occurs not for  $\omega = \omega_0$  but for  $\omega = \omega_R$ . Given that, in practice, structural damping is slight, it can be considered that there is resonance for  $\omega = \omega_0$  and that the amplification is given by:

$$A(\Omega_R = 1) \approx \frac{1}{2\xi}$$

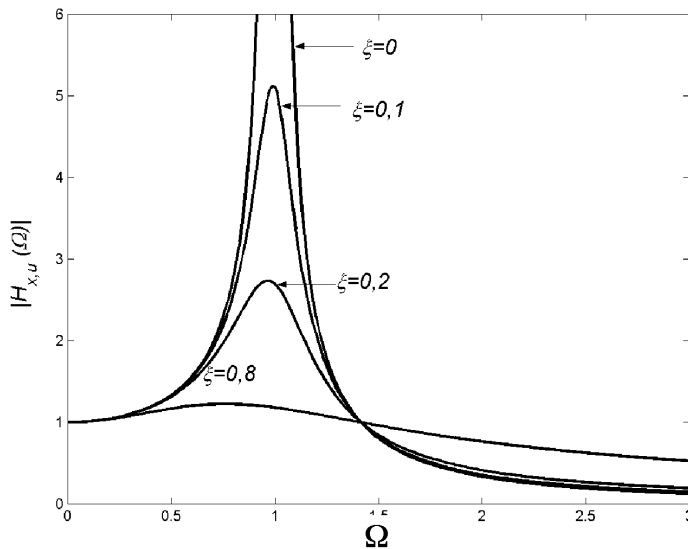


Figure 1.2: Resonance curves

Structures cannot be designed on the basis of dynamic loading using only the maximum intensity of loading. For example, load  $F(t) = F_0 \sin(\omega_1 t)$  can generate displacements or stresses much smaller than those of load  $F(t) = (F_0 / 10) \sin(\omega_2 t)$ , whose amplitude is ten times less, if load  $F(t) = (F_0 / 10) \sin(\omega_2 t)$  has a frequency much closer to the resonant frequency of the structure.

L'amplification par la résonance étant directement liée à l'amortissement, il est donc indispensable de bien estimer ce paramètre afin de réaliser un dimensionnement dynamique correct. Il faut noter que l'étude de l'oscillateur simple repose sur l'hypothèse de l'amortissement linéaire (visqueux, avec une force d'amortissement proportionnelle à la vitesse), qui est un type d'amortissement parmi d'autres. C'est cependant l'hypothèse retenue par la plupart des ingénieurs et concepteurs de passerelles.

### 1.1.3. Etudes des systèmes complexes

L'étude des structures réelles qui sont généralement des systèmes continus complexes avec un nombre important de degrés de liberté peut se ramener à l'étude d'un ensemble de  $n$  oscillateurs simples, chacun d'entre eux décrivant une vibration caractéristique du système. Les principes des méthodes d'approximations qui permettent un tel passage sont présentés de manière détaillée dans l'annexe 1. L'élément nouveau par rapport à l'oscillateur simple est le mode propre défini par le couple formé par une fréquence et une déformée  $(\omega_i, \phi_i)$  du système. Le calcul des modes propres est relativement compliqué mais les projeteurs disposent à l'heure actuelle d'excellents logiciels pour les obtenir, pourvu qu'ils appliquent lors de la modélisation toutes les précautions d'usage dispensées dans tout enseignement d'analyse modale. L'utilisation pratique des modes propres est abordée dans le chapitre 3.

Il faut signaler enfin que dans certains cas, le problème peut même être approché par un seul oscillateur simple. Dans tous les cas, les principales conclusions obtenues dans l'étude de l'oscillateur simple sont généralisables aux systèmes complexes.

## 1.2. Le chargement piétonnier

### 1.2.1. Effets de la marche d'un piéton

L'action d'un piéton que ce soit pendant la marche ou la course a été étudiée de manière assez approfondie (voir l'annexe 2) et se traduit par une force ponctuelle exercée sur le support, fonction du temps et de la position du piéton. En notant  $x$  la position de celui-ci par rapport à l'axe de la passerelle, l'action d'un piéton qui se déplace à une vitesse constante  $v$  peut donc être représentée par le produit d'une composante temporelle  $F(t)$  et d'une composante spatiale  $\delta(x - vt)$ ,  $\delta$  étant l'opérateur de Dirac, soit :

$$P(x, t) = F(t) \delta(x - vt)$$

De nombreux paramètres peuvent aussi affecter et faire varier cette action (démarche, caractéristiques physiologiques et vestimentaires, rugosité du sol...), mais les mesures expérimentales réalisées ont montré qu'elle est du type périodique, caractérisée par le paramètre fondamental qui est la fréquence, c'est-à-dire le nombre de pas à la seconde. Les valeurs estimées de cette fréquence se trouvent dans le Tableau 1.1

Since amplification by resonance is directly linked to damping, correct estimation of damping is a vital step towards correct dynamic design. It should be noted that the study of the SDOF oscillator relies on the assumption of linear damping (viscous, with a damping force proportional to velocity), which is just one of several kinds of damping. However, it is the assumption adopted by most footbridge engineers and designers.

### 1.1.3. Studies of complex systems

The study of actual structures, which are generally complex continuous systems with a large number of degrees of freedom, can be reduced to the study of a set of  $n$  SDOF oscillators, each describing a characteristic vibration of the system. The principles of the approximation methods justifying this simplification are presented in detail in appendix 1. The new factor relative to the SDOF oscillator is the eigenmode defined by the couple formed by a frequency and a deformation  $(\omega_i, \phi_i)$  of the system. Calculation of modes is relatively complicated, but these days designers have excellent softwares for determining them, provided they apply to their modelling all the usual precautions stipulated in any modal-analysis lectures. The practical use of modes is addressed in chapter 3.

It should also be pointed out that in some cases the problem can even be approximated with a single SDOF oscillator. In all cases, the main conclusions obtained with the SDOF oscillator study can be generalized and extended to complex systems.

## 1.2. Pedestrian loading

### 1.2.1. Walking effects

The action of pedestrians, either walking or running, has been studied quite comprehensively (see appendix 2). It amounts to a point load exerted on the support, as a function of time and the position of the pedestrian. Noting  $x$  the position of the pedestrian relative to the centreline of the footbridge, the action of the pedestrian moving at a constant velocity,  $v$ , can be represented by the product of a time-domain component  $F(t)$  and a space-domain component  $\delta(x - vt)$ ,  $\delta$  being the Dirac delta function, giving:

$$P(x, t) = F(t) \delta(x - vt)$$

Many other parameters can affect this loading and its result (gait, physiology, clothing characteristics, surface roughness, etc.), but the experimental measurements show that the action is of periodic type, characterized by the fundamental character of frequency, i.e. the number of steps per second. Estimations of this frequency are given in Table 1.1.

Désignation	Spécificité	Plage de fréquences (Hz)
Marche	Contact continu avec le sol	1,6 à 2,4
Course	Contact discontinu	2 à 3,5

Tableau 1.1

Classiquement, pour la marche normale (non gênée), la fréquence peut être décrite par une distribution gaussienne de moyenne 2 Hz et d'écart type 0,20 Hz environ (de 0,175 à 0,22 selon les auteurs). Des études plus récentes ainsi que les enseignements issus d'essais récents ont même montré que la fréquence moyenne était plus basse, vers 1,8 Hz - 1,9 Hz.

La fonction périodique  $F(t)$ , peut donc être décomposée en une série de Fourier c'est-à-dire une partie constante augmentée d'une somme infinie de forces harmoniques. La somme de toutes les contributions élémentaires des termes de cette somme redonne l'effet total de l'action périodique.

$$F(t) = G_0 + G_1 \sin 2\pi f_m t + \sum_{i=2}^n G_i \sin(2\pi i f_m t - \varphi_i)$$

- avec  $G_0$  : la force statique (poids du piéton pour la composante verticale),  
 $G_1$  : l'amplitude de la première harmonique,  
 $G_i$  : l'amplitude de la  $i^{\text{ème}}$  harmonique,  
 $f_m$  : la fréquence de la marche,  
 $\varphi_i$  : le déphasage de la  $i^{\text{ème}}$  harmonique par rapport à la première,  
 $n$  : le nombre d'harmoniques prises en compte.

La valeur moyenne de 700 newtons peut être prise pour  $G_0$ , poids d'un piéton.

À la fréquence moyenne située autour de 2 Hz ( $f_m = 2$  Hz) pour l'action verticale, les valeurs des coefficients de la décomposition de Fourier de  $F(t)$  sont les suivantes (en se limitant aux trois premiers termes, c'est-à-dire  $n = 3$ , les coefficients des termes d'ordre supérieur étant inférieurs à 0,1  $G_0$ ) :

$$G_1 = 0,4 G_0 ; G_2 = G_3 \approx 0,1 G_0 ;$$

$$\varphi_2 = \varphi_3 \approx \pi/2.$$

En décomposant la force en trois composantes, à savoir une composante « verticale » et deux composantes horizontales (une dans le sens du déplacement dite « longitudinale » et une perpendiculaire au déplacement dite « transversale » ou « latérale »), on peut retenir pour le dimensionnement, en se limitant à la première harmonique dans la pratique, les valeurs suivantes de ces composantes



Gait	Specific feature	Frequency range (Hz)
Walking	Constant contact with ground	1,6 to 2,4
Running	Intermittent contact	2,0 to 3,5

Table 1.1

Classically, the frequency of normal, unhindered walking can be described by a gaussian distribution with a mean of 2 Hz and a standard deviation of around 0.20 Hz (from 0.175 to 0.22 depending on authors). More recent studies and recent tests have in fact shown that the mean frequency was lower, at 1.8 Hz - 1.9 Hz.

The periodic function  $F(t)$  can therefore be broken down into Fourier series, i.e. a constant component associated to an infinite sum of harmonic forces. The sum of all the elementary contributions of the terms of this sum gives the total effect of the periodic loading.

$$F(t) = G_0 + G_1 \sin 2\pi f_m t + \sum_{i=2}^n G_i \sin(2\pi i f_m t - \varphi_i)$$

- where  $G_0$  : static force (weight of the pedestrian for the vertical component),
- $G_1$  : amplitude of the 1<sup>st</sup> harmonic,
- $G_i$  : amplitude of the  $i^{\text{th}}$  harmonic,
- $f_m$  : stepping rate (frequency),
- $\varphi_i$  : offset of the  $i^{\text{th}}$  harmonic from the first,
- $n$  : number of harmonics considered.

The weight of the pedestrian,  $G_0$ , can be assumed to have a mean value of 700 newtons.

At the average frequency of about 2 Hz ( $f_m = 2$  Hz) for the vertical load, the coefficients of the Fourier decomposition of  $F(t)$  are as follows (for the first three terms only, i.e.  $n = 3$ , the coefficients of the higher-order terms being less than 0.1  $G_0$ ):

$$G_1 = 0.4 G_0 ; G_2 = G_3 \approx 0.1 G_0 ;$$

$$\varphi_2 = \varphi_3 \approx \pi/2.$$

Decomposing the force into three components, namely a 'vertical' component and two horizontal components (a 'longitudinal' one in the direction of pedestrian displacement and a 'lateral' one perpendicular to the displacement), and limiting analysis to the first

*harmonic in practice, the following values can be taken for these components for design purposes:*

Composante verticale de l'action d'un piéton :

$$F_v(t) = G_0 + 0,4 G_0 \sin(2\pi f_m t)$$

Composante horizontale transversale de l'action d'un piéton :

$$F_{ht}(t) = 0,05 G_0 \sin\left(2\pi \left(\frac{f_m}{2}\right) t\right)$$

Composante horizontale longitudinale de l'action d'un piéton :

$$F_{hl}(t) = 0,2 G_0 \sin(2\pi f_m t)$$

On notera que pour une même marche, la fréquence de l'action transversale de la marche est égale à la moitié de celle de l'action verticale et longitudinale. Ceci est lié au fait que la période de l'action est égale à la durée entre deux pas consécutifs pour l'action verticale et l'action longitudinale, car les deux pas en question exercent une force dans le même sens, alors que cette durée est celle correspondant à deux pas droits consécutifs ou deux pas gauches consécutifs dans le cas de l'action transversale, car les pas gauches et les pas droits exercent des actions dans des sens opposés. De ce fait, la période de l'action transversale est deux fois plus élevée que pour les actions verticales et longitudinales, et donc la fréquence est deux fois plus faible.

### 1.2.2. Effets de la course d'un piéton

Les effets de la course d'un piéton sont présentés dans l'annexe 2. Ce cas de charge qui peut s'avérer très dimensionnant n'est pas à retenir de manière systématique pour le dimensionnement. Bien souvent, le temps de passage de joggeurs est relativement court ce qui ne laisse pas beaucoup de temps au phénomène de résonance pour se mettre en place, et cela indispose les autres piétons sur une durée très courte. En plus, il ne permet pas de couvrir l'organisation de manifestations exceptionnelles comme un marathon qui doit faire l'objet d'une étude particulière. On négligera donc ces effets dans la suite du guide.

### 1.2.3. Effets aléatoires de plusieurs piétons et de la foule

Les passerelles sont dans la pratique soumises à l'action simultanée de plusieurs personnes, ce qui complique fortement leur analyse dynamique. En effet, chaque piéton possède ses propres caractéristiques (poids, fréquence, vitesse...) et, selon le nombre de personnes présentes sur l'ouvrage, les piétons vont engendrer des actions plus ou moins synchrones entre elles d'une part et éventuellement avec la passerelle d'autre part. S'ajoutent à cela les déphasages initiaux entre piétons qui sont dus à leurs moments d'entrée respectifs sur la passerelle.

De plus, le problème du comportement intelligent de l'être humain, qui fait que le piéton placé au milieu d'autres et face à une situation différente de celle à laquelle il s'attend va modifier sa marche naturelle et normale de façons diverses, se prête difficilement à un traitement par logiciel.

*Vertical component of pedestrian load:*

$$F_v(t) = G_0 + 0.4 G_0 \sin(2\pi f_m t)$$

*Lateral horizontal component of pedestrian load:*

$$F_{ht}(t) = 0,05 G_0 \sin\left(2\pi \left(\frac{f_m}{2}\right) t\right)$$

*Longitudinal horizontal component of pedestrian load:*

$$F_{hl}(t) = 0.2 G_0 \sin(2\pi f_m t)$$

*It is observed that for a given gait, the frequency of the lateral loading is half that of the vertical and longitudinal loadings. This is associated with the fact that the period of the load is the time between two consecutive steps for the vertical and longitudinal loads, for the two steps concerned exert a force in the same direction, whereas for lateral load it is the time between two consecutive right steps or two consecutive left steps, for left steps and right steps exert loads in opposite directions. Because of this, the period of the lateral loading is twice as long as for vertical and longitudinal loadings, and its frequency is therefore two times lower.*

### 1.2.2. Running effects

*The effects of a runner are presented in appendix 2. Although this load case can be critical for design, it need not be systematically adopted. Very often, the time it takes for a jogger to cross a bridge is relatively short, not allowing much time for resonance to be set up, and disturbing other pedestrians for only a short time. In addition, it does not cover exceptional events such as a marathon which requires special studies. The effects of running will therefore be omitted in this guide.*

### 1.2.3. Random effects of several pedestrians and crowds

*In practice, footbridges are subject to the simultaneous action of several people, which considerably complicates their dynamic analysis. Each pedestrian has his own characteristics (weight, stepping rate (frequency), speed, etc.) and, depending on the number of people using the bridge, will set up more or less synchronous actions with other pedestrians, on one hand, and possibly with the footbridge itself. To which must be added initial phase offset between pedestrians due to the different timing of their arrival on the bridge.*

*In addition, the fact that we are dealing with intelligent human behaviour—which means that a pedestrian amongst a group of other people who finds himself facing a situation that differs from what he expected will change his natural, normal gait in a variety of ways—makes it a difficult situation for a computer program to process.*

Il est donc très difficile de simuler complètement l'action réelle d'une foule. Tout au plus peut-on faire des hypothèses raisonnables et simplificatrices bâties à la suite d'études sur le comportement des piétons, et de supposer ensuite que l'effet d'une foule se déduit par multiplication de l'effet élémentaire d'un piéton, éventuellement pondéré par un coefficient réducteur. Quelques idées existent et sont antérieures aux incidents des passerelles de Solférino et du Millenium. Elles sont présentées dans les paragraphes qui suivent, de même qu'une étude statistique plus exhaustive qui va servir de base aux chargements recommandés dans le présent guide.

#### 1.2.3.1. Flot de piétons de type aléatoire. Modèle classique.

Pour un grand nombre de piétons indépendants (c'est-à-dire sans synchronisation particulière) se présentant à un taux d'arrivée  $\lambda$  (en personne/seconde) pour traverser une passerelle de manière aléatoire, la réponse dynamique moyenne en un point de la passerelle soumise à ce flot de piétons est obtenue en multipliant l'effet produit par un piéton par un facteur  $k = \sqrt{\lambda T}$ ,  $T$  étant le temps mis par un piéton pour traverser la passerelle (qui peut aussi être exprimé par  $T = L/v$  si  $L$  représente la longueur de la passerelle et  $v$  la vitesse du piéton). Le produit  $\lambda T$  représente en fait le nombre  $N$  de piétons présents à un moment donné sur la passerelle. Cela revient en pratique à dire que  $N$  piétons sur une passerelle sont équivalents à  $\sqrt{N}$  tous synchronisés. Ce résultat peut se démontrer en considérant une foule de piétons tous à la même fréquence ayant une distribution de phases aléatoires.

Ce résultat tient compte du déphasage entre piétons dû à leurs temps d'entrée différents mais comporte une lacune car, par hypothèse, tous les piétons se déplacent à une même fréquence.

#### 1.2.3.2. Flots de piétons à partir de mesures expérimentales

Différents chercheurs ont étudié les sollicitations engendrées par un groupe de personnes à partir de mesures sur des plate-formes instrumentées sur lesquelles de petits groupes de piétons se déplacent.

Ebrahimpour et al. (Ref. [24]) proposent ainsi un modèle de chargement de foule peu dense basé sur le premier terme d'une représentation de Fourier et dont le coefficient  $\alpha_1$  dépend du nombre  $N_p$  de personnes présentes sous la forme suivante (pour une fréquence de marche de 2 Hz) :

$$\alpha_1 = 0,34 - 0,09 \log(N_p) \quad \text{pour } N_p < 10$$

$$\alpha_1 = 0,25 \quad \text{pour } N_p > 10$$

Ce modèle ne porte malheureusement pas sur le cumul d'effets aléatoires de piétons.

#### 1.2.3.3. Modèle complet de simulation du flot de piétons.

Jusqu'à encore tout récemment le dimensionnement dynamique des passerelles restait principalement basé sur le cas du modèle de charge théorique d'un seul piéton, complété de prescriptions assez simplistes relatives à des valeurs planchers de rigidité ou de fréquence propre de la passerelle.

*It is therefore very difficult to fully simulate the actual action of a crowd. At least, one can make reasonable simplifying assumptions based on the study of pedestrian behaviour, and then assume that the effect of a crowd can be deduced by multiplying the elementary effect of an individual pedestrian, possibly with weighting by a reduction factor. There were already ideas on the matter before the incidents with the Solferino Bridge in Paris and the Millennium Bridge in London. They are presented in the following paragraphs, together with a more exhaustive statistical study which will serve as a basis for the loadings recommended in this guide document.*

#### 1.2.3.1. Random pedestrian flow. Conventional model.

*For a large number of independent pedestrians (i.e. without any particular synchronization) reaching the bridge at an arrival rate  $\lambda$  (in persons/second) to cross a footbridge in random order, the mean dynamic response at a point on the bridge subject to the pedestrian flow is obtained by multiplying the effects produced by a single pedestrian by a factor  $k = \sqrt{\lambda T}$ , where  $T$  is the time taken by the pedestrian to cross the bridge (which can also be expressed as  $T = L/v$  where  $L$  is the length of the bridge and  $v$  the speed of the pedestrian). Product  $\lambda T$  represents the number  $N$  of pedestrians on the bridge at a given time. In practice this amounts to saying that  $N$  pedestrians on the bridge is equivalent to  $\sqrt{N}$  synchronized pedestrians. This result can be demonstrated by considering a crowd of pedestrians all walking at the same frequency and with a distribution of random phases. This result takes account of phase offset between pedestrians due to their different arrival times, but does have one shortcoming in that it assumes all pedestrians walk at the same frequency.*

#### 1.2.3.2. Pedestrian flow from experimental measurements

*Different researchers have studied the load effects caused by a group of people by recording on instrumented platforms on which small groups of pedestrians move about.*

*Ebrahimpour et al. (Ref. [24]) propose as a result a light-crowd loading model based on the first term of a Fourier representation whose coefficient  $a_1$  depends on the number  $N_p$  of people present in the following form (for a walking frequency of 2 Hz):*

$$a_1 = 0.34 - 0.09 \log(N_p) \quad \text{for } N_p < 10$$

$$a_1 = 0.25 \quad \text{for } N_p > 10$$

*Unfortunately this model does not address the cumulation of random pedestrian effects.*

#### 1.2.3.3. Complete model for pedestrian-flow simulation

*Until very recently, dynamic design of footbridges was chiefly based on the theoretical load model with a single pedestrian, complemented by some quite simplistic provisions relating to threshold stiffness or frequency values for the bridge.*

Il est manifeste que ces prescriptions sont très insuffisantes et ne permettent pas notamment de couvrir les principaux problèmes posés par l'utilisation de passerelles en zone urbaine soumises plutôt à une fréquentation de groupes de piétons et de foule plus ou moins dense. Même le modèle en  $\sqrt{N}$  explicité ci-dessus présente des lacunes.

Les limites des connaissances sur le comportement d'une foule sont vite apparentes mais rendent d'autant plus pressant le besoin de disposer de moyens pratiques de dimensionnement. Il vaut mieux proposer des éléments assez simples au départ, mais utiles et perfectibles que de rester dans le vide actuel.

Plusieurs cas de charge de foule ont donc été élaborés en utilisant des calculs de probabilités et un traitement statistique pour creuser un peu plus la question d'une foule aléatoire. Le modèle retenu finalement consiste à faire circuler des piétons de fréquences et phases aléatoires sur une passerelle présentant différents modes, et d'évaluer à chaque fois le nombre de piétons équivalents, qui régulièrement répartis sur la passerelle, tous en phase et à la fréquence propre de la passerelle, produiraient le même effet que les piétons aléatoires.

Pour tenir compte de l'effet statistique, il a été procédé à plusieurs essais numériques. Pour chaque essai comportant  $N$  piétons et pour chacun de ces piétons, on tire une phase aléatoire  $\varphi$  et une fréquence aléatoire ( $f = \frac{\omega}{2\pi}$ ) de distribution normale centrée autour

de la fréquence propre de la passerelle et d'écart type 0,175 Hz ; on note le maximum de l'accélération sur une durée suffisamment longue (en l'occurrence dans ce cas le temps nécessaire à un piéton pour franchir deux fois la passerelle à la vitesse de 1,5 m/s), et on calcule le nombre de piétons équivalents qui seraient parfaitement synchronisés. La figure 1.3 explicite la méthode utilisée.

*It is obvious that these provisions are wholly insufficient and, in particular, do not cover the main problems involved in the use of footbridges in an urban environment used by groups of pedestrians and more or less large crowds. Even the  $\sqrt{N}$  model outlined above has shortcomings.*

*The limits of knowledge about crowd behaviour soon became obvious, making it all the more urgent to have practical means of designing footbridges. It is better to propose initially quite simple but useful, albeit perfectible means than to remain in the current knowledge void.*

*Several crowd-load cases have therefore been developed using probability calculations and statistical analysis to address the question of a random crowd in greater detail. The model finally adopted consists in having pedestrians walking at random frequencies and phases on a footbridge with several modes, and assessing in each case the number of equivalent pedestrians who, regularly distributed over the bridge, all in phase and at the natural frequency of the bridge, would produce the same effect as the random pedestrians.*

*To take account of the statistical effect, several numerical simulations were carried out. For each simulation with  $N$  pedestrians and for each of those pedestrians, a random phase  $\varphi$  and a random frequency ( $f = \frac{\omega}{2\pi}$ ) with gaussian distribution with the bridge natural frequency for the mean and with a standard deviation of 0.175 Hz were drawn; the maximum acceleration over a sufficiently long period (in this case, the time necessary for a pedestrian to cross the bridge twice at a speed of 1.5 m/s) was recorded, and the number of equivalent pedestrians who could be perfectly synchronized was calculated. Figure 1.3 demonstrates the method used.*

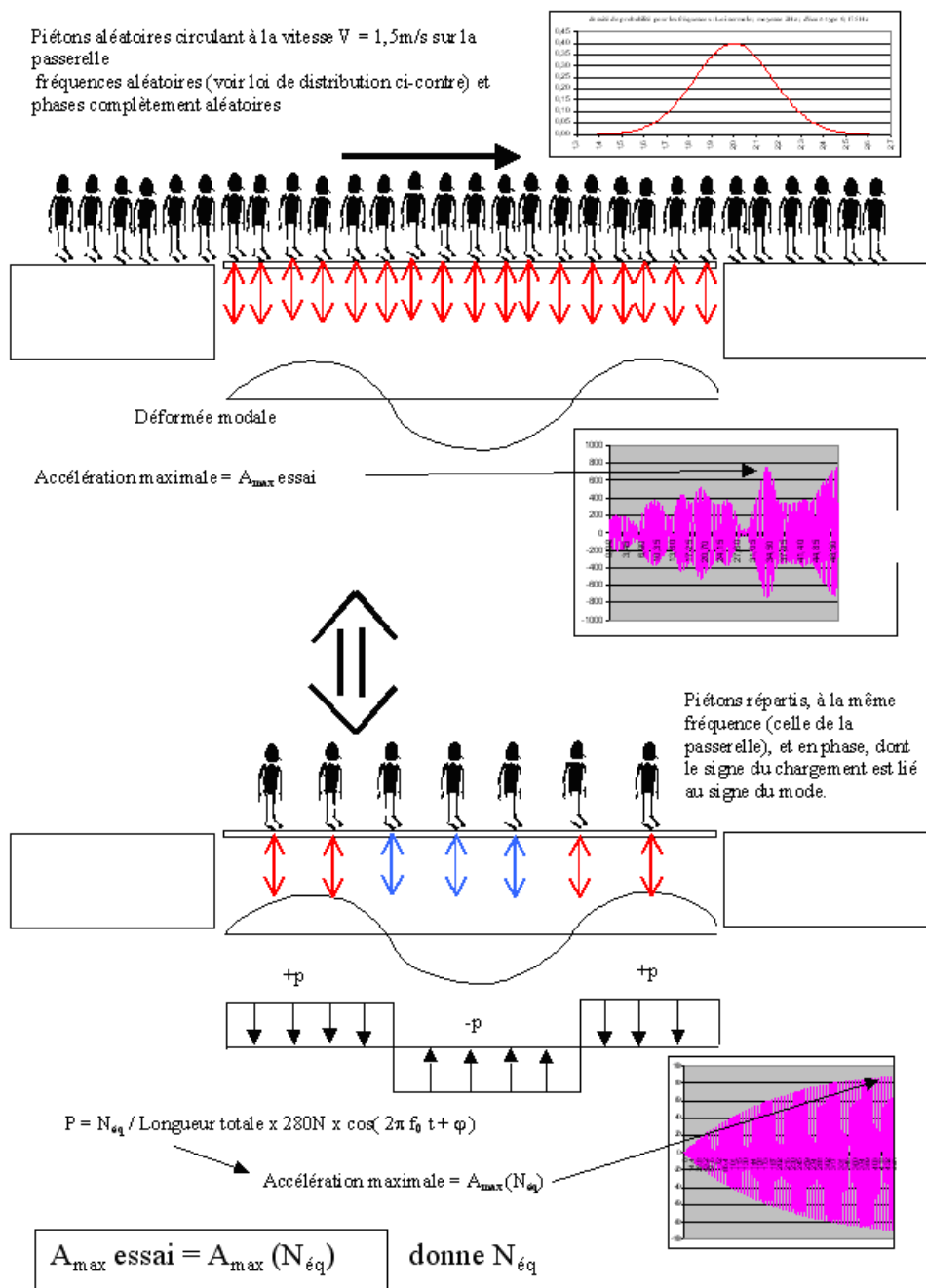


Figure 1.3 : Méthodologie pour le calcul du nombre de piétons équivalents



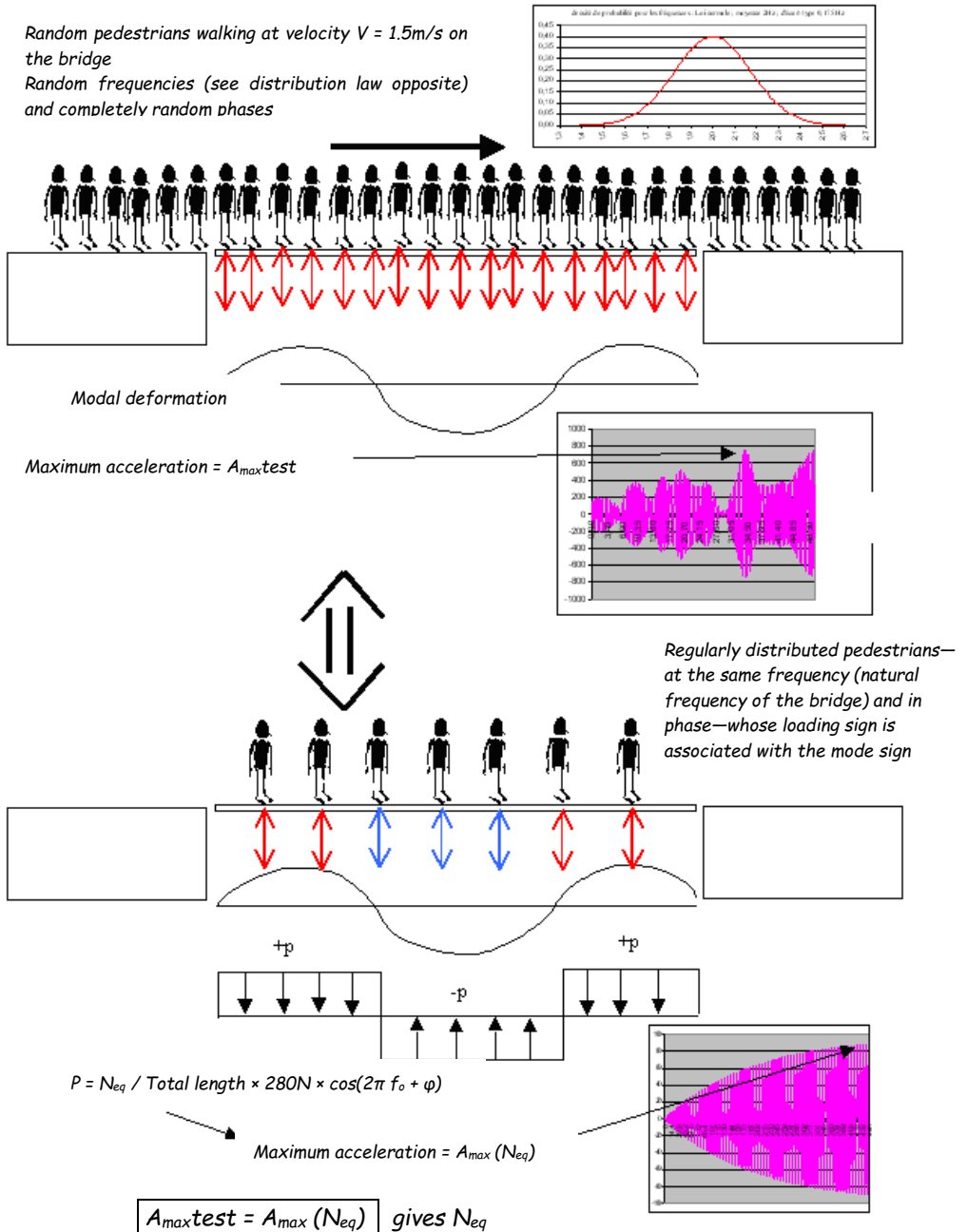


Figure 1.3: Methodology for calculating the number of equivalent pedestrians

On a reproduit ces essais à nombre de piétons fixé, amortissement fixé, nombre de ventres du mode fixé, 500 fois, puis on a déterminé la valeur caractéristique telle que 95% des tirages donnent une valeur inférieure à cette valeur caractéristique (valeur caractéristique à 95%, percentile 95, ou encore fractile 95%). La figure 1.4 ci-dessous explicite cette notion :

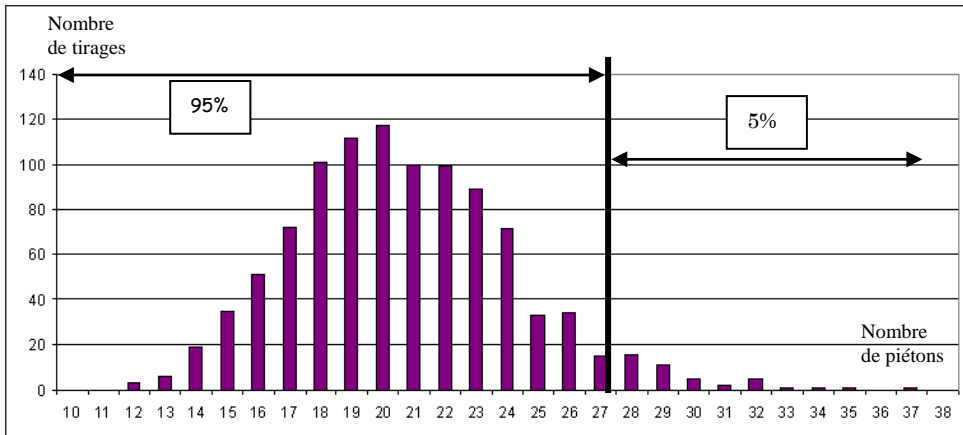


Figure 1.4 : Notion de fractile 95%

En faisant varier l'amortissement, le nombre de piétons, le nombre de ventres du mode, on peut en déduire une loi du nombre de piétons équivalents qui est celle qui se rapproche le plus des essais réalisés.

On retiendra les deux lois suivantes :

Foule peu dense ou dense : phases aléatoires et fréquences distribuées suivant une loi de Gauss :  $N_{eq} = 10,8 \sqrt{N\xi}$  où N est le nombre de piétons présents sur la passerelle (densité × surface) et  $\xi$  le pourcentage d'amortissement critique.

Foule très dense : phases aléatoires et tous les piétons à la même fréquence :  $N_{eq} = 1,85 \sqrt{N}$ .

L'utilisation de ce modèle dans les calculs est considérablement simplifiée. Il suffit de répartir les  $N_{eq}$  piétons sur l'ouvrage, de leur appliquer une force dont le signe de l'amplitude est le même que le signe de la déformée modale, de considérer cette force à la fréquence propre de la structure et de calculer l'accélération maximale obtenue à la résonance. Le chapitre 3 donne des indications sur la prise en compte de ce chargement.

Il est à noter que ce nombre est très conservatif. Sur des cas particuliers, notamment des passerelles de courte longueur, il est possible de le réduire moyennant des études basées sur la même logique que celle décrite ci-dessus.

The tests were reproduced 500 times with a fixed number of pedestrians, fixed damping, and a fixed number of mode loops, then the characteristic value for which 95% of draws give a value less than that characteristic value was determined (characteristic value at 95%, 95% percentile, or 95% quantile). Figure 1.4 demonstrates this concept:

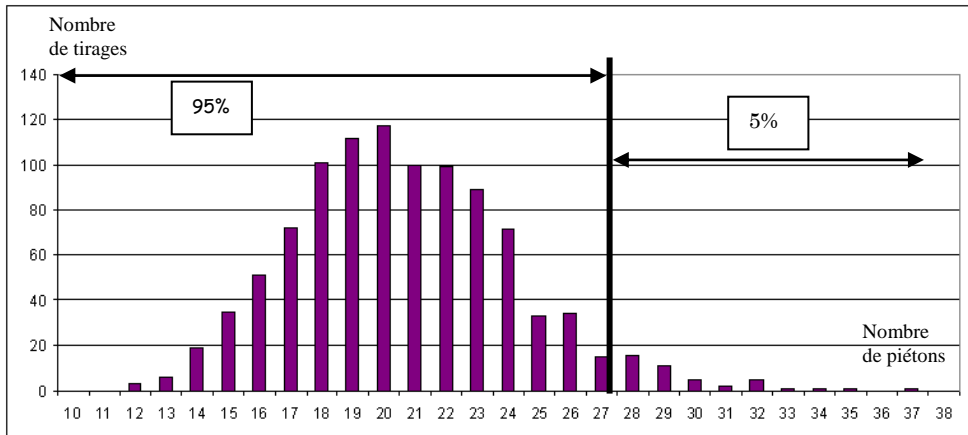


Figure 1.4: Concept of 95% quantile

By varying the damping, the number of pedestrians, and the number of mode loops, the law for the number of equivalent pedestrians can be deduced, i.e. the law closest to the results of the tests carried out.

The following two laws are used:

Light or dense crowd: random phases and frequencies with normal distribution:  
 $N_{eq} = 10.8 \sqrt{N\xi}$  where  $N$  is the number of pedestrians on the bridge (density  $\times$  area) and  $\xi$  the damping ratio.

Very dense crowd: random phases and all pedestrians at the same walking frequency:  
 $N_{eq} = 1.85 \sqrt{N}$ .

It is much simpler to use this model in calculations. It is simply a matter of distributing the  $N_{eq}$  pedestrians over the bridge, applying to them a force with the same amplitude sign as the sign of the modal deformation, considering that force at the natural frequency of the structure, and calculating the maximum acceleration obtained when resonance occurs. Chapter 3 gives more detailed information on how this loading is taken into account.

It should be noted that this number is very conservative. In particular for short length footbridges, it is possible to reduce  $N_{eq}$  with the help of studies based on same logic as that described above.

#### 1.2.4. Synchronisation forcée d'une foule de piétons

La synchronisation forcée traduit le phénomène par lequel une foule de piétons, dont les fréquences sont distribuées aléatoirement autour d'une valeur moyenne, et dont les déphasages sont aléatoires, vient progressivement se coordonner à une fréquence commune (celle de la passerelle) et à se mettre en phase par rapport aux mouvements de la passerelle.

A ce jour les cas connus de synchronisation forcée d'une foule se sont limités à des passerelles qui se mettent en vibration transversalement. Les deux cas les plus récents et maintenant célèbres sont la passerelle Solférino et la passerelle du Millenium pour lesquelles des essais in-situ assez poussés ont été menés. Confirmation a été ainsi de nouveau faite et le phénomène est nettement expliqué par la réaction du piéton qui modifie sa cadence de marche lorsque les mouvements transversaux de la passerelle lui sont perceptibles et commencent à le gêner. Pour compenser son déséquilibre naissant, il est conduit de manière instinctive à suivre la fréquence des mouvements de la passerelle. Il provoque ainsi directement le phénomène de résonance et comme tous les piétons subissent le phénomène, le problème continue en s'amplifiant et la foule entière peut théoriquement devenir synchronisée. Heureusement d'une part la synchronisation réelle est bien plus faible et d'autre part, quand les mouvements de la passerelle sont tels que les piétons ne peuvent plus mettre un pied devant l'autre ils sont obligés de s'arrêter de marcher et le phénomène ne peut donc diverger.

##### 1.2.4.1. Flots de piétons à partir de mesures sur ouvrage réel

A partir de mesures sur une grande passerelle ayant une travée principale de 5,25m x 134m et pouvant être soumise à une foule très dense (jusqu'à environ 2 personnes/m<sup>2</sup>), Fujino et al. (Ref. [30]) ont constaté que l'application du facteur  $\sqrt{N}$  présenté ci-dessus sous-estimait d'un facteur de 1 à 10 l'amplitude réelle constatée des vibrations latérales. Ils ont formulé l'hypothèse d'une synchronisation de la marche de la foule à la fréquence du mode transversal de leur passerelle pour expliquer le phénomène et ont pu ainsi vérifier dans ce cas l'ordre de grandeur des mesures réalisées. C'est le phénomène que nous qualifierons de synchronisation forcée et qui mérite d'être présenté plus en détail dans la suite.

Pour cette structure, en ne retenant que le premier terme de la décomposition de Fourier du chargement apporté par un piéton, ces auteurs proposent d'utiliser un facteur multiplicatif de 0,2 N, pour représenter le chargement qui serait équivalent à celui de la foule de N personnes et qui leur permettrait de retrouver l'ordre de grandeur des déplacements effectivement mesurés (0,01 m).

##### 1.2.4.2. Théorie formulée à propos de la passerelle du Millenium

L'équipe d'Arup a fait paraître un article très détaillé sur les résultats obtenus suite à l'étude et aux essais effectués sur la passerelle du Millenium. (Ref. [38]). Il n'est rappelé ici que ses principales conclusions.

Le modèle proposé lors de l'étude de la passerelle du Millenium est le suivant : la force exercée par un piéton (en N) est supposée reliée à la vitesse de la passerelle.

#### 1.2.4. Lock-in of a crowd of pedestrians

'Lock-in' is the phenomenon occurring when a crowd of pedestrians whose walking frequencies are initially distributed randomly around a mean value, with random offsets, gradually all align on a common frequency (that of the footbridge) and get in phase with the movements of the bridge.

To date, the only known cases of lock-in of a crowd occurred on footbridges that vibrated laterally. The two most recent, and now famous cases, are the Solferino and Millennium bridges for which quite thorough tests have been carried out. Lock-in was once again confirmed and clearly explained by the reaction of pedestrians who modify their stepping rate when lateral movement of the bridge starts to disturb their balance. To compensate the incipient imbalance, they instinctively follow the frequency of footbridge motion, thereby causing the phenomenon of resonance. As all pedestrians gradually get drawn into the synchronized movement, the problem amplifies; theoretically the entire crowd would eventually walk in step. Fortunately however, the proportion of pedestrians actually locking in to the bridge movement is much smaller, and when bridge movement is such that pedestrians have difficulty putting one foot in front of the other, they have to stop, and the phenomenon cannot diverge.

##### 1.2.4.1. Flow of pedestrians measured on actual bridges

Using measurements taken on a large footbridge with a main span measuring  $5.25 \text{ m} \times 134 \text{ m}$  that could carry a very dense crowd (up to about 2 people per square metre), Fujino et al. (Ref. [30]) observed that application of the  $\sqrt{N}$  factor introduced above underestimated the actual observed amplitude of lateral vibration by a factor of 1 to 10. They formulated the hypothesis of synchronization of the stepping frequency of the crowd to the frequency of the lateral mode of the bridge to explain the phenomenon and were thus able to verify the order of magnitude of the measurements made. This phenomenon is what we will call 'lock-in', and will be addressed in greater detail below.

For this large footbridge, adopting only the first term of the Fourier decomposition of the load attributable to pedestrians, Fujino et al. proposed an incremental factor of 0.2 N to represent the load equivalent to that of a crowd of N people, which meant they found the order of magnitude of the displacements actually measured (0.01 m).

##### 1.2.4.2. Theory formulated for the Millennium Bridge

The Arup team has published a highly detailed article on the results obtained subsequent to the study and tests carried out on the Millennium Bridge. (Ref. [38]). Only the main conclusions of that report are taken up here.

The model proposed for the study of the Millennium Bridge is as follows: the force exerted by a pedestrian (in newtons) is assumed to be related to the velocity of the footbridge.

$F_{1\text{piéton}} = KV(x, t)$  où K est un coefficient de proportionnalité (en Ns/m) et V la vitesse de la passerelle au point x considéré et à l'instant t.

Sous cette forme l'action du piéton peut s'interpréter comme un amortissement négatif. Par suite de l'hypothèse d'un amortissement visqueux de la passerelle, celui-ci est diminué directement de l'amortissement négatif produit par un piéton. La synchronisation forcée a pour conséquence de faire croître cet amortissement négatif par la participation d'un nombre plus important de piétons. La notion commode de nombre critique apparaît de ce fait : c'est le nombre de piétons au-delà duquel leur amortissement négatif cumulé devient supérieur à l'amortissement propre de la passerelle; tout se passerait alors comme si l'on avait un oscillateur instable : une petite perturbation peut engendrer des mouvements qui s'amplifient indéfiniment...

Pour le cas particulier d'un mode de vibration horizontale sinusoïdal (l'amplitude maximale de ce mode étant normée à 1,  $f_1$  représentant la première fréquence propre transversale et  $m_1$  la masse généralisée dans ce mode en considérant le déplacement maximal unitaire), et en supposant une répartition uniforme des piétons, alors le nombre critique peut s'écrire sous la forme :

$$N = \frac{8\pi\xi m_1 f_1}{K}$$

K est le coefficient de proportionnalité qui a pour valeur 300 Ns/m dans le cas de la passerelle du Millenium.

On peut alors constater qu'un faible amortissement, une faible masse ou une faible fréquence se traduisent par un nombre critique peu élevé et donc un risque de synchronisation forcée plus élevé. Ce serait donc sur ces trois paramètres qu'il faudrait agir pour augmenter le nombre critique.

Il faut noter que la valeur du coefficient K n'est pas a priori généralisable à toute structure et son emploi augmente donc l'incertitude dans l'application du critère.

#### 1.2.4.3. Essais sur plate-forme réalisée en laboratoire

Afin de mieux quantifier l'action horizontale d'un piéton et les effets de synchronisation forcée des piétons sous un mouvement latéral, des essais ont été réalisés sur un modèle réduit de passerelle, en recréant, par analyse dimensionnelle, les conditions d'une passerelle de conception relativement simple (un seul mode horizontal).

Le principe consiste à faire supporter une dalle de 7 m de long et 2 m de large par 4 lames de flexion se déplaçant latéralement, et de mettre en place des rampes d'accès et de sortie et un circuit de façon à maintenir la continuité de la marche (Photo 1). Pour maintenir cette continuité, il faut évidemment un grand nombre de piétons sur le circuit, ce nombre de piétons étant nettement plus important que le nombre de piétons situés sur la passerelle à un instant donné.

$F_{1\text{pedestrian}} = KV(x, t)$  where  $K$  is a coefficient of proportionality (in  $\text{Ns/m}$ ) and  $V$  is the velocity of the footbridge at point  $x$  and at moment  $t$ .

*In this form, the action of the pedestrian can be interpreted as negative damping. Subsequent to the assumption of applying viscous damping to the bridge, the introduced viscous damping is deducted directly from the negative damping produced by the pedestrian. Lock-in increases this negative damping by drawing in a greater number of pedestrians. The convenient notion of critical number appears as a result: this is the number of pedestrians above which the total induced negative damping becomes greater than the damping of the bridge itself; then things would happen as if there were an unstable oscillator: a small disturbance could set up movements that would amplify indefinitely ...*

*For the particular case of a horizontal sine vibration mode (the maximum amplitude of this mode being factored to 1,  $f_1$  representing the first lateral natural frequency, and  $m_1$  the generalized mass in this mode, considering the maximum unit displacement), and assuming uniform distribution of pedestrians, the critical number can be written thus:*

$$N = \frac{8\pi\xi m_1 f_1}{K}$$

*where  $K$  is the coefficient of proportionality, the value of which is  $300 \text{ Ns/m}$  in the case of the Millennium Bridge.*

*It is then observed that a small damping, a small mass, or a small frequency result in a low critical number and therefore a higher risk of lock-in. It is therefore these three parameters that would have to be changed to increase the critical number.*

*It should be noted that in principle the value of coefficient  $K$  cannot be applied generally to any structure, and that its use increases uncertainty in the application of the critical number.*

#### 1.2.4.3. Laboratory platform testing

*In order to better quantify the horizontal action of a pedestrian and the effects of pedestrian lock-in induced by lateral movement, tests were conducted on a scale-model footbridge replicating—by dimensional analysis—the conditions of a footbridge of relatively simple design (a single horizontal mode).*

*The principle was to place a 7 m long, 2 m wide slab suspended by 4 flexible blades arranged to flex laterally between 'on' and 'off' ramps connected by a circuit for continuous walking, (Photo 1). To maintain continuous excitation, it was obviously necessary to have a large number of pedestrians on the circuit, far more than the number of pedestrians on the footbridge at a given time.*

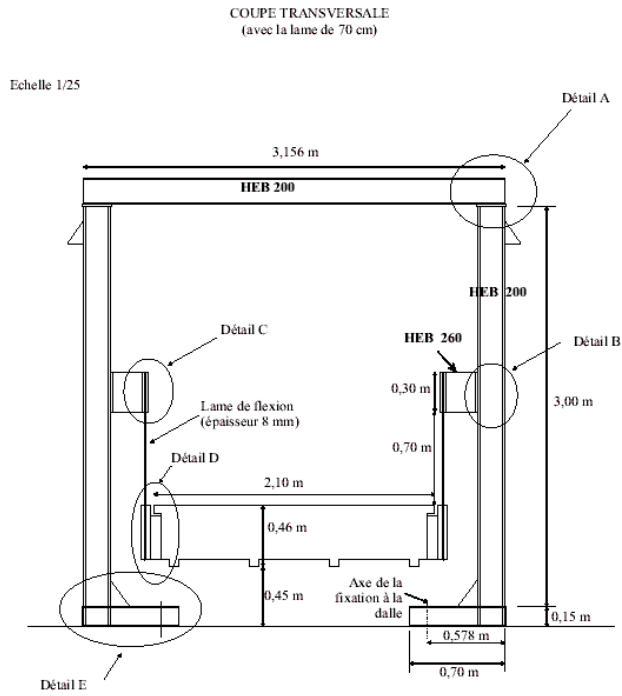


Photo 1 : Description du modèle (Source DREIF)



Cross section

Echelle 1/25

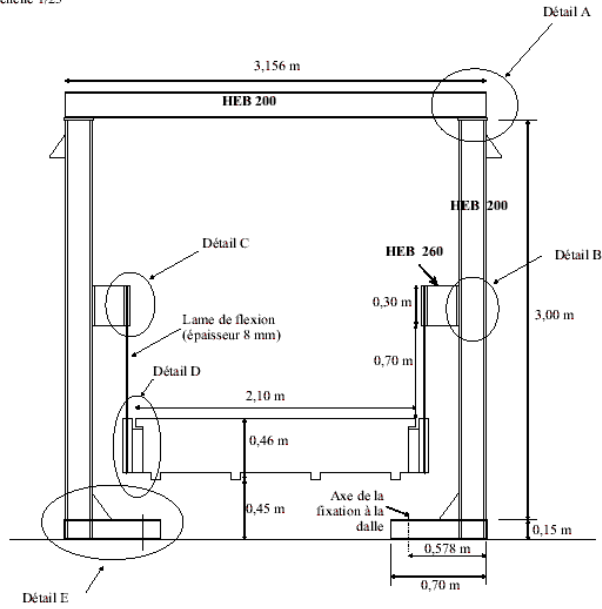


Photo 1: The model

En reconstituant la force instantanée à partir des déplacements mesurés (au préalable filtrés pour atténuer l'effet des hautes fréquences) ( $F(t) = m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t)$ ). On constate sur la figure 1.5 que, dans un premier temps, pour un piéton isolé l'amplitude de la force du piéton reste constante, autour de 50 newtons et en tous les cas inférieures à 100 newtons, quelle que soit l'amplitude des vitesses. Dans un deuxième temps, on constate que l'amplitude de la force augmente jusqu'à 150 newtons, mais il ne faut pas tenir compte des dernières oscillations qui représentent l'arrêt de l'essai.

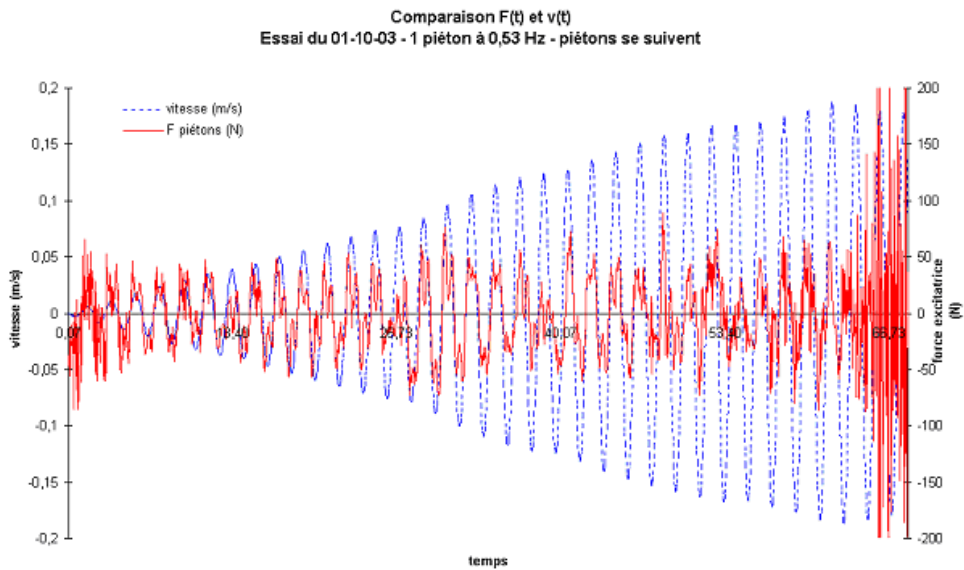


Figure 1.5 : Force et vitesse en régime résonant forcé

On a une valeur de pic qui ne dépasse pas 100 newtons et est plutôt de l'ordre de 50 newtons en moyenne, la première harmonique de ce signal étant située vers 35 newtons.

Les graphes suivants (figures 1.6 et 1.7) représentent sur la même figure les accélérations au cours du temps (courbe rose, échelle sur la partie droite en  $m/s^2$ , variation de 0,1 à 0,75  $m/s^2$ ) et la force « efficace » (Force instantanée multipliée par le signe de la vitesse, en faisant la moyenne sur une période, qui est donc positive lorsque l'on injecte de l'énergie au système et négative dans le cas contraire) pour un groupe de piétons (courbe bleue, échelle sur la partie gauche en newtons).

By reconstituting the instantaneous force from the measured displacements (first filtered to attenuate high-frequency effects) ( $F(t) = m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t)$ ), it is seen (figure 1.5) that to start with, for a single pedestrian, the amplitude of the pedestrian force remains constant, close to 50 newtons, and always less than 100 newtons, irrespective of velocities. The force then increases to 150 newtons, but the last oscillations, which correspond to the end of the test, must not be taken into account.

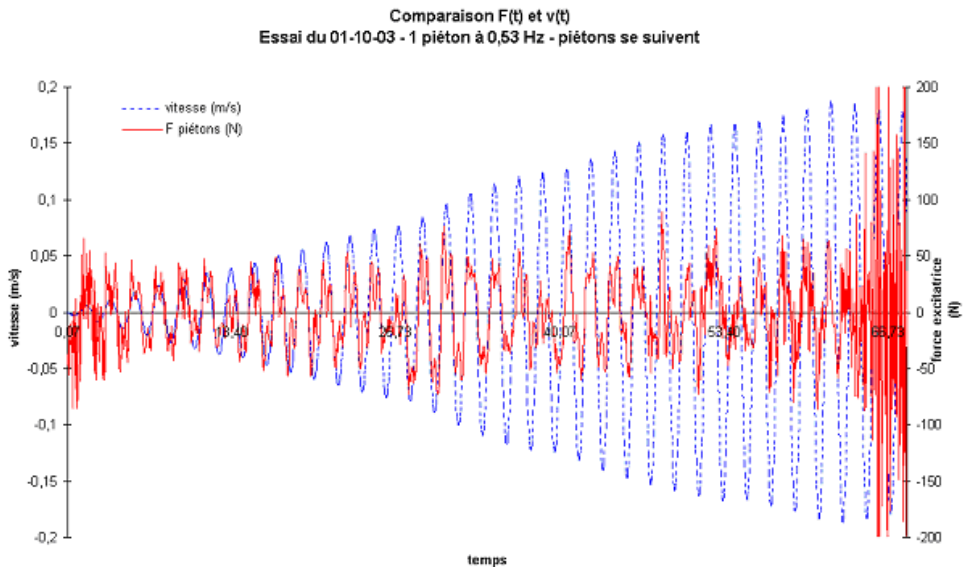


Figure 1.5: Force and velocity at lock-in

It therefore reaches a valid peak of no more than 100 newtons and tends to be around 50 newtons on average, the first harmonic of this signal being at around 35 newtons.

The graphs below (figures 1.6 and 1.7) show acceleration versus time (pink line, scale on the right in  $m/s^2$ , variation between 0.1 and 0.75  $m/s^2$ ) and the "effective" force (instantaneous force multiplied by the sign of the speed, using the average over a certain period, which is therefore positive when energy is injected into the system and negative otherwise) for a group of pedestrians (blue line, scale on the left in newtons).

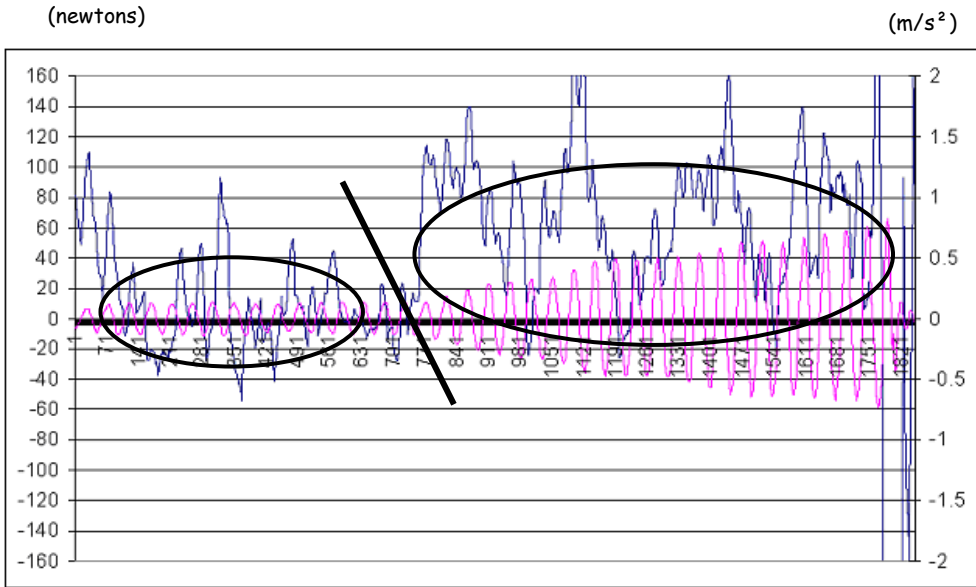


Figure 1.6 : Accélération ( $m/s^2$ ) et force efficace (newtons) avec 6 piétons aléatoires sur la passerelle

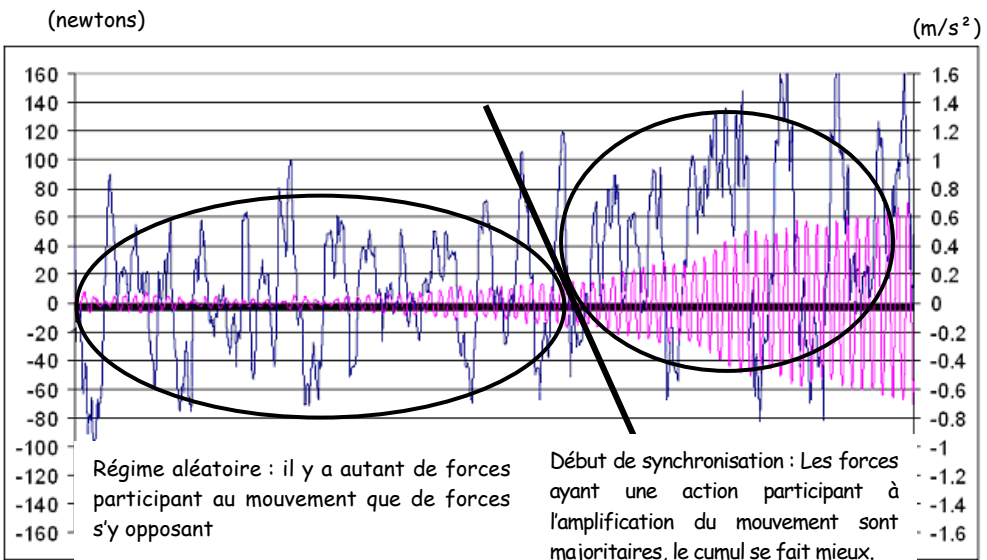


Figure 1.7 : Accélération ( $m/s^2$ ) et force efficace (newtons) avec 10 piétons aléatoires sur la passerelle

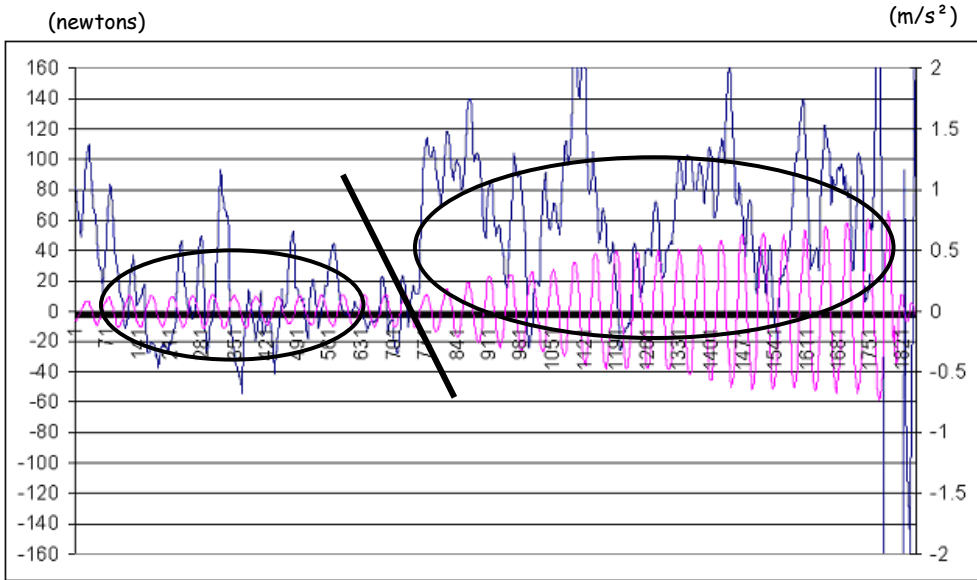


Figure 1.6: Acceleration ( $m/s^2$ ) and effective force (newtons) with 6 random pedestrians on the footbridge

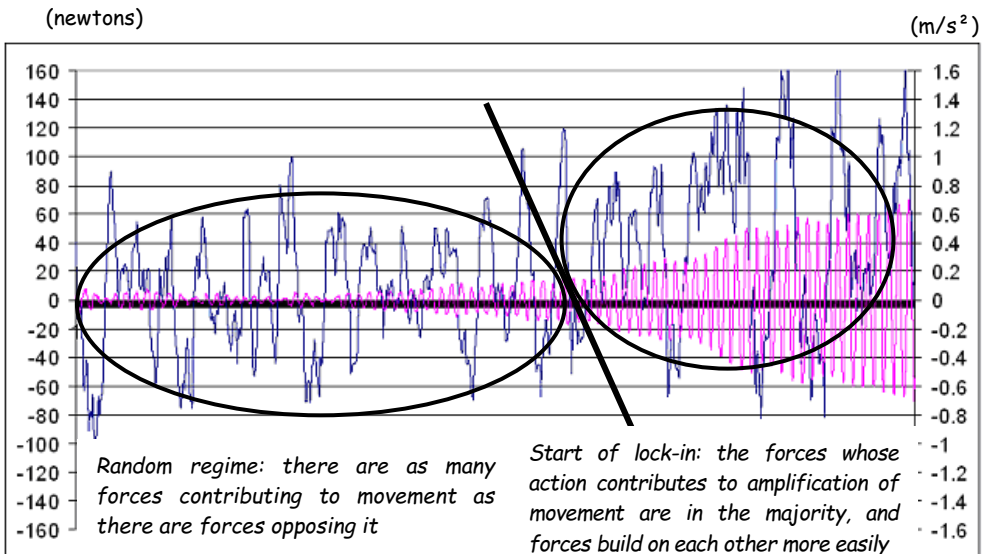


Figure 1.7: Acceleration ( $m/s^2$ ) and effective force (newtons) with 10 random pedestrians on the footbridge

On constate qu'à partir d'une certaine valeur, la force exercée par les piétons est nettement plus efficace et un début de synchronisation apparaît. Ce seuil se situe autour de  $0,15 \text{ m/s}^2$  (droite entre la zone de régime aléatoire et la zone de début de synchronisation). Néanmoins, la synchronisation n'est que très partielle (valeurs maximales de 100-150 newtons soit 0,2 à 0,3 fois l'effet de 10 piétons), mais cela est largement suffisant pour provoquer des vibrations très inconfortables ( $> 0,6 \text{ m/s}^2$ ).

#### 1.2.4.4. *Expérience acquise suite aux essais sur la passerelle de Solférino.*

Diverses campagnes d'essais se sont déroulées sur plusieurs années à la suite de la fermeture à la circulation de la passerelle Solférino, au départ pour bien identifier les problèmes et mettre au point les mesures correctives, ensuite pour contrôler l'efficacité des mesures adoptées et enfin pour dégager des enseignements utiles au milieu scientifique et technique.

Les principales conclusions qu'on peut retirer des essais de la passerelle de Solférino sont les suivantes :

- Le phénomène de synchronisation forcée s'est effectivement produit pour le premier mode de balancement latéral dont le double de la fréquence se situe bien dans la plage de fréquence de marche normale des piétons.
- A l'inverse il ne semble pas se produire pour des modes de torsion qui présentent simultanément des mouvements verticaux et horizontaux, même quand on a fait marcher la foule d'essai à une fréquence en principe de résonance. Les mouvements verticaux importants gênent et perturbent la marche des piétons mais ne semblent pas favoriser le maintien de cette marche à la fréquence de résonance repérée et choisie pour les essais. On constate alors des niveaux d'accélération horizontale élevés dont les effets semblent avoir été masqués par l'accélération verticale.
- La notion de nombre critique de piétons est tout à fait relative : il est certain qu'en dessous d'un certain seuil la synchronisation forcée ne peut pas se produire, mais à l'inverse il se peut qu'au-delà d'un seuil pourtant avéré certaines conditions particulières font qu'elle ne se produise pas.
- La synchronisation forcée semble s'initier et se développer plus facilement à partir d'une fréquence de marche initiale des piétons dont la moitié de la valeur est plus faible que la fréquence propre de balancement horizontal à risque de la structure. Pour le cas inverse, c'est à dire quand la marche de la foule a une cadence initiale plus rapide, plusieurs essais ont effectivement montré qu'elle ne se produisait pas. Ceci mérite d'être étudié de manière plus approfondie mais on peut déjà avancer l'explication selon laquelle le piéton en marche à cadence plutôt rapide ressent d'une manière différente, et ceci est certain, mais aussi d'une manière atténuée, et ceci est à confirmer, les effets d'une accélération horizontale.

It can be seen that above a certain value the force exerted by pedestrians is significantly more effective and the start of lock-in appears. This threshold is around  $0.15 \text{ m/s}^2$  (straight line between the zone of the random regime and the zone where lock-in starts). Nevertheless, lock-in is only very partial (maximum values of around 100-150 newtons, i.e. 0.2 to 0.3 times the effect of 10 pedestrians), though still plenty to set up very uncomfortable vibration ( $> 0.6 \text{ m/s}^2$ ).

#### 1.2.4.4. Lessons learnt from testing on the Solferino footbridge

A number of test campaigns were carried out over several years following the closure of the Solferino footbridge, initially to identify the problems and develop corrective measures, then to check the effectiveness of the measures taken, and finally to determine the lessons of use for the scientific and engineering community.

The main conclusions that can be drawn from the tests on the Solferino footbridge are as follows:

- Lock-in occurred for the first mode of lateral swinging, the double frequency of which lies within the range of frequencies of normal walking.
- On the contrary, there do not appear to be any torsional modes simultaneously with the vertical and horizontal movements, even when the test crowd was asked to walk at what was in principle a resonant frequency. Large vertical movements disturb walkers and disrupt their stride but do not appear to make it easier for them to keep walking at the identified resonant frequency chosen for the tests. It is also observed that there are high levels of horizontal acceleration whose effects seem to have been screened by the vertical acceleration.
- The notion of a critical number of pedestrians is entirely relative: while it is certain that below a certain threshold lock-in cannot occur, it is also possible that above a certain threshold at which lock-in has in fact been observed, certain special conditions can also prevent it.
- Lock-in appears to start and develop more easily from an initial stepping frequency half-value is lower than the natural frequency of hazardous horizontal swinging of the structure. Several tests effectively showed that lock-in did not occur in the opposite case, i.e. when the initial gait of the crowd is faster. This deserves to be studied more closely, but even now it can be suggested that a pedestrian walking at a faster pace feels the effects of horizontal acceleration differently—that is certain—and also with a degree of attenuation (to be confirmed).

- La synchronisation forcée semble manifestement se produire à partir d'un certain seuil. Ce seuil peut se traduire par un nombre suffisant de piétons présents sur la passerelle (conclusion adoptée par l'équipe d'Arup), mais il peut tout aussi bien se traduire par une valeur d'accélération ressentie par le piéton, ce qui est plus pratique pour définir un critère de vérification.

Les graphes suivants (figures 1.8 à 1.13) présentent l'analyse synthétique des essais menés sur la passerelle de Solférino. On représente l'évolution de l'accélération au cours du temps (en vert), et en parallèle le taux de corrélation ou taux de synchronisation, rapport entre le nombre de piétons équivalents et le nombre de piétons présents sur la passerelle. Le nombre de piétons équivalents se déduit de la force modale instantanée. C'est le nombre de piétons qui régulièrement répartis sur l'ouvrage et tous en phase et à la même fréquence injecteraient une même énergie par période dans le système.

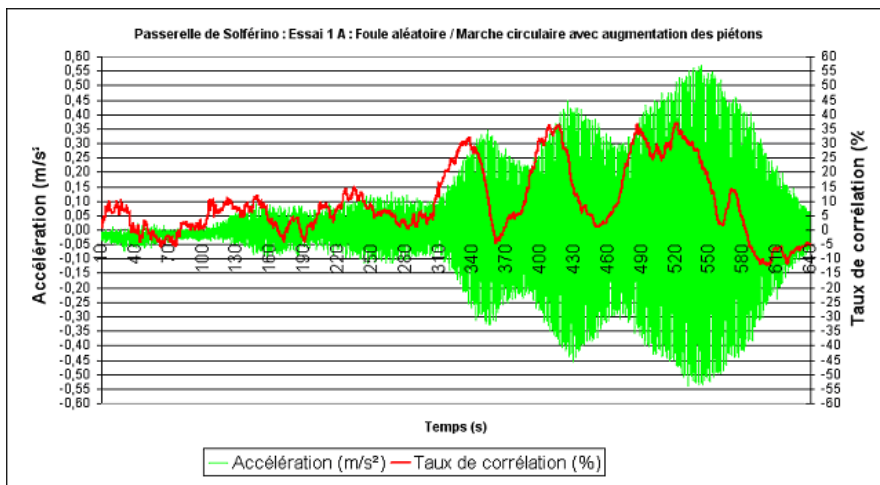


Figure 1.8 : Essai aléatoire 1A de la passerelle de Solférino : on fait circuler une foule en boucle sur la passerelle en augmentant progressivement ( 69 - 138 - 207 ) le nombre de piétons.

Dans l'essai représenté sur la figure 1.8, on constate qu'en dessous de  $0,12\text{m/s}^2$ , le comportement est complètement aléatoire, et qu'à partir de  $0,15\text{m/s}^2$ , il devient en partie synchronisés, la synchronisation atteignant 30-35% alors que les amplitudes d'accélération sont déjà élevées ( $0,45\text{m/s}^2$ ). La notion de seuil critique de changement de régime (passage d'un régime aléatoire à un régime partiellement synchronisé) semble apparaître.

Les différentes "boucles" correspondent au fait que les piétons ne sont pas régulièrement répartis sur la passerelle, mais concentrés par blocs. De ce fait, on voit clairement lorsque le bloc de piéton le plus important est plutôt au centre de la passerelle (sommet des ventres), ou plutôt aux extrémités de la passerelle (creux des ventres).



- Lock-in evidently occurs above a certain threshold level. The threshold can be expressed as a sufficient number of pedestrians on the bridge (conclusion of the Arup team), but it can equally well be expressed as the value of the acceleration felt by the pedestrian, which is more practical for defining a verification criterion.

The following graphs (figures 1.8 to 1.13) present an overview of the analysis of testing carried out on the Solferino bridge. They show the evolution of acceleration versus time (in green) alongside the rate of correlation or rate of lock-in, i.e. the ratio of the number of equivalent pedestrians to the number of pedestrians present on the bridge. The number of equivalent pedestrians is deduced from the instantaneous modal force. It is the number of pedestrians regularly distributed over the bridge, all in phase and all walking at the same frequency, which would inject the same energy per period into the system.

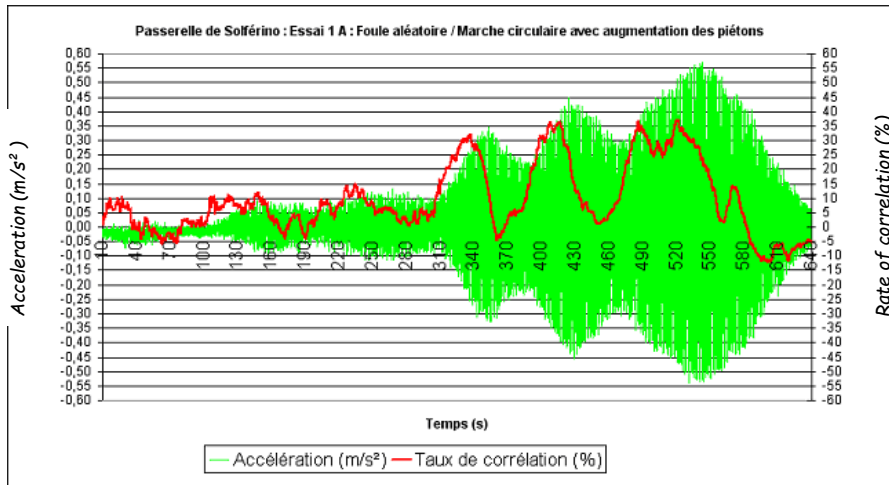


Figure 1.8: Random test 1A on the Solferino bridge: an increasingly large crowd ( 69 - 138 - 207 ) walks in a loop over the bridge.

In the test results shown in figure 1.8, it can be seen that below  $0.12\text{m/s}^2$  behaviour is completely random, and that above  $0.15\text{m/s}^2$  it there is partial synchronization and that it reaches 30-35%, while the amplitudes of acceleration are already high ( $0.45\text{m/s}^2$ ). The notion of a critical threshold for regime change (change from a random regime to a partially synchronized regime) appears to emerge.

The various loops are due to the fact that pedestrians are not distributed regularly over the bridge, but concentrated in groups. It can therefore clearly be seen when the

largest group of pedestrians is near the centre of the bridge (peak of nodes) or at the ends (valley between nodes).

On constate également que les trois ventres de montée en accélération, qui se font à des niveaux d'accélération croissante ( $0,3\text{m/s}^2$  puis  $0,4\text{m/s}^2$  et enfin  $0,5\text{m/s}^2$ ) se font avec à chaque fois le même nombre de piétons équivalent. Ceci traduit bien le fait qu'il y a une montée en accélération, stoppée deux fois lorsque le groupe de piéton atteint l'extrémité de la passerelle.

Dans l'essai suivant, représenté figure 1.9, le nombre de piétons a été augmenté de façon plus progressive.

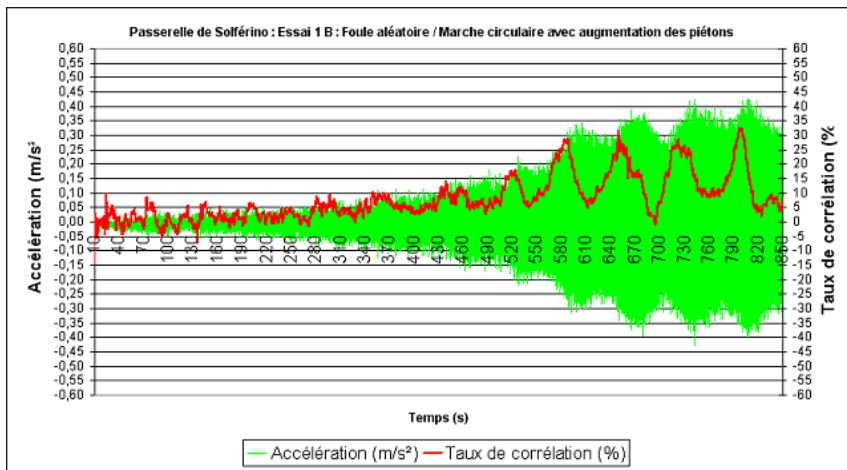


Figure 1.9 : Essai aléatoire 1B de la passerelle de Solférino : on fait circuler une foule en boucle sur la passerelle en augmentant plus progressivement ( 92 - 115 - 138 - 161 - 184 - 202 ) le nombre de piétons.

Le seuil de changement de régime semble cette fois se situer plutôt autour de  $0,15 - 0,20 \text{ m/s}^2$ . Le taux de synchronisation maximal ne dépasse pas 30%.

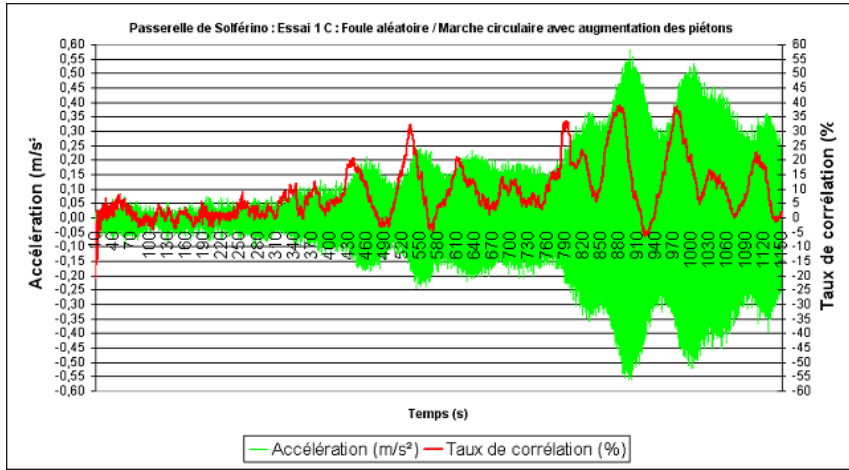


Figure 1.10 : Essai aléatoire 1C de la passerelle de Solférino

It is also seen that the three nodes corresponding to increased acceleration, occurring at ever greater levels of acceleration ( $0.3\text{m/s}^2$ , then  $0.4\text{m/s}^2$ , and finally  $0.5\text{m/s}^2$ ), are produced with the same number of equivalent pedestrians. This clearly indicates that there is an increase in acceleration, stopped twice when the group of pedestrians reaches the end of the bridge. In the next test, the results of which are shown in figure 1.9, the number of pedestrians was increased more gradually.

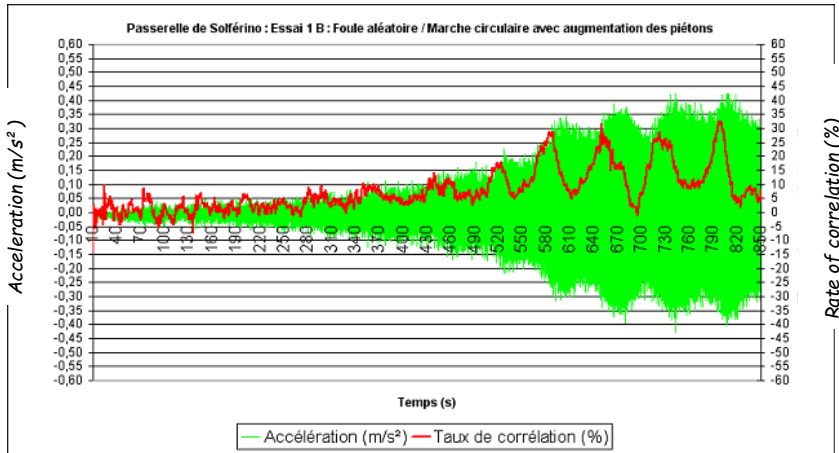


Figure 1.9: Random test 1B on the Solferino bridge: an increasingly large crowd walks in a loop over the bridge, with a more gradual increase in numbers (92 - 115 - 138 - 161 - 184 - 202)

This time the regime-change threshold appears to be around  $0.15 - 0.20 \text{m/s}^2$ . The maximum rate of synchronization does not exceed 30%.

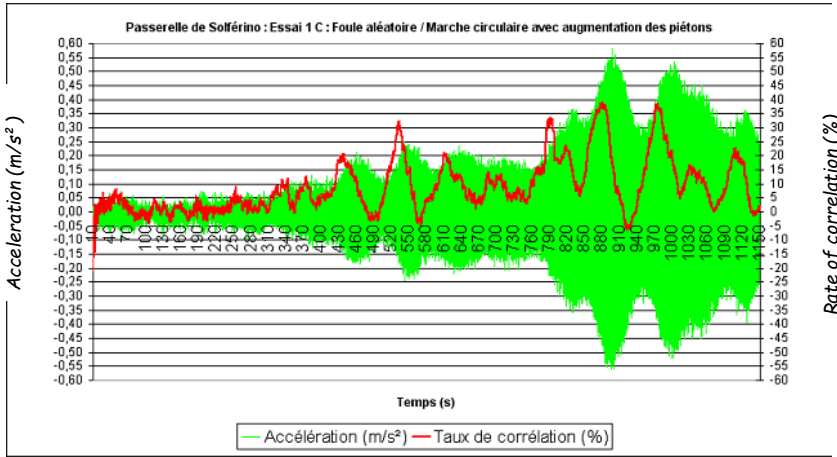


Figure 1.10: Random test 1C on Solferino bridge

L'essai 1C, représenté figure 1.10, nous conduit aux mêmes conclusions : changement de seuil entre 0,10 et 0,15m/s<sup>2</sup>, puis synchronisation plus marquée allant jusqu'à 35%-40%.

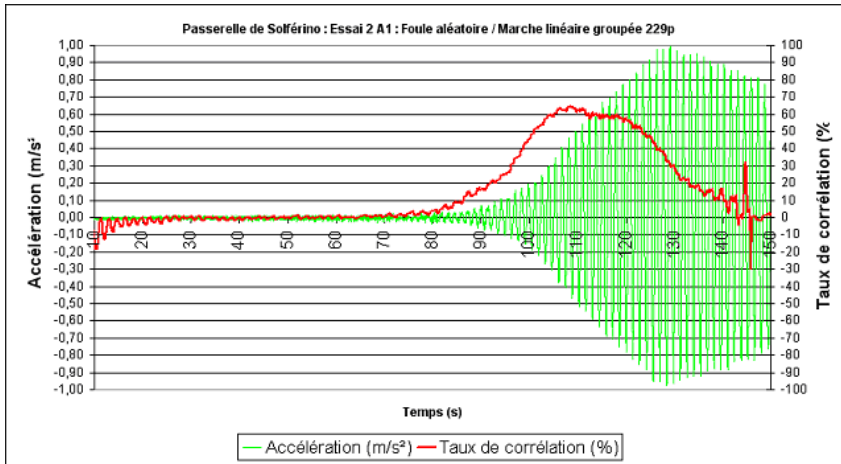


Figure 1.11 : Essai aléatoire 2A1 de la passerelle de Solferino

Dans l'essai représenté figure 1.11, les piétons sont plus regroupés et effectuent une marche d'un bord à l'autre de la passerelle. La montée puis la descente du nombre de piétons équivalents traduit plus le mouvement des piétons, et leur passage depuis une zone sans déplacements (près des bords) et une autre avec beaucoup de déplacements (aux alentours de la mi-travée). Le taux de synchronisation monte lui à environ 60%. C'est plus que précédemment, mais il faut signaler d'une part que le niveau des vibrations est plus élevé (0,9m/s<sup>2</sup> au lieu de 0,5m/s<sup>2</sup>) et d'autre part que la foule est assez resserrée, ce qui favorise le phénomène de synchronisation entre les piétons.

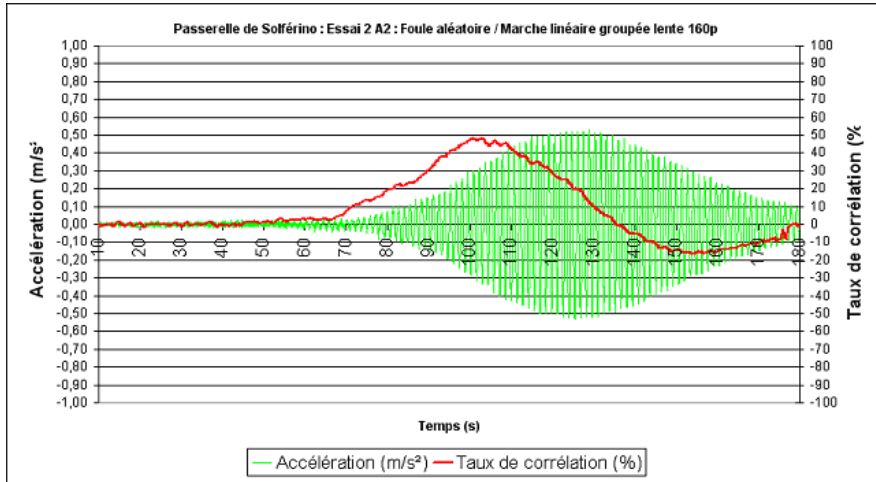


Figure 1.12 : Essai aléatoire 2A2 de la passerelle de Solférino

Test 1C shown on figure 1.10 leads to the same conclusions: regime change between  $0.10$  and  $0.15\text{m/s}^2$ , then more pronounced synchronization up to as much as 35%-40%.

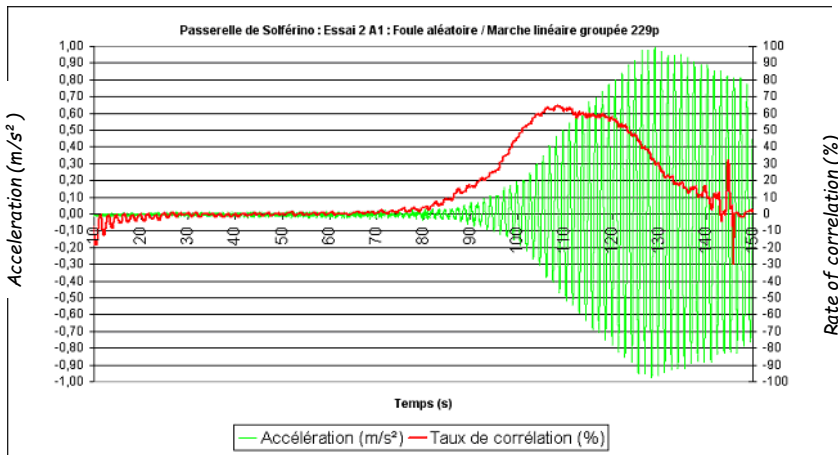


Figure 1.11: Random test 2A1 on Solferino bridge

In the test results shown in figure 1.11, the pedestrians are grouped more closely together and walk from one end of the bridge to the other. The rise, then the drop in the number of equivalent pedestrians better reflects the movement of pedestrians and their transit from an area with no displacement (close to the ends) to another with a lot of displacements (close to mid-span). The rate of synchronization rises to about 60%. This is more than previously, but it should be pointed out that, on one hand, the level of vibration is higher ( $0.9\text{m/s}^2$  instead of  $0.5\text{m/s}^2$ ), and, on the other hand, the crowd is quite tightly packed, which facilitates the emergence of synchronization between pedestrians.

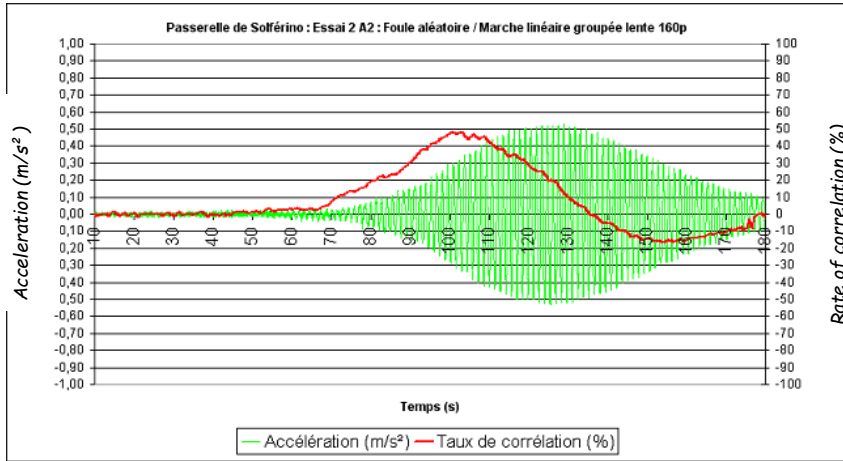


Figure 1.12: Random test 2A2 on Solferino bridge

Dans l'essai représenté figure 1.12, il n'y a que 160 personnes, qui transitent toujours d'une extrémité à l'autre de la passerelle en marche lente. Le taux de synchronisation atteint cette fois 50%. Les accélérations sont comparables à celles obtenues dans les essais 1A, 1B, et 1C.

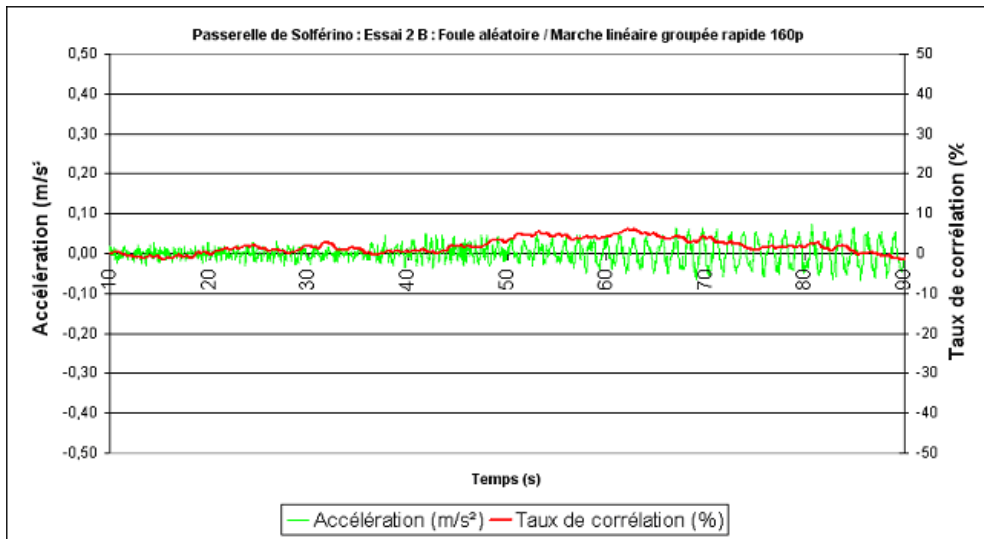


Figure 1.13 : Essai aléatoire 2B de la passerelle de Solférino

Le dernier essai (figure 1.13) est identique au précédent sauf que la marche était cette fois rapide. Il n'a pas été observé de phénomène de synchronisation des piétons, bien que l'on ait une foule compacte et de 160 personnes. Ceci démontre bien que si la fréquence de marche des piétons est trop éloignée de la fréquence propre, la synchronisation ne se produit pas.

On constate dans ces essais qu'il semble se dégager un seuil de changement de régime par rapport au régime aléatoire aux alentours de  $0,10\text{-}0,15\text{ m/s}^2$ . Après dépassement de ce seuil, les accélérations montent de manière importante mais restent bornées. On aboutit à des taux de synchronisation de l'ordre de 30 à 50% au moment où l'essai est arrêté. Cette valeur peut monter jusqu'à 60% voire plus lorsque la foule est compacte.

Pour le dimensionnement, on retiendra la valeur de  $0,10\text{ m/s}^2$  par sécurité. En dessous de ce seuil, le comportement des piétons peut être qualifié d'aléatoire. On pourra alors utiliser les chargements de piétons aléatoires équivalents évoqués plus haut, ce qui conduit à des taux de synchronisation de l'ordre de 5 à 10%. Dès que ce seuil est dépassé, le taux de synchronisation peut monter à plus de 60%. L'accélération passe donc relativement brutalement de  $0,10$  à plus de  $0,60\text{ m/s}^2$ . L'accélération devient donc systématiquement inconfortable. Par conséquent, le seuil de changement de régime de  $0,10\text{ m/s}^2$  devient un seuil à ne pas dépasser.

*In the test shown on figure 1.12, there are only 160 people, still walking slowly from one end of the bridge to the other. This time the rate of synchronization reaches 50%. The accelerations are comparable to those obtained in tests 1A, 1B, and 1C.*

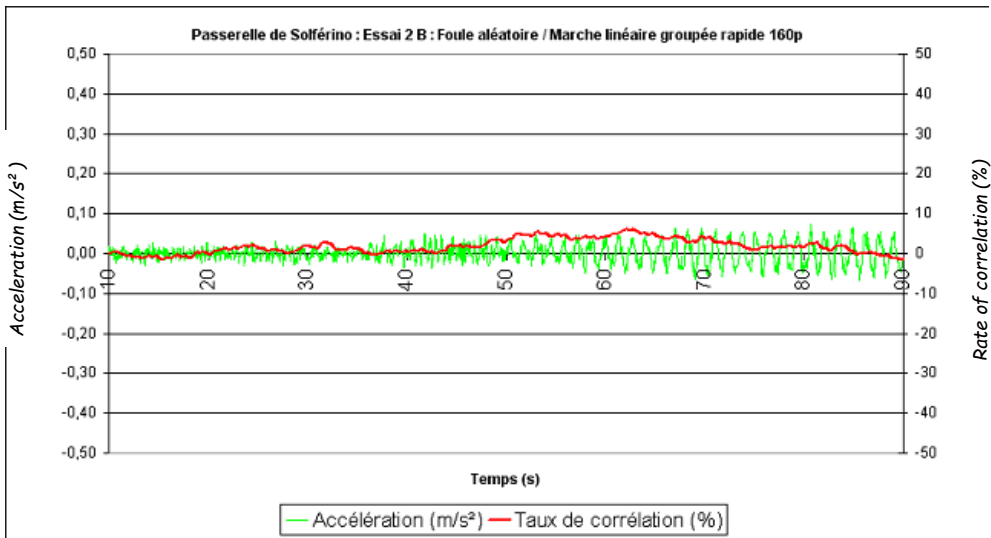


Figure 1.13: Random test 2B on Solferino bridge

The last test (figure 1.13) is identical to the previous one, except that the pedestrians are walking fast. No synchronization of pedestrians was observed, despite the fact that it was a compact crowd of 160 people. This clearly demonstrates that if the walking frequency of pedestrians is too far from the natural frequency, synchronization does not occur.

*It is seen from these tests that a change from the random regime appears to occur around 0.10-0.15 m/s<sup>2</sup>. Beyond this threshold, accelerations increase significantly but remain bounded. Rates of synchronization reached 30 to 50% when the test stopped. They can reach 60% or even more when the crowd is dense.*

*For design purposes, a value of 0.10 m/s<sup>2</sup> is adopted, incorporating a safety margin. Below this threshold, pedestrian behaviour can be considered to be random. The random equivalent-pedestrian loadings referred to above can therefore be used, resulting in rates of synchronization of around 5 to 10%. As soon as this threshold is passed, the rate of synchronization can rise to more than 60%. Acceleration thus rises abruptly from 0.10 to more than 0.60 m/s<sup>2</sup>. The acceleration therefore systematically becomes uncomfortable. The regime-change threshold of 0.10 m/s<sup>2</sup> is thus a threshold that should not be exceeded.*

#### **1.2.4.5. Conclusions sur la synchronisation forcée**

Ces différentes études proposent des conclusions qui semblent assez différentes mais qui finalement se rejoignent sur plusieurs points.

Dès que l'amplitude des mouvements devient perceptible, le comportement de la foule n'est plus aléatoire mais une forme de synchronisation se développe. Plusieurs modèles sont disponibles (force fonction de la vitesse, taux de synchronisation de la foule élevé) mais ils conduisent tous à des accélérations assez supérieures aux seuils de confort couramment admis.

Le passage du régime aléatoire sur support fixe au régime synchronisé sur support mobile se produit lorsque l'on dépasse un certain seuil, caractérisé par une accélération critique ou un nombre critique de piétons. On note que la notion de nombre critique de piétons et la notion d'accélération critique peuvent être reliées. L'accélération critique peut s'interpréter comme l'accélération produite par le nombre critique de piétons, encore aléatoires mais qui ne le sont plus après.

S'il est vrai que d'une certaine manière, les grands principes et les variations du comportement observés sur les deux passerelles se rejoignent, les différences de modélisation et différences quantitatives conduisent cependant à un dimensionnement d'amortisseurs relativement différent.

La notion d'accélération critique semble plus pertinente que celle de nombre critique de piétons. Une accélération correspond réellement à ce que ressentent les piétons alors qu'un nombre critique de piétons dépend de la manière dont sont organisés et positionnés ces piétons sur la passerelle. C'est donc ce seuil d'accélération critique que l'on retiendra dans le présent guide, la façon dont les piétons sont organisés dépendant du trafic sur la passerelle (voir ci-après)



### 1.3. Paramètres intervenant dans le dimensionnement : fréquence, seuil de confort, critère de confort...

Les problèmes constatés sur les passerelles récentes se retrouvent aussi finalement dans le phénomène bien connu de résonance qui provient d'une adéquation entre la fréquence excitatrice des pas des piétons et la fréquence propre d'un mode de la passerelle. Il apparaît alors des mouvements notables de la passerelle car amplifiés, avec pour conséquence des sensations d'inconfort ou de gêne à la marche des piétons.

Il faut donc revenir vers les paramètres structuraux, cruciaux vis-à-vis du phénomène de résonance, que sont les modes propres (formes propres et fréquences propres) et les valeurs du pourcentage d'amortissement critique structural associées à chaque mode. Une passerelle même simple, dans la réalité, possède une infinité de modes propres, de fréquences et de pourcentages d'amortissement critique qui leur sont associés (voir annexe 1). On peut cependant, dans la plupart des cas, se contenter de l'étude des quelques premiers modes.

#### 1.2.4.5. Conclusions on lock-in

*The conclusions put forward as a result of the different studies appear to be quite different, but in fact concur on several points.*

*As soon as movement becomes perceptible, crowd behaviour ceases to be random and a form of synchronization develops. Several models are available (force as a function of speed, high rate of crowd synchronization) but they all give accelerations well above the commonly accepted comfort level.*

*The change from the random regime on a stationary bridge to the synchronized regime on a moving bridge occurs when a certain threshold—characterized by a critical acceleration or by a critical number of pedestrians—is exceeded. There is reason to think that the notions of critical number of pedestrians and critical acceleration may be linked. Critical acceleration can be interpreted as the acceleration produced by the critical number of pedestrians, initially random but not subsequently.*

*While it is true that in certain respects the key principles and variations in behaviour observed on the Solferino and Millennium bridges are the same, the differences in modelling and quantitative differences nevertheless lead to relatively different damper design.*

*The notion of critical acceleration seems to be more relevant than that of the critical number of pedestrians. Acceleration corresponds to what pedestrians actually feel, whereas a critical number of pedestrians depends on how the pedestrians are organized and positioned on the bridge. It is therefore the critical acceleration that is adopted for this guide, since the way pedestrians are organized depends on traffic on the bridge (see below).*

### 1.3. Design parameters: frequency, comfort threshold, comfort level, etc.

Ultimately the problems observed with some recent footbridges are associated with the well-known phenomenon of resonance, caused by the exciting frequency of pedestrians walking coinciding with the natural frequency of a particular mode of the footbridge. Significant movement of the footbridge then occurs, for it is amplified, resulting in discomfort or disturbing the gait of pedestrians.

The structural parameters of eigenmodes (mode shapes and natural frequencies) and the structural damping ratios associated with each mode must therefore be examined, for these are crucial in terms of resonance. In reality, even a simple footbridge has an infinite number of modes, frequencies, and associated damping ratios (see appendix 1). In most cases however, it is sufficient to study just the first few modes.

En regard il faut considérer les fréquences de marche des piétons qui diffèrent d'un individu à un autre, des conditions de marche et bien d'autres facteurs. Il faut donc parler plutôt d'une gamme de fréquence que d'une seule fréquence.

Le premier moyen simple pour éviter le risque de mise en résonance peut consister à éviter d'avoir une ou plusieurs fréquences propres de la passerelle se situant dans la plage de fréquence de marche des piétons. C'est ainsi qu'apparaît la notion de plage de fréquence à risque à éviter.

#### 1.3.1. Fréquences à risque selon la littérature et les règlements actuels

La compilation des valeurs des plages de fréquence qui sont données dans divers articles ou règlements conduit au tableau 1.2, établi pour des vibrations verticales :

L'Eurocode 2 ( Ref. [4] )	1,6 Hz et 2,4 Hz et, si spécifié entre 2,5 Hz et 5 Hz.
L'Eurocode 5 ( Ref. [5] )	Entre 0 et 5 Hz
L'Annexe 2 de l'Eurocode 0	< 5 Hz
BS 5400 ( Ref. [6] )	< 5 Hz
La réglementation au Japon ( Ref. [30] )	1,5 Hz - 2,3 Hz
norme ISO/DIS 10137 ( Ref. [28] )	1,7 Hz - 2,3 Hz
Bulletin CEB 209	1,65 Hz -2,35 Hz

Bachmann ( Ref. [59] )	1,6 Hz -2,4 Hz
------------------------	----------------

Tableau 1.2

Pour les vibrations latérales, on peut considérer que les plages décrites précédemment sont à diviser par deux du fait de la particularité de la marche : le pied droit et le pied gauche sont équivalents comme action verticale, mais sont opposés comme action horizontale et font que les efforts transversaux s'appliquent à une fréquence moitié de la fréquence des pas.

Toutefois sur la passerelle du Millenium on a constaté que le phénomène de synchronisation forcée s'est produit même pour un mode horizontal à fréquence largement en dessous de la limite inférieure généralement admise jusqu'ici pour la plage de fréquence de marche normale. Il paraît donc prudent d'abaisser la borne inférieure de la plage de fréquence à risque pour les modes de vibrations horizontales.

*At the same time, pedestrian stepping frequencies—which can differ from one person to another—, walking conditions, and many other factors must be taken into account. Consequently it is a question of a range of frequencies rather than a single frequency.*

*The first, simple method of preventing the risk of resonance can consist in avoiding having one or more of the bridge's natural frequencies within the range of pedestrian stepping frequencies. From this emerges the notion of the hazardous frequency range to be avoided.*

### 1.3.1 Hazardous frequencies according to the literature and current regulations

Compilation of the frequencies in the ranges given in the various articles or regulations produces the following table 1.2, drawn up for vertical vibration:

Eurocode 2 ( Ref. [4] )	1,6 Hz, 2,4 Hz and, if specified, from 2.5 Hz to 5 Hz.
Eurocode 5 ( Ref. [5] )	Between 0 and 5 Hz
Appendix 2 to Eurocode 0	< 5 Hz
BS 5400 ( Ref. [6] )	< 5 Hz
Japanese regulations ( Ref. [30] )	1,5 Hz - 2,3 Hz
ISO/DIS standard 10137 ( Ref. [28] )	1,7 Hz - 2,3 Hz

CEB Bulletin No. 209	1,65 Hz -2,35 Hz
Bachmann ( Ref. [59] )	1,6 Hz -2,4 Hz

Table 1.2

*For lateral vibration, it can be considered that the ranges described above should be divided by two, because of the nature of walking: left and right feet are equivalent for vertical loading, but oppose each other in terms of horizontal loading and result in the lateral forces applying to a frequency of half the stepping frequency.*

*For the Millennium Bridge, however, it was observed that the phenomenon of lock-in occurred for a horizontal frequency mode well below the previously generally accepted lower limit for the normal range of stepping frequencies. It would therefore appear to be prudent to lower the bottom limit of the hazardous stepping frequency range for horizontal vibration modes.*

Bien que les plages de fréquence à risque soient assez bien connues et définies, dans la pratique des constructions il n'est pas souvent facile de pouvoir les éviter, à moins d'adopter des valeurs irréalistes de rigidité ou de masse. Et quand la résonance n'est pas évitable il faut essayer d'en limiter les mauvais effets en agissant sur le dernier paramètre disponible qui est l'amortissement structural ; bien évidemment il va falloir aussi disposer de critères permettant de fixer des seuils d'acceptabilité de cette résonance.

### 1.3.2. Seuils de confort.

Avant d'aller plus loin, il convient de préciser ce que l'on entend par la notion de confort. En effet, cette notion est fortement subjective. En particulier :

- d'un individu à l'autre, les mêmes vibrations ne sont pas ressenties de la même manière.
- pour un même individu, on peut en définir plusieurs seuils. Le premier est un seuil de perception des vibrations. Vient ensuite un second pouvant être relié à différents degrés de gêne ou d'inconfort (tolérable sur une durée courte, gênant, inadmissible). Enfin, un troisième seuil peut être fixé relativement aux conséquences que ces mêmes vibrations peuvent avoir sur la perte d'équilibre ou même sur la santé.
- de plus, suivant qu'il est debout, assis, en mouvement ou non, un même individu peut être sensible de manière différente aux vibrations.
- il est aussi bien connu qu'une différence existe entre les vibrations de la structure et les vibrations réellement ressenties par le piéton. Par exemple dans ce qui est

ressenti par le piéton intervient notamment sa durée d'exposition aux vibrations. Mais, les connaissances dans ce domaine sont toujours imprécises et insuffisantes.

Il est donc clair que la fixation de seuils vis-à-vis du confort ressenti par le piéton pour être utilisé dans le dimensionnement des passerelles, aussi souhaitable qu'elle soit, reste une entreprise difficile. En effet, si un plafond de  $1\text{m/s}^2$  pour l'accélération verticale a été donné par Matsumoto et al, (Ref. [16]) d'autres comme Wheeler d'un côté et Tilly et al de l'autre, se contredisent avec des valeurs soit plus faibles ou soit plus fortes (Ref. [18] et Ref. [20]). De plus à ce jour peu de suggestions existent pour les mouvements transversaux.

Aussi pour la pratique des projets il faut considérer les valeurs recommandées comme des ordres de grandeur et il est plus commode de se baser sur ce qui peut être facilement calculable ou mesurable ; c'est ainsi qu'on assimile les seuils ressentis par les piétons aux grandeurs générées par les passerelles et c'est généralement la valeur de l'accélération de pointe qui est retenue, appelée accélération critique  $a_{\text{crit}}$  de la structure qu'il convient de ne pas dépasser, pour traduire le critère de confort à respecter. Il faut bien évidemment définir des cas de charge appropriés à appliquer à la structure pour la détermination de cette accélération. Cette vérification est considérée comme étant une vérification d'un état limite de service.

*Although the ranges of hazardous frequencies are quite well known and defined, in building practice it is not often easy to avoid them, other than by adopting unrealistic stiffnesses or masses. And when resonance is not avoidable, everything must be done in an attempt to limit its undesirable effects by acting on the last available parameter, i.e. structural damping; of course it will also be necessary to have criteria for determining the limits of acceptability for resonance.*

### 1.3.2. Comfort thresholds

*Before going any further, it is necessary to understand what exactly is mean by 'comfort', for it is a highly subjective concept. In particular:*

- *different people do not feel the same vibrations the same way;*
- *for a given person, there may be several comfort thresholds. The first is the vibration perception threshold. The second can be linked to different degrees of disturbance or discomfort (bearable for a short period, disturbing, unacceptable). The third and last threshold can be set in terms of the consequences these vibrations can have on loss of balance and even on well-being.*
- *in addition, depending on whether he is standing, sitting, moving or stationary, the same person can feel the same vibrations in different ways;*
- *it is well known that there is a difference between structural vibrations and the vibrations actually felt by a pedestrian. For example, what is felt by the*

*pedestrian is largely governed by the duration of exposure to vibration. Knowledge in this field is insufficient and imprecise, however.*

*It is therefore clear that however desirable it might be, determining pedestrian comfort thresholds for use in footbridge design is a challenging task. For example, while a ceiling of 1 m/s<sup>2</sup> for vertical acceleration is given by Matsumoto et al. (Ref. [16]), others such as Wheeler on one hand and Tilly et al. on the other contradict each other with either lower or higher values (Ref. [18] and Ref. [20]). In addition, to date there have been few proposals for lateral movements.*

*For practical design, therefore, the recommended values must be regarded as mere orders of magnitude, and in addition it is recommended that work be based on what can be easily calculated or measured; to reflect the comfort criterion to be met, the thresholds felt by pedestrians are thus assimilated to the quantities generated by footbridges, and what is generally used is the peak acceleration, also known as the critical acceleration  $a_{crit}$  of the structure that must not be exceeded. Quite naturally appropriate load cases must be defined and applied to the structure when determining this acceleration. This check is considered to be a serviceability limit state verification.*

### 1.3.3. Critères de confort en accélération selon la littérature et les règlements

La littérature et divers règlements proposent différentes valeurs de cette accélération critique que l'on notera  $a_{crit}$ . Ces valeurs sont données pour l'accélération verticale et rassemblées dans la figure 1.14 suivante :

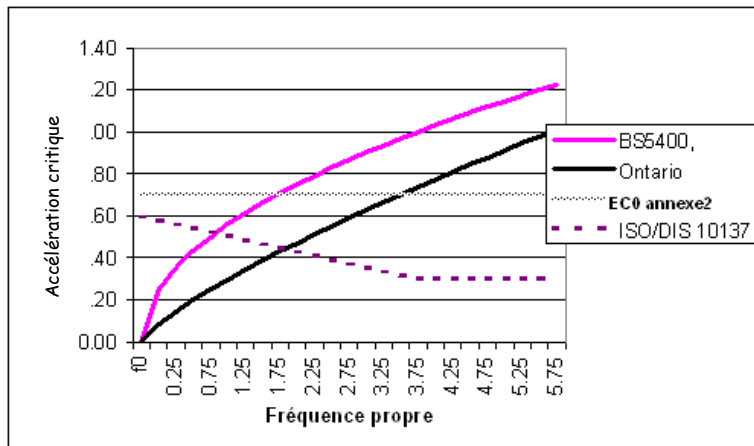


Figure 1.14 : Accélérations (en m/s<sup>2</sup>) critiques **verticales** en fonction de la fréquence propre pour différents règlements : certaines dépendent de la fréquence de la structure, d'autres non.

Pour les vibrations verticales de fréquence autour de 2 Hz, valeur de la fréquence usuelle de la marche, il semble qu'un consensus se dégage pour une plage de 0,5 à 0,8 m/s<sup>2</sup>. Il faut rappeler que ces valeurs sont principalement associées à l'action théorique d'un seul piéton.

Pour les vibrations latérales de fréquence autour de 1 Hz, l'Eurocode 0 Annexe 2 propose une accélération critique horizontale de 0,2 m/s<sup>2</sup> en utilisation normale et 0,4 m/s<sup>2</sup> pour des conditions exceptionnelles de foule. Malheureusement les chargements de foule qui devraient leur être associés sont absents du texte.

Il est aussi utile de rappeler que, comme les accélérations, les vitesses et les déplacements sont liés, un seuil en accélération peut se traduire en seuil de déplacement (ce qui est le plus parlant pour un projeteur) ou aussi de vitesse.

- Accélération =  $(2\pi \text{fréquence})^2$  déplacement
- Accélération =  $(2\pi \text{fréquence})$  vitesse

Par exemple,

pour une fréquence de 2 Hz :

0,5m/s<sup>2</sup> d'accélération correspond à un déplacement de 3,2mm, une vitesse de 0,04m/s

1m/s<sup>2</sup> d'accélération correspond à un déplacement de 6,3 mm, une vitesse de 0,08 m/s

### 1.3.3. Acceleration comfort criteria according to the literature and regulations

The literature and regulations propose different values for critical acceleration,  $a_{crit}$ . They are given for vertical acceleration and are presented in figure 1.14 below:

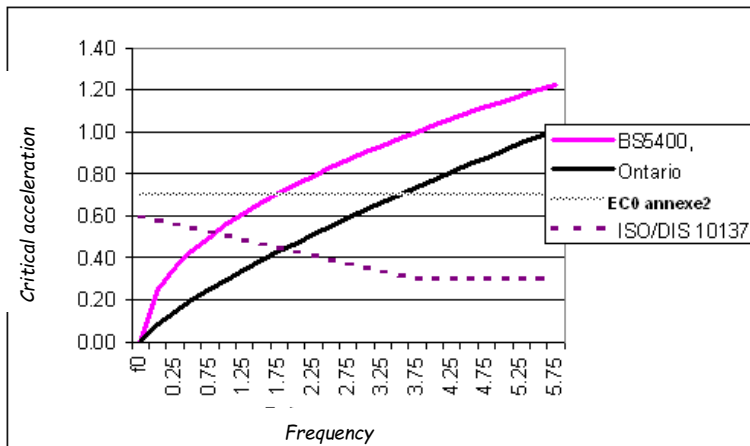


Figure 1.14: Critical vertical acceleration (in m/s<sup>2</sup>) versus natural frequency for different regulations: some depend on the frequency of the structure, others not.

For vertical vibrations in the 2 Hz frequency range (the usual stepping frequency), it seems that there is general agreement on an acceleration range from 0.5 to 0.8 m/s<sup>2</sup>. It

*should be remembered that these values are chiefly associated with the theoretical action of a single pedestrian.*

*For lateral vibrations at a frequency of around 1 Hz, Eurocode 0 Appendix 2 proposes a horizontal critical acceleration of 0.2 m/s<sup>2</sup> for normal conditions and 0.4 m/s<sup>2</sup> for exceptional crowd conditions. Unfortunately the text does not mention the crowd loadings that should be associated with these values.*

*It should also be mentioned that accelerations, speeds and displacements are correlated: an acceleration threshold can be converted into a displacement threshold (which means more to a designer) or into a velocity.*

- Acceleration =  $(2\pi \text{frequency})^2$  displacement
- Acceleration =  $(2\pi \text{frequency})$  velocity

*For example:*

*for a frequency of 2 Hz:*

*acceleration of 0.5m/s<sup>2</sup> corresponds to a displacement of 3.2 mm and a velocity of 0.04 m/s, and*

*acceleration of 1m/s<sup>2</sup> corresponds to a displacement of 6.3 mm and a velocity of 0.08 m/s;*

*mais pour une fréquence de 1 Hz :*

*0,5m/s<sup>2</sup> d'accélération correspond à un déplacement de 12,7mm, une vitesse de 0,08m/s*

*1m/s<sup>2</sup> d'accélération correspond à un déplacement de 25,3mm, une vitesse de 0,16 m/s*

#### **1.4. Amélioration du comportement dynamique**

Lorsque les accélérations d'une passerelle ne respectent pas les critères de confort, que faire ?

Il faut distinguer le cas d'une passerelle en projet et le cas d'une passerelle existante.

Dans le cas d'une passerelle en projet, on tentera d'abord de modifier ses fréquences propres de vibrations. S'il apparaît impossible de les modifier de telle façon qu'elles se situent hors des gammes à risque de mise en résonance vis-à-vis de l'excitation par les piétons, on essaiera d'augmenter l'amortissement structural.

Dans le cas d'une passerelle existante, on peut également tenter de modifier ses fréquences propres de vibrations. Cependant, l'expérience montre qu'il est en général plus économique d'augmenter l'amortissement.

##### **1.4.1. Modification des fréquences propres de vibrations**

Une fréquence propre de vibration est toujours proportionnelle à la racine carrée de la raideur, et inversement proportionnelle à la racine carrée de la masse. On recherche en général à augmenter les fréquences de vibrations. Il faut donc augmenter la raideur de la structure. Mais on s'aperçoit en réalité que cette augmentation de raideur s'accompagne



souvent d'une augmentation de la masse, ce qui donne un résultat inverse et que la solution n'est donc pas toujours évidente.

## 1.4.2. Augmentation de l'amortissement structural

### 1.4.2.1. Amortissement structural naturel des ouvrages

Le pourcentage d'amortissement critique n'est pas une donnée intrinsèque d'un matériau. La plupart des résultats expérimentaux suggèrent que les forces de dissipation sont presque indépendantes de la fréquence mais dépendantes de l'amplitude du mouvement. Le pourcentage d'amortissement critique augmente aussi lorsque l'amplitude des vibrations augmente. Il dépend également des détails constructifs qui peuvent dissiper plus ou moins d'énergie (différence entre boulonnage ou soudage par exemple pour le matériau acier).

Il faut noter aussi que si les masses et les rigidités des divers éléments de structure peuvent être modélisées avec un degré de précision raisonnable, les propriétés d'amortissement sont par contre beaucoup plus difficiles à caractériser. Des coefficients d'amortissement critique compris entre 0,1% et 2,0% sont généralement utilisés dans les études et il est prudent ne pas surestimer l'amortissement structural afin d'éviter des sous-dimensionnements.

Le bulletin d'information N°209 du CEB (Réf. [7] ), ouvrage important de synthèse traitant du problème général de vibrations des structures indique les valeurs suivantes (tableau 1.3) pouvant être utilisées pour les projets :

*but for a frequency of 1 Hz:*

*acceleration of  $0.5\text{m/s}^2$  corresponds to a displacement of 12.7 mm, and a velocity of 0.08 m/s, and*

*acceleration of  $1\text{m/s}^2$  corresponds to a displacement of 25.3 mm and a velocity of 0.16 m/s.*

## 1.4. Improvement of dynamic behaviour

*What can be done when the accelerations of a footbridge do not meet the comfort criteria?*

*A distinction must be made between a bridge at the design stage and an existing bridge.*

*In the case of a bridge at the design phase, the first thing to do is to attempt to change its vibration frequencies. If it is impossible to modify them so that they are outside the range implying a risk of resonance with pedestrian-induced excitation, an attempt can be made to increase structural damping.*

*In the case of an existing footbridge, it can also be attempted to modify its vibration frequencies, but experience shows that it is generally more economical to increase damping.*

### 1.4.1. Modification of vibration frequencies

*A vibration frequency is always proportional to the square root of stiffness and inversely proportional to the square root of mass. In general it is attempted to increase the vibration frequencies. The stiffness of the structure must therefore be increased. But it is observed in*

reality that this increase in stiffness is often accompanied by an increase in mass, which produces the opposite of the result required, so the solution is not always simple.

#### 1.4.2. Increasing structural damping

##### 1.4.2.1. Natural structural damping

The damping ratio is not an intrinsic quality of a material. The results of most experiments suggest that dissipation forces are almost independent of frequency but dependent on the amplitude of movement. The damping ratio thus increases as the amplitude of vibrations increases. It also depends on construction detailing, which can to a greater or lesser extent dissipate energy (difference between bolted or welded connections, for instance, in the case of steel construction).

It should also be noted that while the masses and stiffnesses of different structural components can be modelled reasonably accurately, the properties of damping, on the other hand, are much more difficult to determine. Damping ratios between 0.1% and 2.0% are generally used in design studies, and it is wise not to overestimate structural damping in order to avoid underengineering.

CEB bulletin No. 209 (Ref. [7] ), an important overview document addressing the general problem of vibration in structures, gives the following values (table 1.3) for different kinds of bridges:

Type de tablier	Pourcentage d'amortissement critique	
	Valeur minimum	Valeur moyenne
Béton armé	0,8%	1,3%
Béton précontraint	0,5%	1,0%
Métallique	0,2%	0,4%
Mixte	0,3%	0,6%
Bois	1,5%	3,0%

Tableau 1.3

Pour le bois, on pourra noter que l'Eurocode 5 recommande plutôt des valeurs de 1% ou 1,5% suivant la présence de joints mécaniques ou non.

Lorsque les amplitudes de vibrations sont grandes, comme dans le cas des séismes, les pourcentages d'amortissement critique sont nettement plus élevés et sont réservés aux vérifications aux ELU. Le Guide AFPS 92 sur la protection parasismique des ponts indique par exemple (art. 4.2.3) :

Matériau	Pourcentage d'amortissement critique
Acier soudé	2%

Acier boulonné	4%
Béton précontraint	2%
Béton non armé	3%
Béton armé	5%
Elastomère fretté	7%

Tableau 1.4

Il faut signaler enfin qu'une estimation de l'amortissement structural réel ne peut être faite que par mesures sur ouvrage réalisé. Ceci étant, un amortissement accru peut être obtenu au départ de l'étude d'un projet, par exemple par l'emploi d'un garde-corps en grillage ou dans le cas de passerelles en membrane tendue (« stress ribbon »), par l'insertion de plaques d'élastomère disposées entre les dalles de béton préfabriquées constituant le tablier.

1.4.2.2. *Mise en œuvre d'amortisseurs*

L'utilisation d'amortisseurs est un autre choix efficace pour réduire les vibrations. L'Annexe 3 décrit les différents types d'amortisseurs utilisables et détaille pour certains leur principe de fonctionnement comme de dimensionnement. Il est certain que c'est une solution éprouvée comme le montre le tableau d'exemples ci-après (tableau 1.5) :

Type of deck	Damping ratio	
	Minimum	Mean
Reinforced concrete	0.8%	1.3%
Prestressed concrete	0.5%	1.0%
Steel	0.2%	0.4%
Composite	0.3%	0.6%
Timber	1.5%	3.0%

Table 1.3

*With respect to timber construction, note that Eurocode 5 recommends values of 1% or 1.5%, depending on whether or not there are mechanical joints.*

*When the amplitude of vibration is large, as in the event of earthquakes, damping ratios are much higher, and are used only for ULS verifications. French document "Guide AFPS 92" on seismic protection of bridges proposes the following, for example (art. 4.2.3):*

<b>Material</b>	<b>Damping ratio</b>
<i>Welded steel</i>	2%
<i>Bolted steel</i>	4%
<i>Prestressed concrete</i>	2%
<i>Unreinforced concrete</i>	3%
<i>Reinforced concrete</i>	5%
<i>Laminated elastomer</i>	7%

Table 1.4

It should also be mentioned that actual structural damping can be estimated only by taking measurements on the completed structure. Nevertheless, increased damping can be obtained from the start of the design phase by incorporating a mesh safety railing, for instance, or, in the case of stress-ribbon footbridges, by inserting elastomeric strips between the precast concrete slabs of the deck.

#### 1.4.2.2. Installing dampers

Using dampers is another effective means of reducing vibrations. Appendix 3 describes the different kinds of dampers that can be used and, for some, gives details on design and how they work. It is definitely a tried and tested solution, as can be seen from the table 1.5 below.

Pays	Nom	Masse (kg)	Masse effective totale (%)	Pourcentage d'amortissement critique de l'amortisseur	Pourcentage d'amortissement critique de la structure sans amortisseur	Pourcentage d'amortissement critique de la structure avec amortisseur	Fréquence de la structure (Hz)
France	Passerelle du Stade de France (Saint-Denis)	2400 par travée	1,6	0,075	0,2% à 0,3%	4,3% à 5,3%	1,95 (vertical)
France	Passerelle Solférino (Paris)	15000	4,7		0,4%	3,5%	0,812 (horizontal)
Idem	Idem	10000	2,6		0,5%	3%	1,94 (vertical)
Idem	Idem	7600	2,6		0,5%	2%	2,22

							(vertical)
Angleterre	Passerelle du Millenium (Londres)	2500			0,6% à 0,8%	2%	0,49 (horizontal)
Idem	Idem	1000 à 2500			0,6% à 0,8%		0,5 (vertical)
Japon			1		0,2%	2,2%	1,8 (vertical)
USA	Las Vegas (Bellagio-Bally)				0,5%	8%	
Corée du Sud	Passerelle de Seonyu				0,6%	3,6%	0,75 (horizontal)
Idem	Idem				0,4%	3,4%	2,03 (vertical)

Tableau 1.5 : Exemples d'utilisation d'amortisseurs dynamiques accordés

Note : Pour la passerelle du Millenium, des amortisseurs visqueux ont été également mis en place en plus des ADA pour amortir le mouvement horizontal.

Country	Name	Mass (kg)	Total effective mass (%)	Damping ratio	Damping ratio of the structure without dampers	Damping ratio of the structure with dampers	Frequency of the structure (Hz)
France	Stade de France footbridge (Saint-Denis)	2400 per span	1,6	0,075	0,2% à 0,3%	4,3% à 5,3%	1,95 (vertical)
France	Solférino footbridge (Paris)	15000	4,7		0,4%	3,5%	0,812 (horizontal)
		10000	2,6		0,5%	3%	1,94 (vertical)
		7600	2,6		0,5%	2%	2,22 (vertical)

UK	Millenium bridge (London)	2500			0,6% to 0,8%	2%	0,49 (horizontal)
		1000 to 2500			0,6% to 0,8%		0,5 (vertical)
Japan			1		0,2%	2,2%	1,8 (vertical)
USA	Las Vegas (Bellagio-Bally)				0,5%	8%	
South Korea	Seonyu footbridge				0,6%	3,6%	0,75 (horizontal)
					0,4%	3,4%	2,03 (vertical)

Table 1.5: Examples of tuned mass dampers installed on bridges

NB: The Millennium Bridge also used viscous dampers to dampen horizontal movement, in addition to the tuned mass dampers (TMD).

## 2. MÉTHODOLOGIE D'ANALYSE DYNAMIQUE DES PASSERELLES

Ce chapitre propose, à l'intention des maîtres d'ouvrage, maîtres d'œuvre et concepteurs, une méthodologie et des recommandations pour la prise en compte des effets dynamiques dus au trafic piétonnier sur les passerelles.

Les recommandations qui sont formulées, résultent d'une part de l'état des lieux décrit dans les annexes 1 à 4 et d'autre part des travaux du groupe Sétra-AFGC qui a établi ce guide. Elles traduisent donc à la fois une synthèse des connaissances existantes et les choix effectués par ce groupe.

La méthodologie proposée doit permettre de limiter les risques de mise en résonance de la structure sous les pas des piétons. Il est toutefois important de rappeler que, même sans être mises en résonance, les passerelles très légères peuvent connaître des phénomènes vibratoires.

À la source de la démarche prévue, le maître d'ouvrage doit définir la classe de la passerelle en fonction du niveau de trafic qu'elle est appelée à supporter ainsi qu'un niveau d'exigence de confort à respecter.

La classe de la passerelle implique ou non l'obligation de déterminer les fréquences propres de la structure. Lorsqu'elles sont calculées, ces fréquences propres conduisent à retenir ou non, en fonction des plages de valeurs dans lesquelles elles se situent, un ou plusieurs cas de charges dynamiques, définis pour représenter les différents effets possibles du trafic piétonnier. Le traitement de ces cas de charge donne accès aux valeurs d'accélération subies par la structure. La gamme dans laquelle se situent ces valeurs, permet de qualifier le niveau de confort obtenu.

Le principe de la méthodologie proposée est résumé par l'organigramme ci-après (figure 2.1).

## **2. METHODOLOGY FOR DYNAMIC ANALYSIS OF FOOTBRIDGES**

*Addressing bridge owners, engineers, and designers, this chapter puts forward a methodology and recommendations for taking account of dynamic effects induced by pedestrian traffic on footbridges.*

*The recommendations are based in part on the state-of-the-art review in appendices 1 to 4 and partly on the work of the Sétra-AFGC workgroup which drew up this guide. They therefore reflect both an overview of existing knowledge and the choices made by the group.*

*The methodology proposed should make it possible to limit the risk of setting up resonance in the structure as a result of use by pedestrians. However, it is important to remember that even if resonance does not occur, very lightweight footbridges can be subject to vibratory phenomena.*

At the start of the procedure for creating a footbridge, the project owner must define the category of bridge in accordance with the level of traffic it is intended to support and the comfort level to be attained.

The category of footbridge may or may not imply a requirement to determine the natural frequencies of the structure. When they are calculated, depending on the ranges in which they lie, these frequencies may or may not result in the adoption of one or more dynamic load cases representing the different possible effects of pedestrian traffic. Processing these load cases gives the accelerations to which the structure is subject. The range in which these values lie serves to qualify the level of comfort obtained.

The principle of the methodology is summed up in the following flow chart (figure 2.1).

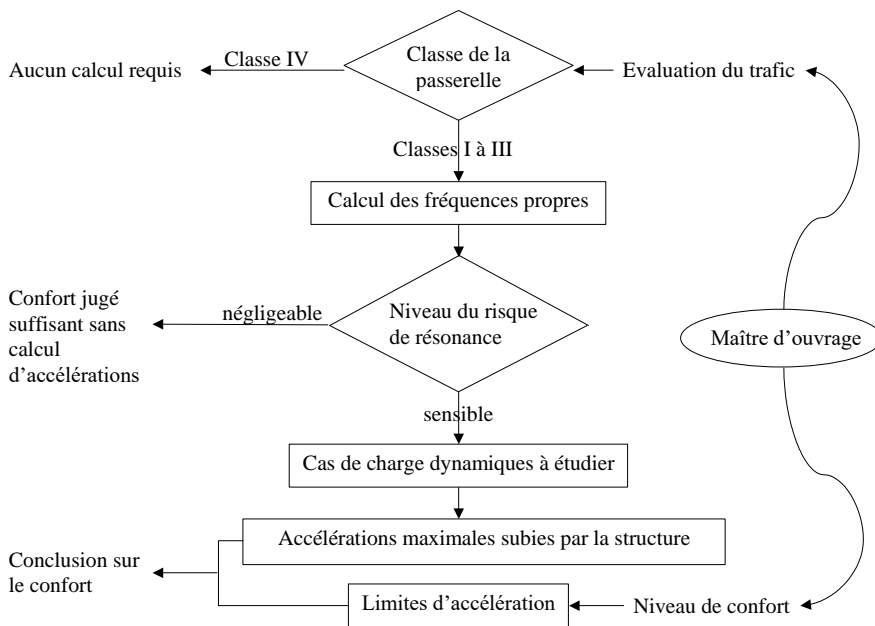


Figure 2.1 : Organigramme de la méthodologie

Le chapitre présente aussi les vérifications spécifiques à mener aux ELS et aux ELU pour prendre en compte le comportement dynamique des passerelles dû au chargement piéton (chapitre 2.6). Il est bien sûr entendu que toutes les vérifications classiques aux ELS et aux ELU doivent être menées conformément aux textes en vigueur et ne font pas l'objet du présent guide.



### 2.1. Etape 1 : Détermination de la classe de la passerelle

La classe de la passerelle permet de situer le niveau de trafic qu'elle supporte :

**Classe IV** : passerelle très peu utilisée, construite pour relier des zones très faiblement peuplées ou pour assurer la continuité du cheminement piétonnier dans des zones coupées par une autoroute ou une voie rapide.

**Classe III** : passerelle normalement utilisée, pouvant parfois être traversée par des groupes importants mais sans jamais être chargée sur toute sa surface.

**Classe II** : passerelle urbaine reliant des zones peuplées, soumise à un trafic important et pouvant être parfois chargée sur toute sa surface.

**Classe I** : passerelle urbaine reliant des zones à forte concentration piétonnière (présence d'une gare ou d'une station de métro à proximité, par exemple) ou fréquemment empruntée par des foules denses (manifestations, touristes ...), soumise à un trafic très important.

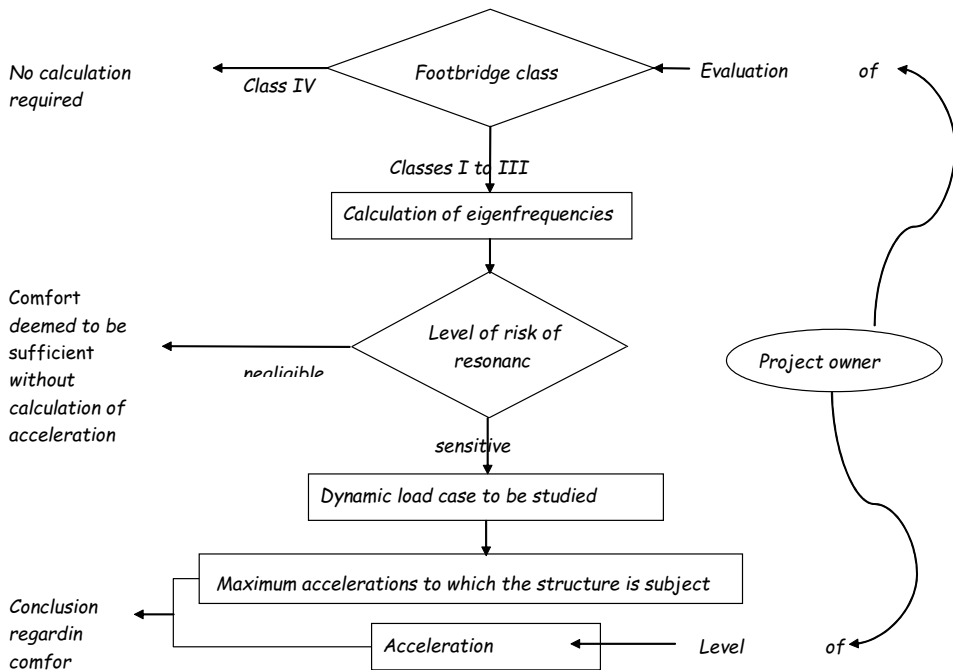


Figure 2.1: Methodology flow chart

This chapter also presents the specific SLS and ULS verifications to be carried out to take account of the dynamic behaviour of footbridges due to pedestrian loading (chapter 2.6). It is

*understood, of course, that all the conventional SLS and ULS verifications must be carried out in accordance with applicable regulations, etc., and they are not addressed in this guide.*

### 2.1. Step 1: Determination of footbridge category

*The category of the footbridge determines the level of traffic to which it is subject:*

- **Class IV:** *bridge very little used, built to connect two slightly populated areas or to provide pedestrian continuity in areas severed by a motorway, an expressway, etc.*
- **Class III:** *footbridge with normal use, which may sometimes be crossed by large groups of people, but which is never loaded over its entire surface.*
- **Class II:** *urban footbridge connecting populated areas, subject to considerable traffic and sometimes loaded over its entire surface.*
- **Class I:** *urban footbridge connecting areas with high concentrations of pedestrian traffic (train or metro station nearby, for example) or frequently used by dense crowds (protest marches, tourists, etc.), subject to dense traffic.*

Il appartient au maître d'ouvrage de fixer la classe de la passerelle en fonction des indications données ci-dessus et en tenant compte des évolutions possibles du trafic dans le temps.

Son choix peut également être influencé par d'autres critères qu'il décide de prendre en compte. Par exemple, un sur-classement pourra être retenu pour augmenter le niveau de prévention des vibrations, face à des enjeux médiatiques forts. Au contraire, un sous-classement sera accepté afin de limiter les coûts de construction ou afin de permettre une plus grande liberté de conception architecturale, étant entendu que le risque lié à un sous-classement se limite à la possibilité que parfois, lorsque l'ouvrage est soumis à un chargement dépassant en trafic et en intensité les valeurs courantes, certaines personnes puissent éprouver un sentiment d'inconfort.

Les passerelles placées en classe IV sont considérées ne nécessiter aucun calcul de vérification du comportement dynamique. Pour les passerelles très légères, il paraît prudent de retenir au moins la classe III, afin qu'un minimum de contrôle du risque soit effectué. En effet, une passerelle très légère peut présenter de fortes accélérations sans qu'il y ait nécessairement résonance.

### 2.2. Etape 2 : Choix du niveau de confort par le maître d'ouvrage

#### 2.2.1. Définition des niveaux de confort

Le Maître d'ouvrage fixe le niveau de confort à donner à la passerelle.

**Confort maximum:** les accélérations subies par la structure sont pratiquement imperceptibles par les usagers.

**Confort moyen** : les accélérations subies par la structure sont simplement perceptibles par les usagers.

**Confort minimum** : dans des configurations de chargement peu fréquentes, les accélérations subies par la structure sont ressenties par les usagers, sans pour autant devenir intolérables.

Il convient de noter que les indications ci-dessus ne peuvent constituer des critères absolus : la notion de confort est fortement subjective et une même accélération est ressentie différemment suivant les personnes. Par ailleurs, on ne couvre pas ici le confort dans les locaux à occupation permanente ou prolongée que certaines passerelles peuvent supporter, en plus de leur fonction piétonnière.

Le choix d'un niveau de confort doit normalement être influencé par la population utilisant la passerelle et par l'importance de celle-ci. On peut être plus exigeant pour des utilisateurs plus sensibles (écoliers, personnes âgées ou handicapées), plus tolérant pour des passerelles de faible longueur (durées courtes de transit).

Dans les cas où le risque de mise en résonance est évalué comme négligeable à l'issue du calcul des fréquences propres de la structure, le confort est directement considéré comme suffisant.

*It is the responsibility of the project owner to set the bridge category in accordance with the above information, and taking account of the possibly evolution of pedestrian traffic.*

*The choice may also be influenced by other criteria the project owner may apply. For instance, it may be decided to take the next class up to increase the level of vibration prevention as a result of strong media pressures. On the contrary, it may be decided to take the next class down in order to reduce the construction cost or to give greater freedom for architectural design, bearing in mind the fact that the risk associated with under-classification is limited to the possibility that sometimes, when the traffic and load values on the bridge are higher than the standard levels, some users may feel some discomfort.*

*It is considered that footbridges of class IV do not require calculation to check their dynamic behaviour. For very lightweight footbridges, it is considered to be wise to adopt at least class III in order to have a modicum of verification of the level of risk, for a very lightweight footbridge might have strong acceleration without necessarily being subject to resonance.*

## 2.2 Step 2: Project owner's choice of comfort level

### 2.2.1 Definition of comfort levels

The project owner specifies the level of comfort to be achieved for the bridge.

**Maximum comfort:** the acceleration to which the structure is subject is practically imperceptible for users.

**Mean comfort:** the acceleration to which the structure is subject is merely perceptible for users.

**Minimum comfort:** for uncommon loading configurations, the acceleration to which the structure is subject is felt by users but does not become unbearable.

It should be noted that the above descriptions are not absolute criteria: the notion of comfort is highly subjective, and the same acceleration will be felt differently by different people. In addition, this guide does not address comfort in locations occupied permanently or for extended periods that may be found on some footbridges, in addition to the pedestrian function of the bridge.

The choice of a level of comfort should normally be influenced by the population that will use the footbridge, and by the size of that population. A higher level may be required for more sensitive users (primary school pupils, the elderly, or the handicapped), and a lower level for short footbridges (shorter transit time).

If the risk of resonance is judged to be negligible after calculation of the natural frequencies of the structure, the level of comfort is automatically considered to be sufficient.

### 2.2.2. Plages d'accélération associées aux niveaux de confort

Le niveau de confort atteint est évalué par référence à l'accélération subie par la structure, déterminée par calculs, sous différents cas de charge dynamiques. Il ne s'agit donc pas directement de l'accélération ressentie par les usagers de l'ouvrage.

Compte tenu du caractère subjectif de la notion de confort, il a été jugé préférable de raisonner en plages plutôt qu'en seuils. Les tableaux 2.1 et 2.2 définissent, respectivement pour les accélérations verticales et pour les accélérations horizontales, 4 plages de valeurs désignées 1, 2, 3 et 4. Les 3 premières correspondent, dans l'ordre croissant, aux niveaux de confort maximal, moyen et minimal, décrits au paragraphe précédent. La plage 4 correspond à des niveaux d'accélération inconfortables qui ne peuvent pas être acceptés.

Accélération	0	0,5	1	2,5
Plage 1	Max			
Plage 2		Moyen		
Plage 3			Min	
Plage 4				

Tableau 2.1 : Plages d'accélération (en  $m/s^2$ ) pour les vibrations verticales

Accélération	0	0,10	0,15	0,3	0,8
Plage 1	Max				
Plage 2		Moyen			
Plage 3			Min		
Plage 4					

Tableau 2.2 : Plages d'accélération (en  $m/s^2$ ) pour les vibrations horizontales  
 L'accélération est limitée dans tous les cas à  $0.10 m/s^2$   
 pour éviter la synchronisation forcée

**2.3. Etape 3 : Détermination des fréquences et de la nécessité de mener ou non un calcul avec cas de charge dynamiques.**

Pour les passerelles de classes I à III, il est nécessaire de déterminer les fréquences propres de vibration de la structure. Ces fréquences concernent les vibrations dans les 3 directions : verticale, horizontale transversale et horizontale longitudinale. Elles sont déterminées pour 2 hypothèses de masses : passerelle vide et passerelle chargée sur toute sa surface, à raison d'un piéton de 700 newtons par mètre carré ( $70 kg/m^2$ ).

**2.2.2 Ranges of acceleration associated with comfort levels**

The level of comfort attained is assessed in reference to the acceleration to which the structure is subject, determined in turn by calculations for different load cases. It is therefore not just the acceleration felt by users of the footbridge.

Given the subjective nature of the notion of comfort, it is considered preferable to talk in terms of ranges rather than thresholds. Tables 2.1 and 2.2 define 4 ranges of values—1, 2, 3 and 4—for vertical and horizontal accelerations respectively. The first three are the maximum, mean, and minimum comfort levels described above (§ 2.2.1), in that order. Range No. 4 corresponds to levels of uncomfortable acceleration that cannot be accepted.

Acceleration	0	0,5	1	2,5
Plage 1	Max			
Plage 2		Mean		
Plage 3			Min	
Plage 4				

Table 2.1: Ranges of acceleration (in  $m/s^2$ ) for vertical vibration

Acceleration	0	0,10	0,15	0,3	0,8
Plage 1	Max				
Plage 2		Mean			
Plage 3			Min		
Plage 4					

Table 2.2: Ranges of acceleration (in  $m/s^2$ ) for horizontal vibration

In any case, acceleration is limited to  $0.10 m/s^2$  to avoid forced synchronization

### 2.3 Step 3: Determination of frequencies and of the need to carry out calculations with dynamic load cases

For footbridges of categories I to III the vibration frequencies of the structure must be determined. These frequencies concern vibrations in three directions: vertical, lateral horizontal, and longitudinal horizontal. They are determined for 2 mass assumptions: bridge empty and bridge loaded over the entire surface with one 700 newtons pedestrian per square metre ( $70 kg/m^2$ ).

Les plages dans lesquelles se situent ces fréquences permettent d'évaluer le risque de mise en résonance par le trafic piétonnier et d'arrêter, en fonction de ce risque, les cas de charge dynamiques à étudier pour vérifier les critères de confort.

#### 2.3.1. Classification des plages de fréquence

On distingue, dans la direction verticale comme dans les directions horizontales, 4 plages de fréquences, correspondant à un risque décroissant de mise en résonance :

**Plage 1** : risque maximal de mise en résonance.

**Plage 2** : risque moyen de mise en résonance.

**Plage 3** : risque faible de mise en résonance pour les situations courantes de chargement.

**Plage 4** : risque négligeable de mise en résonance.

Le tableau 2.3 définit les plages de fréquences pour les vibrations verticales et pour les vibrations horizontales longitudinales. Le tableau 2.4 concerne les vibrations horizontales transversales.

Fréquence	0	1	1,7	2,1	2,6	5
Plage 1						
Plage 2						
Plage 3						
Plage 4						

Tableau 2.3 : Plages de fréquences (Hz) des vibrations verticales et longitudinales

Fréquence	0	0,3	0,5	1,1	1,3	2,5
Plage 1						
Plage 2						
Plage 3						
Plage 4						

Tableau 2.4 : Plages de fréquences (Hz) des vibrations horizontales transversales

The ranges within which these frequencies lie are used to assess the risk of resonance being set up by pedestrian traffic and, depending on this risk, to specify the dynamic load cases to be studied to verify the comfort criteria.

### 2.3.1 Classification of frequency ranges

Four frequency ranges corresponding to decreasing risk of induced resonance are determined for each of the three directions (vertical, longitudinal, and lateral):

**Range 1:** maximum risk of resonance.

**Range 2:** medium risk of resonance.

**Range 3:** low risk of resonance for standard load cases.

**Range 4:** negligible risk of resonance.

Table 2.3 defines the frequency ranges for vertical and longitudinal horizontal vibration.  
 Table 2.4 defines the frequency ranges for lateral horizontal vibration.

Frequency	0	1	1,7	2,1	2,6	5
Range 1						
Range 2						
Range 3						
Range 4						

Table 2.3: Frequency ranges (Hz) for vertical and longitudinal vibration

Frequency	0	0,3	0,5	1,1	1,3	2,5
Range 1						
Range 2						
Range 3						
Range 4						

Table 2.4: Frequency ranges (Hz) for lateral vibration

### 2.3.2. Définition des calculs dynamiques à mener

Suivant la classe de la passerelle et les plages dans lesquelles se situent ses fréquences propres, il y a lieu d'effectuer un calcul dynamique de la structure, pour tout ou partie d'un ensemble de 3 cas de charge :

Cas 1 : foule peu dense et dense

Cas 2 : foule très dense

Cas 3 : complément pour une foule répartie de piétons (effet de la 2<sup>o</sup> harmonique)

Le tableau 2.5 définit précisément les calculs à mener dans chaque cas.

		Cas de charge à retenir pour le contrôle des accélérations		
		Plage où se situe la fréquence propre		
Trafic	Classe	1	2	3



Peu dense	III	1	néant	néant
Dense	II		1	3
très dense	I	2	2	3

cas 1 : foule peu dense et dense  
cas 2 : foule très dense

cas 3 : complément foule (2<sup>ème</sup> harmonique)

Tableau 2.5 : Vérifications - Cas de charge à considérer

### 2.4. Etape 4 si nécessaire : calcul avec cas de charge dynamiques.

Lorsque l'étape précédente conclut à la nécessité de mener des calculs dynamiques, ceux-ci doivent permettre :

- la vérification en service, sous les cas de charge dynamiques définis ci-après, des critères de confort du paragraphe 2.2 correspondant au niveau requis par le Maître d'Ouvrage,
- les vérifications classiques de types E.L.S. et E.L.U. en incluant les cas de charge dynamiques.

#### 2.4.1. Cas de charge dynamiques

Les cas de charge définis ci-après ont été élaborés pour représenter, de manière simplifiée et pratiquement utilisable, les effets des piétons en plus ou moins grand nombre sur la passerelle. Ils sont construits pour chaque mode propre dont la fréquence a été repérée dans une plage à risque de résonance. Des indications sur la manière de prendre en compte ces chargements, de les intégrer dans un logiciel de calcul de structures, et aussi de modéliser les structures sont données dans le chapitre suivant.

Il est à noter que le nombre de piétons équivalents utilisé ci-après est enveloppe de toutes les situations. Sur des exemples précis et moyennant des études particulières, il est possible de le diminuer.

#### 2.3.2 Definition of dynamic calculations to be carried out

*Dynamic structural calculations should be carried out for all or part of a set of three load cases, depending on the bridge category and the ranges of its natural frequencies:*

*Case 1: sparse and dense crowds*

*Case 2: very dense crowd*

*Case 3: complement for distributed crowd (effect of 2nd harmonic)*

*Table 2.5 specifies the calculations to be carried out in each case.*

		<i>Load case to be used for acceleration check</i>		
		<i>Range of natural frequency</i>		
<i>Traffic</i>	<i>Class</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>

Sparse	III	1	none	none
Dense	II		1	3
Very dense	I	2	2	3

case 1: sparse and dense crowds

case 2: very dense crowd

case 3: crowd complement (2nd harmonic)

Table 2.5: Verifications - Load cases to be taken into account

## 2.4 Step 4, if necessary: calculation with dynamic load cases

When the conclusion of the previous step is that dynamic calculations should be carried out; these calculations should:

- verify the comfort criteria of paragraph 2.2 corresponding to the level required by the bridge Owner, under service conditions and for the dynamic load cases defined below,
- include conventional SLS and ULS verifications including the dynamic load cases.

### 2.4.1 Dynamic load cases

The load cases defined below have been drawn up as simplified and practical representations of the effects of greater or lesser numbers of pedestrians on a footbridge. They have been defined for each mode whose frequency has been identified to be in a range with a risk of resonance. Information on how to take these loads into account, integrate them into a structural design program, and model the structures concerned is given in the following chapter.

It should be noted that the number of equivalent pedestrians used hereafter is envelope of all the situations. On precise examples and realising particular studies, it is possible to reduce it.

#### 2.4.1.1. Cas 1 : foule peu dense et dense

Ce cas n'est à considérer que pour les passerelles de classe III (foule peu dense) et II (foule dense). La densité  $d$  de la foule de piétons à envisager est fonction de la classe de la passerelle :

Classe	Densité $d$ de la foule
III	0,5 piéton/m <sup>2</sup>
II	0,8 piéton/m <sup>2</sup>

Cette foule est considérée comme uniformément répartie sur la surface totale de la passerelle  $S$ . Le nombre de piétons impliqués est donc :  $N = S \times d$ .

Le nombre de piétons équivalents, c'est-à-dire le nombre de piétons qui, étant tous à la même fréquence et en phase, produirait les mêmes effets que des piétons aléatoires, en fréquence et en phases est :  $10,8 \times (\xi \times N)^{1/2}$  (cf. chapitre 1).

La charge que l'on prend en compte est affectée d'un coefficient réducteur  $\psi$  qui traduit le fait que la mise en résonance des passerelles est d'autant moins probable que l'on s'éloigne de la plage 1,7 Hz - 2,1 Hz pour les accélérations verticales, et 0,5 Hz - 1,1 Hz pour les accélérations horizontales. Ce coefficient tombe à 0 lorsque la fréquence de la passerelle est inférieure à 1 Hz pour l'action verticale et 0,3 Hz pour l'action horizontale. De-même, au-delà de 2,6 Hz pour l'action verticale et 1,3 Hz pour l'action horizontale, le coefficient s'annule. Dans ce cas cependant, il faut regarder la seconde harmonique de la marche des piétons.

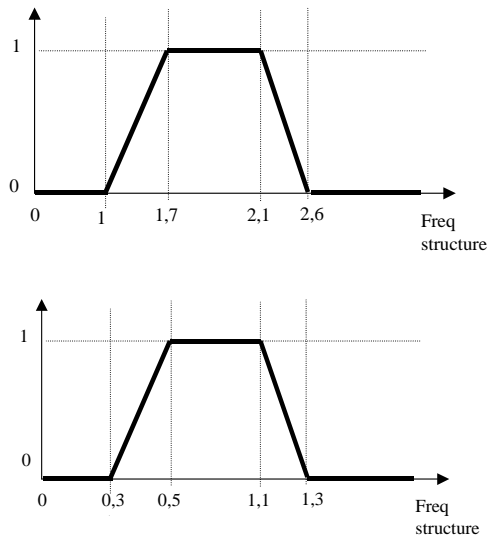


Figure 2.3 : Facteur  $\psi$  dans le cas de la marche, pour les vibrations verticales et longitudinales en haut, et pour les vibrations latérales en bas.

#### 2.4.1.1 Case 1: sparse and dense crowds

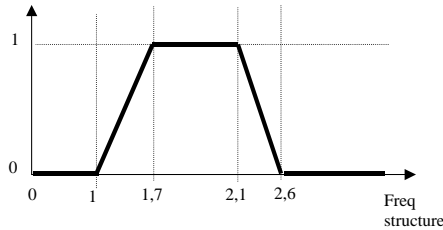
This case applies only to class III (sparse crowd) and class II (dense crowd) bridges. The density  $d$  of the crowd of pedestrians to be considered depends on the bridge class:

Class	Crowd density $d$
III	0.5 pedestrians/m <sup>2</sup>
II	0.8 pedestrians/m <sup>2</sup>

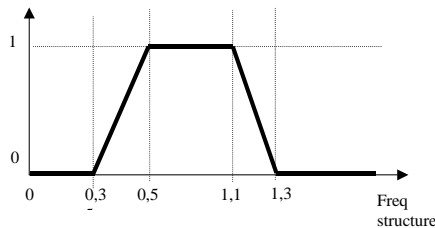
This crowd is considered to be uniformly distributed over the entire surface area of the bridge,  $S$ . The number of pedestrians involved is therefore:  $N = S \times d$ .

The number of equivalent pedestrians, i.e. the number of pedestrians walking with the same stepping frequency and with footfall correlation which would produce the same effects, in terms of frequency and footfall correlation, as random pedestrians is:  $10.8 \times (\xi \times N)^{1/2}$  (cf. chapter 1).

The load taken into account is multiplied by a reduction factor  $\psi$  taking account of the fact that resonance of footbridges becomes less likely as the frequency falls outside the range 1.7 Hz - 2.1 Hz for vertical acceleration and 0.5 Hz - 1.1 Hz for horizontal acceleration. This factor drops to 0 when the bridge frequency is less than 1 Hz for vertical action and 0.3 Hz for horizontal action. Similarly, beyond 2.6 Hz for vertical action and 1.3 Hz for horizontal action, the reduction factor is eliminated, but in this case the second harmonic of walking must be examined.



for vertical and longitudinal vibrations



for lateral vibrations

Figure 2.3: Factor  $\psi$  in the case of walking.

Le tableau ci-après résume la charge **par unité de surface** à appliquer pour chaque direction de vibration, pour une foule aléatoire quelconque, lorsque l'on s'intéresse aux modes verticaux et longitudinaux.  $\xi$  représente le taux d'amortissement critique (sans unité), N le nombre de piétons sur la passerelle ( $d \times S$ ).

Direction	Charge par $m^2$
Verticale (v)	$d \times (280 \text{ newtons}) \times \cos(2\pi fvt) \times 10,8 \times (\xi / N)^{1/2} \times \psi$
Longitudinale (l)	$d \times (140 \text{ newtons}) \times \cos(2\pi fit) \times 10,8 \times (\xi / N)^{1/2} \times \psi$
Transversale (t)	$d \times (35 \text{ newtons}) \times \cos(2\pi fit) \times 10,8 \times (\xi / N)^{1/2} \times \psi$

Les chargements sont à appliquer sur l'ensemble de la passerelle, et le signe de l'amplitude de vibration doit être en tout point choisi pour produire l'effet maximal : le sens du chargement doit donc être le même que le sens de la déformée modale, et s'inverser à chaque fois que la déformée modale change de sens, au passage d'un nœud par exemple (cf. chapitre 3 pour plus de détails).

Remarque 1 : pour obtenir ces valeurs, on calcule le nombre de piétons équivalents par la formule  $10,8 \times (\xi \times N)^{1/2}$  puis l'on divise par la surface chargée  $S$ , que l'on remplace par  $N/d$  (rappel  $N = S \times d$ ) ce qui donne  $d \times 10,8 \times (\xi / N)^{1/2}$  à multiplier par l'action individuelle de ces piétons équivalents ( $F_0 \cos(\omega t)$ ) et par le coefficient réducteur  $\psi$ .

Remarque 2 : Il est bien évident que ces cas de charge ne sont pas à appliquer simultanément. On applique le cas de charge vertical pour chaque mode vertical à risque, et le cas de charge longitudinal pour chaque mode longitudinal à risque, en ajustant à chaque fois la fréquence du chargement à la fréquence propre concernée.

Remarque 3 : Les cas de charge précédents ne font pas apparaître la partie statique de l'action des piétons,  $G_0$ . Cette composante n'a en effet aucune influence sur l'accélération, néanmoins, il faut bien garder à l'esprit que la masse de chacun des piétons doit être intégrée à la masse de la passerelle.

Remarque 4 : ces chargements sont à appliquer jusqu'à obtention de l'accélération maximale à la résonance. On rappelle que le nombre de piétons équivalents a en effet été construit de façon à comparer des piétons réels avec des piétons fictifs en nombre plus réduit présentant une résonance parfaite. Voir le chapitre 3 pour plus de détails.

#### 2.4.1.2. Cas 2 : foule très dense

Ce cas de charge n'est à prendre en compte que pour les passerelles de classe I.

La densité de la foule de piétons à envisager est fixée à 1 piéton par  $m^2$ . Cette foule est considérée comme uniformément répartie sur toute la surface de la passerelle.

On considère que les piétons sont tous à la même fréquence et présentent des phases aléatoires. Dans ce cas, le nombre de piétons tous en phases équivalent au nombre de piétons présentant des phases aléatoires est de  $1,85 \sqrt{N}$  (voir chapitre 1).

The table below sums up the load **per unit surface area** to be applied for each direction of vibration, for any random crowd, when examining vertical and longitudinal modes.  $\psi$  represents the damping ratio (no unit), and  $N$  the number of pedestrians on the bridge ( $d \times S$ ).

Direction	Load per $m^2$
Vertical (v)	$d \times (280 \text{ newtons}) \times \cos(2\pi f_v t) \times 10,8 \times (\xi / N)^{1/2} \times \psi$
Longitudinal (l)	$d \times (140 \text{ newtons}) \times \cos(2\pi f_l t) \times 10,8 \times (\xi / N)^{1/2} \times \psi$
Lateral (t)	$d \times (35 \text{ newtons}) \times \cos(2\pi f_t t) \times 10,8 \times (\xi / N)^{1/2} \times \psi$

These loads are to be applied to the entire bridge, and the sign of the amplitude of vibration at any point must be selected to produce the maximum effect: the direction of loading must therefore be the same as the direction of modal deformation, and must be reversed whenever the modal deformation changes direction, at a node for example (cf. chapter 3 for more detail).

Observation 1: to obtain these values, the number of equivalent pedestrians is calculated with the formula  $10.8 \times (\xi \times N)^{1/2}$ , and is then divided by the loaded surface area  $S$  which is replaced by  $N/d$  ( $N = S \times d$ ), giving  $d \times 10.8 \times (\xi / N)^{1/2}$  which is multiplied by the individual action of the equivalent pedestrians ( $F_0 \cos(\omega t)$ ) and by the reduction factor  $\psi$ .

Observation 2: Obviously these load cases are not to be applied simultaneously. The vertical load case is applied for each vertical mode entailing risk, and the longitudinal load for each longitudinal mode entailing risk, adjusting the frequency of the loading to the natural frequency concerned in each case.

Observation 3: The above load cases do not integrate the static part of pedestrian action,  $G_0$ . Although this component has no effect on acceleration, it must be remembered that the mass of each pedestrian must be added to the mass of the footbridge.

Observation 4: These loads are to be applied until the maximum resonant acceleration is obtained. The number of equivalent pedestrians, it will be remembered, was calculated in order to compare real pedestrians with a smaller number of notional pedestrians generating perfect resonance. See chapter 3 for more details.

#### 2.4.1.2 Case 2: very dense crowd

This load case is to be taken into account only for class I footbridges.

The density of the crowd to be considered is set at one pedestrian per square metre. This crowd is considered to be uniformly distributed across the surface of footbridge.

It is considered that all the pedestrians walk at the same stepping frequency but with random footfall correlation. This means that the number of pedestrians with footfall correlation equivalent to the number of pedestrians with random footfall correlation is  $1,85 \sqrt{N}$  (see chapter 1).

Le deuxième coefficient réducteur,  $\psi$ , tenant compte de l'incertitude sur la coïncidence entre la fréquence de sollicitation par la foule et la fréquence propre de la structure, est défini par la figure 2.3 en fonction de la fréquence propre du mode considéré, pour les vibrations verticales et longitudinales d'une part, transversales d'autre part.

Le tableau ci-après résume la charge à appliquer par unité de surface pour chaque direction de vibration. Les mêmes remarques que celles du paragraphe précédent s'appliquent :

Direction	Charge par $m^2$
Verticale (v)	$1,0 \times (280 \text{ newtons}) \times \cos(2\pi f_v t) \times 1,85 (1/N)^{1/2} \times \psi$
Longitudinale (l)	$1,0 \times (140 \text{ newtons}) \times \cos(2\pi f_l t) \times 1,85 (1/N)^{1/2} \times \psi$
Transversale (t)	$1,0 \times (35 \text{ newtons}) \times \cos(2\pi f_t t) \times 1,85 (1/N)^{1/2} \times \psi$

2.4.1.3. Cas 3 : effet de la 2° harmonique de la foule

Ce cas est similaire aux cas 1 et 2, mais en considérant la 2° harmonique de la sollicitation de la marche des piétons, située en moyenne au double de la fréquence de la première harmonique. Il n'est à prendre en compte que pour les passerelles de classe I et II.

La densité de la foule de piétons à envisager est de 0,8 piéton/m<sup>2</sup> pour la classe II, et 1,0 pour la classe I.

Cette foule est considérée comme uniformément répartie. La force individuelle exercée par un piéton est réduite à 70 newtons en vertical, 7 newtons en transversal et 35 newtons en longitudinal.

Pour les passerelles de classe II, on tient compte du caractère aléatoire des fréquences et des phases des piétons, comme pour le cas de charge n°1.

Pour les passerelles de classe I, on tient compte du caractère aléatoire des phases des piétons uniquement, comme pour le cas de charge n°2.

Le deuxième coefficient réducteur,  $\psi$ , tenant compte de l'incertitude sur la coïncidence entre la fréquence de sollicitation par la foule et la fréquence propre de la structure est donné par la figure 2.4 en fonction de la fréquence propre du mode considéré, pour les vibrations verticales et longitudinales d'une part, transversales d'autre part.

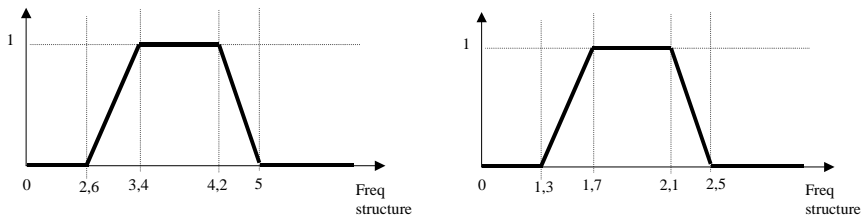


Figure 2.4 : Facteur  $\psi$  pour les vibrations verticales à gauche et latérales à droite

The second reduction factor,  $\psi$ , taking account of uncertainty over the correlation between the frequency of loading by the crowd and the natural frequency of the structure, is defined by figure 2.3 for the different frequencies of the mode considered. It is determined separately for vertical and longitudinal vibrations and for lateral vibrations.

The table below sums up the load to be applied per unit surface area for each direction of vibration. The same observations as in the previous paragraph apply:

Direction	Load per m <sup>2</sup>
Vertical (v)	$1,0 \times (280 \text{ newtons}) \times \cos(2\pi f_v t) \times 1,85 (1/N)^{1/2} \times \psi$
Longitudinal (l)	$1,0 \times (140 \text{ newtons}) \times \cos(2\pi f_l t) \times 1,85 (1/N)^{1/2} \times \psi$
Lateral (t)	$1,0 \times (35 \text{ newtons}) \times \cos(2\pi f_t t) \times 1,85 (1/N)^{1/2} \times \psi$

2.4.1.3 Case 3: effect of the second harmonic of the crowd

This case is similar to cases 1 and 2, but considers the 2nd harmonic of loading by pedestrians, which on average is the double of the first-harmonic frequency. It is to be taken into account only for class I and class II footbridges.

The crowd density to be taken into account is 0.8 pedestrians/m<sup>2</sup> for class II and 1.0/m<sup>2</sup> for class I.

This crowd is considered to be uniformly distributed. The individual force exerted by a pedestrian is reduced to 70 newtons vertically, 7 newtons laterally, and 35 newtons longitudinally.

For class II footbridges, account is taken of the randomness of pedestrian stepping frequencies and footfall correlation, as for load case No. 1.

For class I footbridges, account is taken only of the randomness of footfall correlation, as for load case No. 2.

The second reduction coefficient,  $\psi$ , taking account of uncertainty over the correlation between the frequency of loading by the crowd and the natural frequency of the structure, is defined by figure 2.4 for the different frequencies of the mode considered. It is determined separately for vertical and longitudinal vibrations and for lateral vibrations.

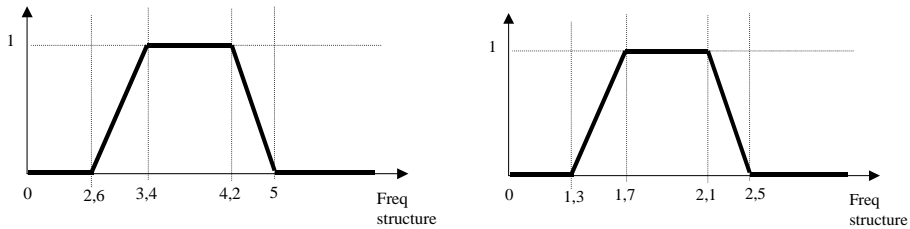


Figure 2.4: Factor  $\psi$  for vertical vibrations (left) and lateral vibrations (right)

### 2.4.2. Amortissement de l'ouvrage

Les calculs dynamiques sont conduits en prenant en compte l'amortissement structurel suivant :

Type	Pourcentage d'amortissement critique
Béton Armé	1,3%
Béton précontraint	1%
Mixte	0,6%
Acier	0,4%
Bois	1%

Tableau 2.6 : Pourcentage d'amortissement critique à prendre en compte



Dans le cas de structures différentes cumulant plusieurs matériaux, le pourcentage d'amortissement critique à prendre en compte peut être pris à la moyenne des pourcentages d'amortissement critique des différents matériaux pondérée par les participations respectives de ces matériaux à la rigidité globale dans le mode considéré :

$$\xi_{\text{mode } i} = \frac{\sum_{\text{matériaux } m} \xi_m k_{m,i}}{\sum_{\text{matériaux } m} k_{m,i}} \text{ où } k_{m,i} \text{ est la participation du matériau } m \text{ à la rigidité globale}$$

dans le mode *i*.

En pratique, la détermination des rigidités  $k_{m,i}$  est difficile. Pour des passerelles classiques de section peu variables, on peut utiliser la formule approcher suivante :

$$\xi_{\text{mode}} = \frac{\sum_{\text{matériaux } m} \xi_m EI_m}{\sum_{\text{matériaux } m} EI_m} \text{ où } EI_m \text{ est la participation du matériau } m \text{ à la rigidité globale } EI$$

de la section, par rapport au centre mécanique de cette section. (de sorte que

$$\sum_{\text{matériaux } m} EI_m = EI)$$

## 2.5. Étape 5 : Modification du projet ou de la passerelle

Si les calculs précédents n'apportent pas les justifications suffisantes, le projet est à reprendre s'il s'agit d'une passerelle neuve, ou des dispositions sont à prendre en compte s'il s'agit d'une passerelle existante (mise en place ou non d'amortisseurs). Ce paragraphe donne des recommandations pour réduire les effets dynamiques sur les passerelles. Ces recommandations sont classées par importance décroissante.

### 2.4.2 Bridge damping

The dynamic calculations are carried out taking account of the following structural damping:

Type	Damping ratio
Reinforced concrete	1,3%
Prestressed concrete	1%
Composite	0,6%
Steel	0,4%
Timber	1%

Table 2.6: Damping ratio to be taken into account

In the case of structures combining several materials, the damping ratio to be taken into account may be taken as the average damping ratio for the different materials weighted by the respective contributions of those materials to overall stiffness in the mode considered:

$$\xi_{\text{mode } i} = \frac{\sum_{\text{matériaux } m} \xi_m k_{m,i}}{\sum_{\text{matériaux } m} k_{m,i}} \quad \text{where } k_{m,i} \text{ is the contribution of material } m \text{ to overall stiffness}$$

in mode  $i$ .

In practice, it is difficult to determine stiffnesses  $k_{m,i}$ . For conventional footbridges with little variation in sectional area, the following approximate formula can be used:

$$\xi_{\text{mode}} = \frac{\sum_{\text{matériaux } m} \xi_m EI_m}{\sum_{\text{matériaux } m} EI_m} \quad \text{where } EI_m \text{ is the contribution of material } m \text{ to the overall}$$

stiffness  $EI$  of the section at the elastic centre of the section (such that

$$\sum_{\text{matériaux } m} EI_m = EI )$$

## 2.5 Step 5: Modification of the design or of the footbridge

If the above calculations do not give sufficient substantiation, the design must be reviewed, if it is a bridge not yet built, or special measures must be taken if it is an existing bridge (installation of dampers, for example). This paragraph gives recommendations on reducing dynamic effects on footbridges. They are given in decreasing order of importance.

### 2.5.1 Modification des fréquences propres

La modification des fréquences propres est la façon la plus saine de résoudre les problèmes vibratoires d'une structure. Néanmoins, pour modifier sensiblement les fréquences propres d'une structure, il faut bien souvent effectuer des modifications structurelles très importantes de façon à augmenter la raideur de la structure.

La plupart du temps, on cherche à augmenter les fréquences propres, de sorte que le premier mode, et donc tous les suivants, soient en dehors de la plage à risque. Dans certains cas, lorsque la fréquence du premier mode est basse mais dans la plage à risque et celle du second mode suffisamment élevée, il peut être intéressant de diminuer les fréquences afin d'amener le premier mode en dessous de la plage à risque à condition que le second mode reste au-dessus de cette plage. Ceci n'est cependant pas très satisfaisant. En plus, en diminuant la rigidité de l'ouvrage, on l'assouplit et on augmente les flèches statiques.

Parmi les moyens d'augmenter les fréquences propres de la passerelle, on peut citer les suivants :

#### 2.5.1.1. Vibrations verticales

Considérons par exemple le cas des vibrations verticales d'un tablier constitué par un caisson métallique. Si la hauteur du caisson peut être augmentée, on peut alors augmenter la raideur sans augmenter la masse. Il suffit en effet de conserver les épaisseurs des membrures inférieure et supérieure, et de diminuer les épaisseurs des âmes proportionnellement à l'augmentation de leur hauteur.

Mais dans un grand nombre de cas, la hauteur du caisson ne peut pas être augmentée, ou pas suffisamment, pour des raisons fonctionnelles (gabarit de passage sous la passerelle) ou architecturales. Si on augmente alors les épaisseurs des membrures et des âmes du caisson, l'inertie augmente proportionnellement à l'épaisseur, mais la masse propre augmente également, ce qui atténue l'effet global. Dans ce cas il n'y a pas de solution pour augmenter les fréquences propres, si ce n'est modifier le schéma statique de la structure : créer des encastremements sur les piles, ajouter des haubans,...

Dans le cas d'un tablier en poutre à âme pleine mixte acier-béton, l'augmentation de l'épaisseur de la membrure métallique inférieure est plus efficace pour augmenter la fréquence de vibration. En effet la masse propre n'augmente pas aussi vite, puisqu'elle comporte une part importante due à la masse de la dalle béton, qui elle n'augmente pas.

Dans le cas d'un tablier en treillis, l'inertie varie comme le carré de la hauteur alors que la section des membrures (donc la masse des membrures) varie comme l'inverse de la hauteur. Il est donc intéressant d'augmenter la hauteur pour augmenter la fréquence de vibration.

Dans le cas d'un tablier en béton, l'augmentation de la résistance du béton permet d'augmenter son module, et donc la raideur du tablier, sans augmenter sa masse, mais dans des proportions réduites puisque le module n'augmente que comme la racine cubique de la résistance en compression. Un autre moyen classique d'augmentation de la raideur sans augmentation de la masse consiste à remplacer une section rectangulaire par une section en I. Un tablier constitué par un caisson aura ainsi une fréquence de vibration plus élevée qu'un tablier de même épaisseur constituée de poutres rectangulaires.

#### 2.5.1 Modification of frequencies

*Modifying frequencies is the soundest way of overcoming the vibratory problems of a structure. To appreciably modify the natural frequencies of a structure, however, very substantial structural modifications are often necessary in order to increase its stiffness.*

*Most of the time designers seek to increase frequencies so that the first mode, and therefore all the others, are beyond the range involving risk. In some cases, when the frequency of the first mode is low but inside the risk range and the frequency of the second mode is high enough, one solution may be to reduce the frequencies to bring the first frequency beneath the risk range, on condition that the second frequency remains above the range. This is not a very satisfactory solution, however. In addition, if the stiffness of the structure is reduced, the structure becomes more flexible and static deflection increases.*

*The means for increasing the natural frequencies of a footbridge include the following.*

### 2.5.1.1 Vertical vibration

*Let us examine the example of vertical vibration in a bridge deck consisting of a steel box girder. If the depth of the girder can be increased, its stiffness can be increased without increasing its mass: the thickness of the top and bottom flanges can stay the same while the thickness of the webs can be reduced in proportion to the increase in depth.*

*In most cases, however, the depth of the box girder cannot be increased, or not sufficiently, for functional reasons (clearance beneath the bridge) or architectural reasons. If the thickness of the webs and flanges is increased, the inertia increases in proportion to the thickness but the selfweight also increases, which attenuates the overall effect. In this case there is no means of increasing frequencies other than by modifying the static design of the structure: end-fixing at piers, stays, etc.*

*In the case of a composite girder bridge, increasing the thickness of the steel bottom flange is a more effective means of increasing the vibration frequency. This is because the selfweight does not increase so much, since it comprises a large part due to the mass of the concrete slab which does not increase.*

*In the case of a lattice-girder bridge, inertia varies as the square of depth whereas the sectional area of webs (and therefore their mass) varies inversely to depth. Increasing the depth of the girders is therefore an effective means of increasing the vibration frequency.*

*In the case of a concrete deck, increasing the concrete strength increases its modulus of elasticity and thus its stiffness, without increasing its mass, but only to a limited extent since the modulus of elasticity increases only as the cube root of compressive strength. Another conventional means of increasing stiffness without increasing mass is to replace a rectangular section by an I section. A box-girder deck will thus have a higher vibration frequency than a deck of the same depth made with rectangular beams.*

On peut aussi remplacer du béton normal par du béton léger pour diminuer la masse (avec une diminution faible de la raideur) et donc augmenter la fréquence de vibration.

Dans le cas d'un tablier haubané, l'augmentation des sections des haubans permet en général d'augmenter la raideur sans augmenter beaucoup la masse. Cette solution est efficace, mais elle n'est pas économique puisqu'on est obligé d'augmenter la quantité de haubanage sans contrepartie. Un haubanage en éventail est plus raide qu'un haubanage en harpe. Des pylônes plus hauts conduisent également à une augmentation de la raideur sans augmentation de la masse, donc à une augmentation de la fréquence de vibration.

Dans le cas d'un tablier suspendu, la fréquence de vibration augmente comme la racine carrée de la tension des câbles divisée par la masse linéique des câbles et du tablier. Il est donc sans intérêt d'augmenter simplement la section des câbles. Il faut surtout diminuer leur flèche.

On peut également augmenter la raideur verticale d'un tablier en faisant participer les garde-corps à cette raideur.

### 2.5.1.2. Vibrations de torsion

Les vibrations de torsion du tablier provoquent des mouvements verticaux de celui-ci dès que l'on n'est pas dans l'axe longitudinal de l'ouvrage. Il faut donc veiller également aux valeurs des fréquences de vibrations de torsion du tablier lorsque l'on étudie les vibrations verticales ressenties par les piétons. La fréquence de vibration de torsion est proportionnelle à la racine carrée de la raideur en torsion et inversement proportionnelle à la racine carrée de la masse polaire du tablier. Il y a donc tout intérêt à concevoir des tabliers rigides en torsion.

Il existe plusieurs moyens d'augmenter la fréquence des vibrations de torsion d'un tablier. Pour cela, il est bien sûr possible d'augmenter l'inertie de torsion. Un tablier en caisson a ainsi une inertie de torsion plus grande qu'un tablier constitué de poutres latérales. On peut encore augmenter son inertie de torsion en augmentant la surface de la section fermée délimitée par le caisson. L'adjonction, à un tablier constitué d'un hourdis supporté par des poutres latérales, d'un contreventement horizontal inférieur en treillis reliant les membrures inférieures des deux poutres, permet aussi d'augmenter la raideur en torsion, mais dans des proportions moindres qu'un caisson.

Dans le cas d'un pont haubané à suspension latérale dont le tablier est constitué de deux poutres latérales, le fait d'ancrer les haubans dans le plan axial de la structure (sur un pylône axial ou sur la partie supérieure d'un pylône en Y inversé ou en V inversé), et non sur deux pylônes latéraux indépendants, permet d'augmenter la fréquence de torsion d'un facteur voisin de 1,3 (Réf. [52]). C'est ce qui a été fait pour la passerelle du Palais de Justice de Lyon.

### 2.5.1.3. Vibrations horizontales

La fréquence de vibration horizontale est proportionnelle à la racine carrée de la raideur horizontale et inversement proportionnelle à la racine carrée de la masse du tablier.

Un moyen évident d'augmenter la raideur horizontale est d'augmenter la largeur du tablier. Mais cela a un coût non moins évident.

*Standard concrete can also be replaced by lightweight concrete to decrease mass (with a slight decrease in stiffness) and therefore increase the vibration frequency.*

*In the case of a cable-stayed deck, increasing the sectional area of stays generally increases stiffness without a significant increase in mass. While this solution is effective, it is not economical since it calls for an increase in the amount of steel in the stays, with no savings made elsewhere. A radial stay arrangement is stiffer than a parallel arrangement. Taller pylons also increase stiffness without increasing mass, thereby increasing the frequency of vibration.*

*In the case of suspension bridge, the vibration frequency increases as the square root of cable tension divided by the mass per unit length of the cables and deck. There is therefore no point in increasing just the sectional area of the cables. Above all, their deflection must be reduced.*

*It is also possible to increase the vertical stiffness of a bridge deck by making the safety railings contribute to stiffness.*

### 2.5.1.2 Torsional vibration

*Torsional vibration of a bridge deck causes vertical movement when loading is not on the longitudinal centreline. It is therefore important to consider the frequencies of torsional vibration of the deck when studying vertical vibration felt by pedestrians. The frequency of torsional vibration is proportional to the square root of torsional stiffness and inversely proportional to the square root of the polar mass of the deck. It is therefore advisable to design bridge decks with good torsional stiffness.*

*There are several ways of increasing the frequency of torsional vibration of a bridge deck. Of course it is possible to increase the torsional inertia. A box-girder deck has greater torsional inertia than an opened bridge deck, with girders at the sides. Its torsional inertia can be increased further by increasing the sectional area of the closed section (box). Adding horizontal lattice bracing between the two lateral girders of a opened bridge with a concrete deck will also increase torsional stiffness, but less than a box girder.*

*In the case of a cable-stayed bridge whose stays are anchored at the deck edges, in two lateral beams, anchoring the top ends of the stays in the axial plane of the structure (on a centre pylon or in the upper part of an inverted Y or V pylon) rather than in two separate lateral pylons increases the torsional frequency by a factor of close to 1.3 (Ref. [52]). This was performed for the Lyon Courts footbridge (passerelle du Palais de Justice).*

### 2.5.1.3 Horizontal vibration

*The frequency of horizontal vibration is proportional to the square root of horizontal stiffness and inversely proportional to the square root of deck mass.*

*An obvious means of increasing horizontal stiffness is to increase the width of the deck. But the cost of doing this is no less obvious.*

*À largeur donnée, une façon d'augmenter la raideur horizontale consiste à placer les éléments résistants sur les rives du tablier : on placera par exemple deux poutres latérales de section S, plutôt que quatre poutres de section S/2 également espacées sous le platelage.*

*Dans le cas de passerelles haubanées ou suspendues très étroites par rapport à leur portée, on pourra placer des câbles latéraux pour raidir la structure. C'est le cas de la passerelle suspendue de Tours, sur le Cher.*

## 2.5.2. Diminution structurelle des accélérations

*Si l'on ne parvient pas à augmenter suffisamment les fréquences, ou si cette augmentation conduit à une conception qui remet en cause l'existence même du projet, ou encore s'il s'agit d'un ouvrage ancien sur lequel on ne peut pas faire de modifications conséquentes, il faut essayer de diminuer les accélérations (sans jouer directement sur l'amortissement). Pour cela, on peut augmenter la masse de la structure en utilisant un platelage « lourd » (enrobé, béton ou autre). Ceci joue directement sur les accélérations (on rappelle que celles-ci sont*

inversement proportionnelles à la masse). En plus, si ce platelage est connecté à la structure, les fréquences ne seront pas trop diminuées, et l'amortissement apporté par ce platelage pourra être intéressant dans sa contribution à l'amortissement total.

Un autre moyen de réduire les accélérations est d'utiliser des matériaux naturellement amortissants. Cependant, il faut savoir que pour mobiliser l'amortissement de ces matériaux, ceux-ci doivent intervenir dans la rigidité globale, et donc être participants. Un amortissement accru peut être obtenu par exemple par l'emploi d'un garde-corps en grillage. Dans le cas de passerelles en membrane tendue (« stress ribbon »), des plaques d'élastomère disposées entre les dalles de béton préfabriquées constituant le tablier peuvent permettre d'augmenter l'amortissement.

### 2.5.3. Mise en place d'amortisseurs

En dernier recours, si les solutions précédentes ne fonctionnent pas, on peut prévoir la mise en place de systèmes amortisseurs, qui sont le plus souvent des amortisseurs dynamiquement accordés (ce sont les plus simples à mettre en place : les amortisseurs visqueux nécessitent souvent la construction de dispositifs complexes recréant des déplacements différentiels importants, pour un bon fonctionnement). Un amortisseur dynamique accordé est constitué par une masse reliée à la structure par un ressort et par un amortisseur disposé en parallèle. Ce dispositif permet de diminuer dans des proportions importantes les vibrations d'une structure dans un mode de vibration donné, sous l'action d'une excitation périodique de fréquence proche de la fréquence propre de ce mode de vibration de la structure (voir Annexe 3 §3.3).

Ceci ne doit se prévoir qu'en dernier recours, car malgré le caractère attractif a priori de ces solutions (augmentation forte de l'amortissement à un coût peu élevé), il y a des inconvénients.

Si l'on utilise des amortisseurs dynamiquement accordés, ce qui est le cas le plus courant :

- il faut autant d'amortisseurs qu'il y a de fréquences à risque. Pour des passerelles complexes, qui ont beaucoup de modes (flexion, torsion, modes verticaux, transversaux, longitudinaux...) à risque, cela peut s'avérer très lourd à mettre en œuvre ;

*For a given width, one way to increase the horizontal stiffness is to place strong elements at the edges of the deck: for example, two side beams with sectional area  $S$  rather than four beams of section  $S/2$  distributed evenly beneath the decking.*

*In the case of cable-stayed or suspension bridges that are very narrow in relation to their length, lateral cables could be installed to stiffen the structure. This was done for the Tours suspension footbridge over the Cher river.*

### 2.5.2 Structural reduction of acceleration

*If it is not possible to increase frequencies sufficiently, or if any increase results in a design that compromises the very construction of the project, or in the case of an existing footbridge on which substantial retrofit modifications cannot be made, it must be attempted to reduce accelerations (without acting directly on damping). To achieve this, the mass of the structure can be increased by using "heavy" decking (bituminous or*

hydraulic concrete, etc.). This directly affects acceleration (which is inversely proportional to mass). In addition, if the decking is connected to the structure, frequencies will not be reduced too much, and the damping provided by the decking may make a worthwhile contribution to the overall damping.

Another way to reduce acceleration is to use naturally damping materials. However, to take advantage of the damping properties of such materials, they must make an active contribution to the overall stiffness. Increased damping can be achieved, for example, by using a mesh safety railing. In the case of stress-ribbon footbridges, elastomeric strips between the precast concrete slabs of the deck can increase damping.

### 2.5.3 Installation of dampers

At least, if none of the above solutions are effective, dampers may be installed, most commonly tuned mass dampers (they are the easiest to install; viscous dampers often require the construction of complex systems reproducing large differential displacements if they are to work properly). A tuned mass damper consists of a mass connected to the structure by a spring and a damper in parallel. For a given structural vibration mode, this system considerably reduces the vibration of a structure under the action of periodic excitation of a frequency close to the natural frequency of that vibration mode of the structure (see Appendix 3, §3.3).

The damper solution should be used only as a last solution, for despite their apparent attraction (major increase in damping at little cost), dampers have some disadvantages. If tuned mass dampers are used (which is most frequently the case):

- there must be as many dampers as there are frequencies involving risk. For complex footbridges which have large numbers of risk modes (bending, torsion, vertical, lateral, longitudinal modes, etc.), the installation of dampers can prove to be very complex;

- il est nécessaire de caler l'amortisseur (à 2-3% près) sur une fréquence de structure qui évolue dans le temps (phénomènes différés) ou en fonction du nombre de piétons (modification de la masse). La baisse d'efficacité est sensible ;
- l'ajout d'un amortisseur dégenère et donc dédouble la fréquence propre considérée : ceci complique le comportement dynamique de l'ensemble ainsi que la mesure des fréquences propres ;
- même si les fabricants précisent que les amortisseurs ont une durée de vie très élevée, ceux-ci doivent faire l'objet d'un minimum d'entretien : les maîtres d'ouvrage doivent en être conscients ;
- compte-tenu du poids ajouté (environ 3 à 5% de la masse modale du mode considéré), cette solution ne fonctionne sur une passerelle existante que si celle-ci a une réserve



de dimensionnement suffisante. Sur une passerelle en projet, le projeteur peut être amené à redimensionner l'ouvrage ;

- on atteint au mieux 3% d'amortissement garanti : sur des structures très légères (dont le rapport Force excitatrice divisée par la masse est élevé), cela peut ne pas suffire.

## 2.6. Vérifications structurelles sous charges dynamiques

### 2.6.1. Vérifications de type E.L.S. spécifiques au comportement dynamique

En plus des vérifications habituelles à mener aux états limites de services, définies par les règlements en vigueur, il convient de former des combinaisons de service spécifiques au chargement dynamique des piétons, en cumulant :

- les effets (solicitations, déplacements, ...) résultant de l'un des cas de charge dynamique 1 à 3, en appliquant la même méthodologie que pour la détermination du confort. Ainsi, lorsque l'on doit calculer les accélérations, on doit aussi calculer les efforts correspondants et vérifier que ceux-ci restent admissibles. Lorsque la méthodologie n'impose pas le calcul des accélérations, cette vérification n'est pas à réaliser ;
- les effets du chargement statique associé au cas dynamique envisagé, correspondant d'une part aux charges permanentes et d'autre part au poids des piétons disposés de manière identique, en retenant une charge de 700N par piéton.

Il est important de noter que l'on cumule des déformées statiques et des déformées dynamiques, et donc que des précautions doivent être prises lors de l'utilisation de logiciels de calcul.

### 2.6.2. Vérifications de type E.L.U. spécifiques au comportement dynamique

S'agissant de vérifier la résistance de la structure, avec des niveaux de contraintes supposés proches de la limite d'élasticité des matériaux (sinon le problème de la résistance ne se pose évidemment pas), les calculs dynamiques sont conduits en prenant en compte l'amortissement structurel donné dans le tableau 2.7 suivant :

- *the damper must be set to a structural frequency (to within 2-3%), but the structural frequency will change over time (deferred phenomena) or in accordance with the number of pedestrians (change in mass). The drop in efficacy is appreciable;*
- *addition of a damper causes the natural frequency considered to degenerate, therefore multiplying it: this complicates the dynamic behaviour of the whole system and the measurement of frequencies;*
- *even if manufacturers state that dampers have a very long life, they still need to be maintained: bridge owners must be aware of this;*
- *given the extra weight added (about 3 to 5% of the modal mass of the mode considered), this solution will only work on an existing footbridge if there is a*

sufficient structural reserve designed into the structure. For a footbridge at the design stage, structural upgrading may be necessary;

- at best, 3% damping can be guaranteed; for very light structures (whose exciting-force-to-mass ratio is high), that may not be enough.

## 2.6 Structural verifications under dynamic loading

### 2.6.1 SLS verifications specific to dynamic behaviour

In addition to the usual serviceability limit state verifications that are carried out in accordance with the applicable regulations, serviceability combinations specific to dynamic pedestrian loading should be determined by combining:

- the effects (action effects, displacements, etc.) resulting from one of dynamic load cases 1 to 3, applying the same methodology as for determining comfort. Thus, when acceleration is to be calculated, the corresponding forces are also calculated and it can be checked that they are acceptable. When the methodology does not demand calculation of acceleration, this verification need not be made;
- the effects of static loads associated with the dynamic load case concerned, i.e. the permanent load and the weight of pedestrians positioned as above, taking a load of 700N per pedestrian.

It should be observed that this cumulates static deformation and dynamic deformation, and that care must therefore be taken when using design software.

### 2.6.2 ULS verifications specific to dynamic behaviour

For checking the strength of the structure with stress levels assumed to be close to the yield strength of the materials (otherwise there is obviously no strength problem), dynamic calculations are carried out assuming the structural damping given in table 2.7 below:

Types de structure	Amortissement
métalliques soudées	2%
métalliques boulonnées	4%
béton armé	5%
béton précontraint	2%

Tableau 2.7

De même que pour les états limites de service, les états limites ultimes présentés ici doivent être réalisés en plus des ELU classiques imposés par les règlements en vigueur. Il convient de former une combinaison de type accidentel afin de simuler un cas de

vandalisme ou de manifestation importante exceptionnelle sur la passerelle. La vérification est à faire dès qu'une vérification de confort pour une fréquence propre dans une plage à risque est effectuée. Le cas de charge à considérer est similaire au cas de charge n°1 défini précédemment (voir § 2.3.2) quelle que soit la classe de la passerelle avec les modifications suivantes :

- la densité de la foule est prise égale à 1 piéton par m<sup>2</sup> ;
- outre les charges permanentes de la passerelle, on doit tenir compte de la charge statique apportée par la foule que l'on prend égale à 700 newtons/m<sup>2</sup> ;
- les effets individuels de piétons sont directement cumulés, sans aucun coefficient réducteur ( $N_{\text{équivalent}} = N$  et  $\psi = 1$ ).

Ce cas de charge est extrêmement pessimiste, puisque l'on suppose la coordination parfaite d'une foule entière de piétons. Néanmoins, il peut survenir dans des conditions très exceptionnelles (manifestations rythmiques, courses, défilés etc.) ou dans des situations de synchronisation forcée.

L'expérience montre qu'il peut y avoir un problème de résistance dans des cas particuliers seulement car il ne faut pas oublier qu'un tel cas de charge correspond à un ELU accidentel, pour lequel on peut pondérer différemment les charges permanentes par rapport à l'ELU fondamental, ou être plus tolérant sur les limites des matériaux.

Quoi qu'il en soit, il peut dans certains cas particuliers subsister un manque de résistance si la structure est optimisée et tout juste dimensionnée. Si tel est le cas, et si les conséquences sur le dimensionnement sont importantes (ce qui ne devrait pas être le cas compte-tenu du faible écart entre le dimensionnement avec charges dynamiques et sans charges dynamiques), on pourra avantageusement regarder à quelle accélération correspond l'effort maximal dynamique ainsi calculé. Si cette accélération est trop importante, on pourra borner celle-ci à une valeur raisonnable inférieure à l'accélération de la pesanteur (entre 0,5 g et g) au-delà de laquelle on peut considérer que la marche devient impossible.

Types of structure	Damping
Welded steel	2%
Bolted steel	4%
Reinforced concrete	5%
Prestressed concrete	2%

Table 2.7

*As for serviceability limit states, the ultimate limit state verifications presented here must be carried out in addition to the conventional ULS verifications demanded by applicable regulations. An accidental combination should be determined to simulate the case of vandalism or exceptionally large gatherings on the footbridge. This verification should be done whenever comfort for a frequency in a range of risk is checked. The load case to be considered is similar to load case No. 1 defined above (§ 2.3.2) irrespective of the class of footbridge, with the following modifications:*

- crowd density is 1 pedestrian per m<sup>2</sup>;*
- in addition to the permanent loads on the footbridge, account must be taken of the static load added by the crowd, i.e. 700 newtons/m<sup>2</sup>;*
- the individual effects of pedestrians are cumulated directly, without any reduction factor ( $N_{\text{equivalent}} = N$  and  $\psi = 1$ ).*

*This load case is extremely pessimistic since it assumes perfect footfall correlation of an entire crowd. Under very exceptional conditions, however (rhythmic events, races, processions, etc.) or when lock-in occurs, this can happen.*

*Experience shows that there can be a strength problem only in certain special cases, for it must not be forgotten that such a load case is that of an accidental ULS for which permanent loads can be weighted differently from those in the fundamental ULS verification, or greater tolerance can be introduced on the limits of materials.*

*Whatever happens, in certain special cases there may be a strength shortfall if the structure is strictly optimized and engineered to the extreme limit. If this is the case, and if the consequences on design ratings are important (which should not actually be the case, given the slight difference between design with and without dynamic loading), it is worth looking to see at what acceleration the maximum dynamic force calculated occurs.*

*If this acceleration is too high, it could be bounded to a reasonable level below that of gravitational acceleration (between 0.5 g and 1 g), beyond which it can be considered that walking becomes impossible.*

Dans le sens transversal, la mise en cause de la résistance de la structure est peu probable car :

- L'action latérale du piéton est nettement plus faible que l'action verticale (35 newtons au lieu de 280 newtons) ;
- Les conséquences sur le dimensionnement peuvent être négligeables du fait du dimensionnement de la passerelle au vent, en supposant que l'on ne cumule pas des situations de vent extrême, et de densité forte sur la passerelle ;

- L'accélération transversale au-delà de laquelle le piéton ne peut plus maintenir son équilibre est nettement plus réduite que l'accélération verticale. On peut par exemple la limiter à une valeur comprise entre 0,1 g et 0,3 g.

Il est donc peu probable qu'une foule de piétons exceptionnelle puisse remettre en cause le dimensionnement d'une passerelle piétonne, ou puisse mettre en cause la résistance d'une passerelle, mais il est nécessaire de s'en assurer au préalable.

Il est à noter enfin que dans ces vérifications n'a pas été abordée la sécurité individuelle des piétons en cas d'accélération trop importantes du fait de ces manifestations exceptionnelles. C'est pour cela que le présent guide recommande aux maîtres d'ouvrages de ne pas autoriser que se produisent des manifestations exceptionnelles sur une passerelle piétonne, mais de les prendre en compte dans le dimensionnement de la passerelle car une telle interdiction peut sur toute la durée de vie de la passerelle être difficile à faire respecter.

*Laterally, it is unlikely that structural strength will be a problem since:*

- *lateral pedestrian-induced action is much less than vertical action (35 newtons instead of 280 newtons);*
- *the consequences on design can be negligible because of the wind design of the bridge, assuming that extreme wind conditions and high pedestrian density on the bridge are not cumulated;*

• *the lateral acceleration beyond which pedestrians can no longer keep their balance is much lower than the corresponding vertical acceleration. It can be limited to between 0.1 g and 0.3 g, for example.*

*It is therefore unlikely that an exceptionally large crowd could compromise the design of a footbridge or its strength, but checks should nevertheless be carried out beforehand.*

*Lastly, it should be noted that these verifications have not addressed the individual safety of pedestrians in the event of excessive acceleration due to such exceptional events. For this reason this guide recommends that footbridge owners do not authorize exceptional events to be held on a footbridge, but that they be taken into account in the design nonetheless since it may be difficult to enforce the prohibition over the entire lifetime of a footbridge.*

### **3. MÉTHODES DE CALCUL PRATIQUE**

#### **3.1. Méthodes de calcul utilisables**

Pour le calcul dynamique des structures et des systèmes continus, deux grandes méthodes sont utilisables : le calcul par intégration directe et le calcul modal.

### 3.1.1. Intégration directe

Cette méthode consiste à intégrer directement les équations de la dynamique avec un chargement imposé. Elle est en pratique peu utilisée pour les vibrations de passerelles car les phénomènes affectant celles-ci sont des phénomènes de résonance qui supposent donc pour les prévoir de connaître les fréquences propres des structures. Elle est plus utilisée dans le calcul au séisme pour lequel on connaît l'excitation (accélérogramme de séisme imposé par exemple)

La méthode d'intégration directe, plus coûteuse en temps d'analyse que le calcul modal, peut cependant s'avérer nécessaire dans l'un des cas suivants :

- lorsque la méthode de superposition modale ne peut pas s'employer avec un nombre réduit de modes ;
- lorsque l'amortissement n'est pas proportionnel ou lorsqu'il est concentré (amortisseurs visqueux par exemple) ;
- lorsque le problème n'est pas linéaire.

Les deux derniers points peuvent se rencontrer dans certains problèmes de vibration de passerelles (utilisation d'éléments finis, amortisseurs, ouvrage à comportement non linéaire). Il existe cependant des méthodes pour se rapprocher des méthodes modales, et il est souvent utile tout de même de déterminer des "fréquences apparentes" d'auto-vibrations pour pouvoir caler les chargements dynamiques produisant l'effet maximal.

### 3.1.2. Calcul modal

La méthode modale procède toujours en deux étapes, à savoir la détermination des modes propres dans un premier temps, et le calcul de la réponse réelle (si nécessaire) dans la base formée par ces modes propres.

La puissance de cette méthode est que les modes propres sont les modes d'auto vibrations de la structure. Ils représentent donc les modes de vibration privilégiés de la structure.

Le second avantage est qu'ils forment une base, et que la solution réelle est donc une combinaison linéaire de ces modes. On réduit ainsi considérablement le nombre de degrés de liberté et on a des équations découplées.

## 3. PRACTICAL CALCULATION METHODS

### 3.1 Calculation methods that can be used

*Two major methods may be used for the calculation of structures and continuous systems: calculation by direct integration and modal calculation.*

### 3.1.1 Direct integration method

*The direct integration method consists in directly integrating the equations of the dynamics with an imposed load. In practice it is little used for footbridge vibration, for the phenomena affecting them are resonance phenomena, and to predict them the natural frequencies of the structures must be known. It is more used in seismic calculation where the excitation is known (imposed earthquake accelerogram, for instance).*

*Although more costly in analysis time than modal calculation, the direct integration method may be necessary in one of the following cases:*

- when the mode superposition method cannot be used with a reduced number of modes;*
- when damping is not proportional or when it is concentrated (viscous dampers, for instance);*
- when the problem is not linear.*

*The last two points can be encountered in certain footbridge vibration problems (use of finite elements, dampers, bridge with non-linear behaviour). However, there are methods for getting similar results to modal methods, and it is often useful in any case to determine the "apparent frequencies" of self-vibration in order to be able to set the dynamic loadings producing the maximum effect.*

### 3.1.2 Modal calculation

*The modal method is always applied in two steps: determination of modes, followed by calculation of the actual response (if necessary) in the set formed by the modes.*

*The first strength of this method is that the modes are the modes of self-vibrating of the structure. They therefore represent the structure's preferential vibration modes.*

*The second advantage is that they form a base, and that the actual solution is therefore a linear combination of these modes. This therefore considerably reduces the number of degrees of freedom and means decoupled equations are involved.*

Enfin le troisième avantage est que, lorsqu'on excite une structure à une de ses fréquences propres et uniquement dans ce cas, il se produit un phénomène de résonance. Un des modes présente alors une réponse beaucoup plus importante que les autres. On restreint alors un problème à plusieurs degrés de liberté à un problème à un degré de liberté, donc facile à résoudre. Il n'y a donc plus qu'une seule inconnue au problème, l'amplitude de cette résonance. La connaissance de ces fréquences de résonance est cruciale pour l'analyse du problème dynamique.



### 3.2. Calcul dynamique appliqué aux passerelles

#### 3.2.1. Calcul des fréquences propres et des modes propres

En pratique, le calcul des modes propres se fait en utilisant des logiciels pour des structures complexes (ce qui est en pratique atteint dès que l'on a plusieurs poutres...). Cependant, un certain nombre de situations peuvent être déterminées analytiquement. Il est aussi souvent possible d'avoir des ordres de grandeur des fréquences propres, même dans le cas de structures complexes.

##### 3.2.1.1. Poutre sur 2 appuis simples

Pour une poutre sur appuis simples de caractéristiques constantes, le calcul analytique est possible (voir tableau 3.1).

Mode	Pulsation propre	Fréquence Propre	Déformée modale
Flexion simple à n ventres	$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$	$f_n = \frac{n^2 \pi}{2L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$	$v_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$
Traction-compression à n ventres	$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{ES}{\rho S}}$	$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{ES}{\rho S}}$	$u_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$
Torsion à n ventres	$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{GJ}{\rho I_r}}$	$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{GJ}{\rho I_r}}$	$\theta_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

Tableau 3.1 : modes analytiques pour une poutre appuyée-appuyée

$\rho S$  est la masse linéique de la structure (incluant les charges permanentes et les charges variables),  $\rho I_r$  est l'inertie massique de rotation de la structure,  $ES$  la rigidité de traction-compression,  $EI$  la rigidité de flexion,  $GJ$  la rigidité de torsion.

Ces formules supposent que le centre de gravité coïncide avec le centre de torsion, et qu'il n'y a donc pas de couplage flexion-torsion.

*The third and last advantage is that when a structure is excited at one of its natural frequencies, and only in this case, there is resonance. One of the modes then has a much greater response than the others. A problem with several degrees of freedom is then reduced to a problem with a single degree of freedom, making it easy to solve. There is therefore a single unknown in the problem: the amplitude of the resonance. It is crucial to know the resonant frequencies in order to analyze the dynamic problem.*

### 3.2 Dynamic calculation applied to footbridges

### 3.2.1 Calculation of natural frequencies and modes

In practice, modes are calculated with software for complex structures (a condition that in practice is reached as soon as there are a few beams). A certain number of situations can be determined analytically, however. It is also often possible to have several orders of magnitude of frequencies, even in the case of complex structures.

#### 3.2.1.1 Simply supported beam

Analytical calculation is possible for a simply supported beam with constant characteristics (see table 3.1).

Mode	Natural angular frequency	Natural frequency	Modal deformation
Simple bending with n waves	$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$	$f_n = \frac{n^2 \pi}{2L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$	$v_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$
Tension-compression with n waves	$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{ES}{\rho S}}$	$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{ES}{\rho S}}$	$u_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$
Torsion with n waves	$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{GJ}{\rho I_r}}$	$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{GJ}{\rho I_r}}$	$\theta_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

Table 3.1: Analytical modes for a simply supported beam

$\rho S$  is the mass per unit length (including permanent loads and variable loads),  $\rho I_r$  is the rotational inertia per unit mass of the structure,  $ES$  the tensile-compressive stiffness,  $EI$  the flexural stiffness, and  $GJ$  the torsional stiffness.

These formulas suppose that the centre of gravity coincides with the centre of torsion and that there is thus no coupling flexion - torsion.

En pratique, pour des passerelles peu larges (largeur faible en comparaison de la portée) et rigides en torsion (profils fermés), les modes de torsion sont à des fréquences élevées tout comme les modes de traction-compression. Dans ce cas, seule l'analyse des modes de flexion est pertinente. Si les sections sont souples en torsion (cas des profils ouverts), les modes de torsion doivent être pris en compte. Si les sections sont larges (dalles ou bipoutres par exemples), il faut en outre prendre en compte des modes de flexion différentielle ou flexion transversale. (Voir figure 3.1). Dans un tel cas, des modélisations de type « plaques et coques » peuvent s'avérer nécessaire.

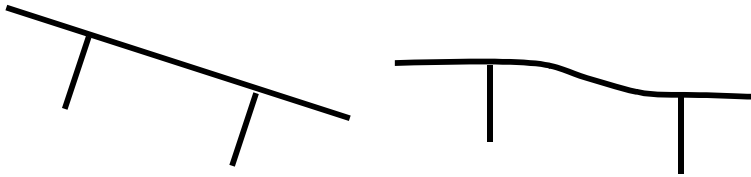
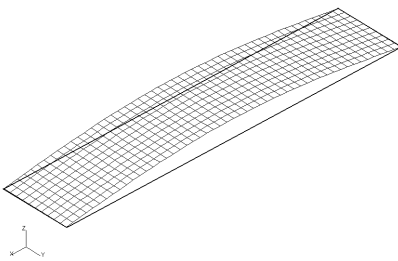
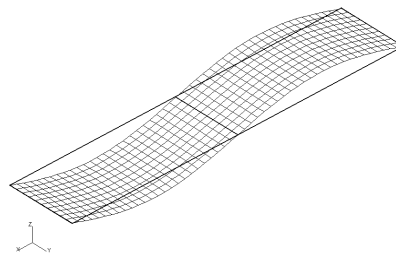


Figure 3.1 : Mode de torsion (à gauche) et mode de flexion différentielle (à droite) à prendre en compte lorsque les profils sont ouverts (à gauche), ou lorsque les sections sont larges (à droite), ou encore dans les deux cas.

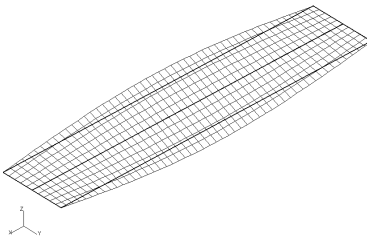
Les figures 3.2 suivantes illustrent les modes de flexion et de torsion rencontrés sur une passerelle dont la largeur correspond au cinquième de la portée.



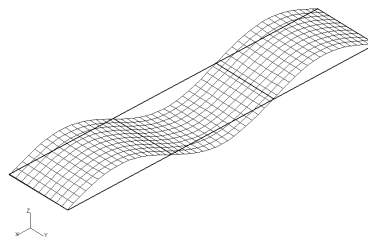
Mode 1 : Flexion 1 ventre



Mode 2 : Flexion 2 ventres



Mode 3 : Torsion 1 ventre



Mode 4 : Flexion 3 ventres

*In practice, for narrow footbridges (narrow compared to span) with high torsional stiffness (closed sections), the torsional modes are at high frequencies, as are the tensile-compressive modes. In this case, only analysis of the flexural modes is relevant. If the sections are torsionally flexible (open sections), the torsional modes must be taken into account. If the sections are wide (slabs or twin-beam structures, for example), the modes of differential bending or lateral bending must also be taken into account (see figure 3.1). In such cases, plate and shell modelling may be necessary.*

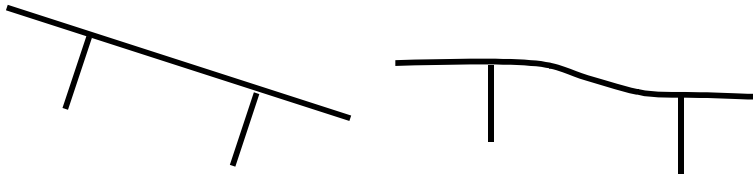
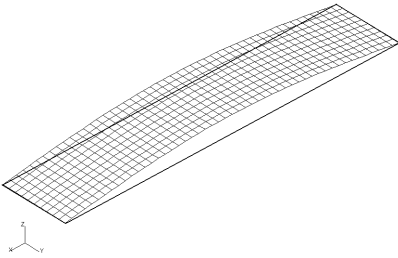
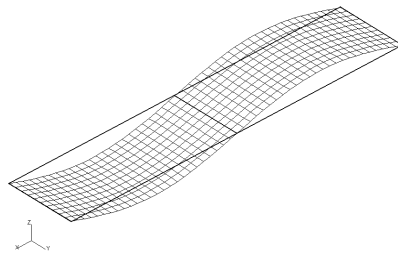


Figure 3.1: Torsional mode (left) and differential bending mode (right) to be taken into account when sections are open (left) and wide (right), or both.

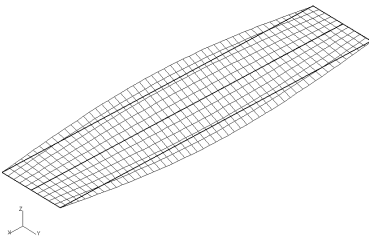
Figures 3.2 below illustrate the bending and torsional modes for a footbridge whose span is five times as long as it is wide.



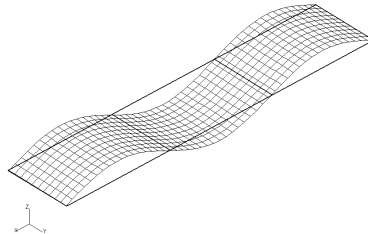
Mode 1: 1-wave bending



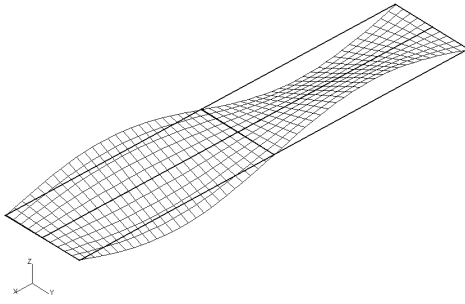
Mode 2: 2-wave bending



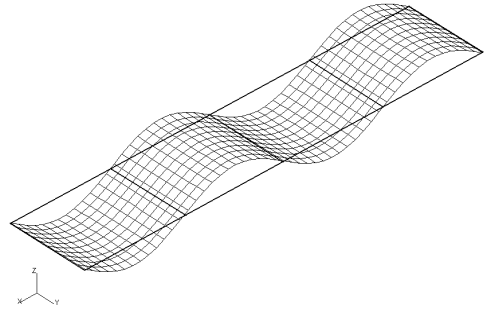
Mode 3: 1-wave torsion



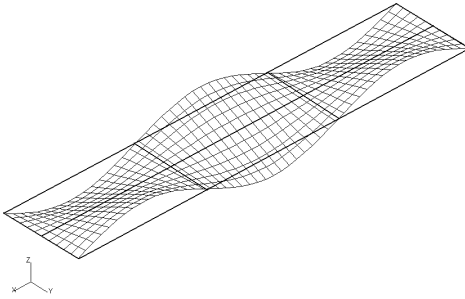
Mode 4: 3-wave bending



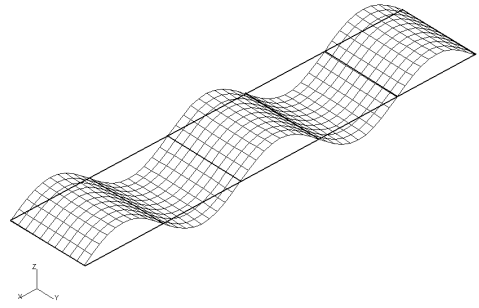
Mode 5 : Torsion 2 ventres



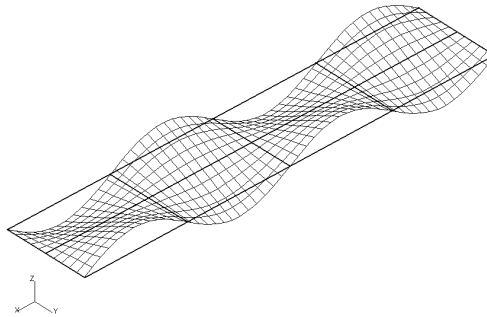
Mode 6 : Flexion 4 ventres



Mode 7 : Torsion 3 ventres

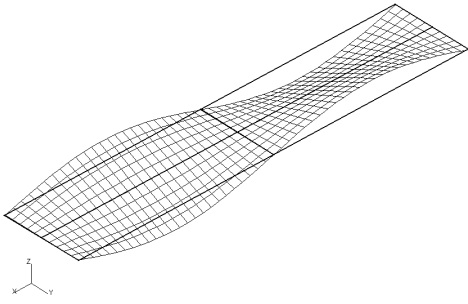


Mode 8 : Flexion 5 ventres

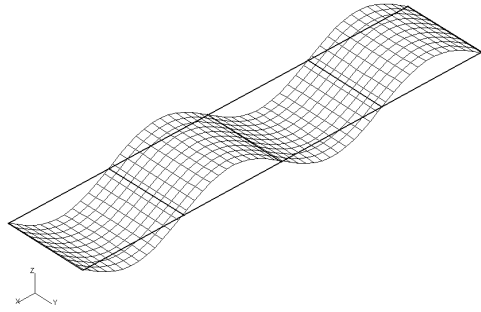


Mode 9 : Torsion 4 ventres

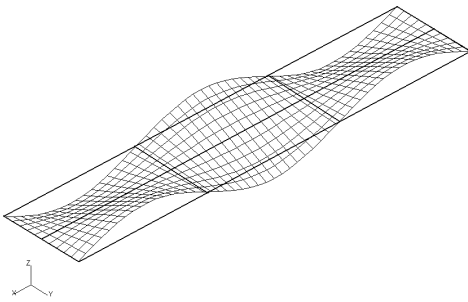
Figure 3.2 Déformées modales d'une passerelle appuyée-appuyée large



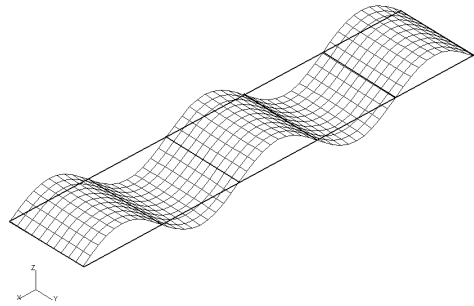
*Mode 5: 2-wave torsion*



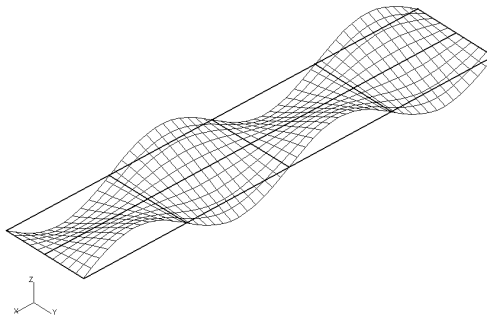
*Mode 6: 4-wave bending*



*Mode 7: 3-wave torsion*



*Mode 8: 5-wave bending*



*Mode 9: 4-wave torsion*

*Figure 3.2 Modal deformation of a wide simply-supported footbridge*

3.2.1.2. Poutre simple avec diverses conditions aux limites

Pour une poutre quelconque, continue sur appuis, avec des conditions aux limites différentes, les pulsations propres sont toujours de la forme  $\omega_n = \frac{\lambda_n}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$  qui peut se décomposer en un facteur dépendant de la forme de la poutre  $\lambda_n$ , un facteur dépendant du matériau  $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$  et un facteur dépendant de la section  $\sqrt{\frac{I}{S}}$ , appelé aussi rayon de giration.

Le tableau suivant, issu des règles CECM 89 ( Ref. [8] ) donne les valeurs du coefficient  $\lambda_n$  en fonction des conditions d'appui :

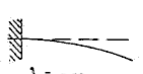
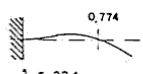
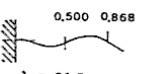
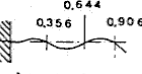
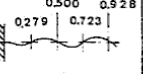
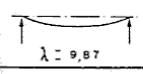
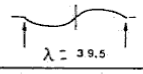
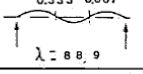
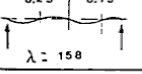
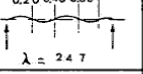
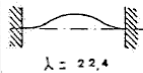
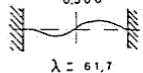
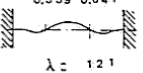
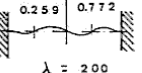
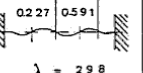
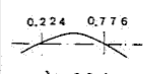
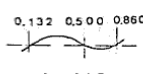
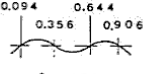
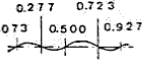
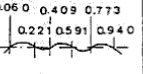

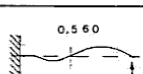
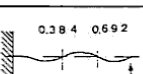
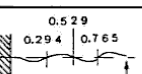
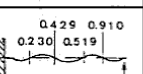
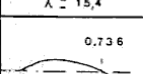
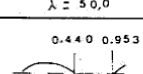
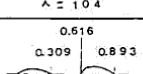
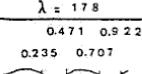
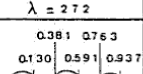
r = 1	r = 2	r = 3	r = 4	r = 5	r > 5
 $\lambda = 3,52$	 $\lambda = 22,4$	 $\lambda = 61,7$	 $\lambda = 121,0$	 $\lambda = 200,0$	$[(2r-1) \frac{\pi}{2}]^2$
 $\lambda = 9,87$	 $\lambda = 39,5$	 $\lambda = 88,9$	 $\lambda = 158$	 $\lambda = 247$	$[r \pi]^2$
 $\lambda = 22,4$	 $\lambda = 61,7$	 $\lambda = 121$	 $\lambda = 200$	 $\lambda = 298$	$[(2r+1) \frac{\pi}{2}]^2$
 $\lambda = 22,4$	 $\lambda = 61,7$	 $\lambda = 121$	 $\lambda = 200$	 $\lambda = 298$	$[(2r+1) \frac{\pi}{2}]^2$
 $\lambda = 15,4$	 $\lambda = 50,0$	 $\lambda = 104$	 $\lambda = 178$	 $\lambda = 272$	$[(4r+1) \frac{\pi}{4}]^2$
 $\lambda = 15,4$	 $\lambda = 50,0$	 $\lambda = 104$	 $\lambda = 178$	 $\lambda = 272$	$[(4r+1) \frac{\pi}{4}]^2$

Tableau 3.2 : Influence des conditions aux limites sur les modes propres

### 3.2.1.2 Simply supported beam with different boundary conditions

For a given continuous beam with different boundary conditions, the natural angular frequencies always take the form  $\omega_n = \frac{\lambda_n}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$  which can be broken down into a factor depending on the shape of the beam  $\lambda_n$ , a factor depending on the material  $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ , and a factor depending on the section  $\sqrt{\frac{I}{S}}$ , also known as the radius of gyration.

The following table taken from the ECCS 89 rules ( Ref. [8] ) gives values for the coefficient  $\lambda_n$  for different bearing conditions:

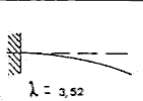
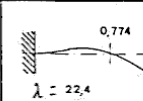
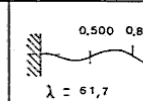
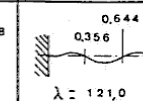
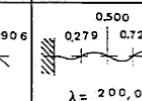
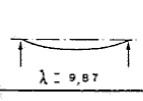
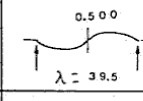
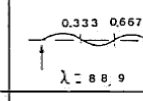
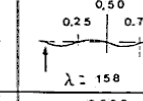
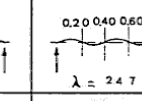
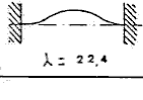
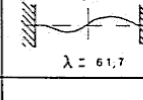
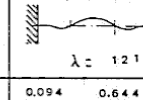
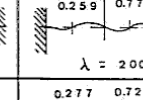
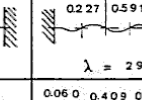
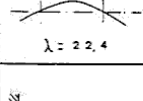
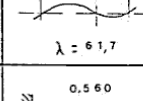
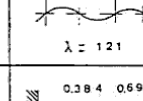
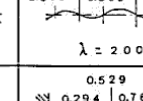
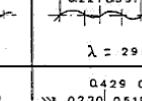
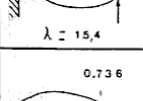
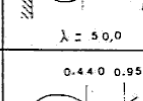
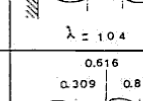
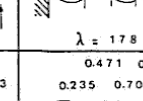
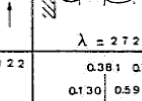
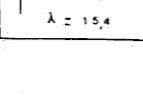
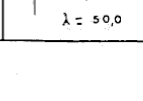
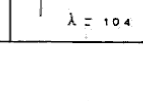
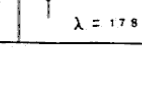
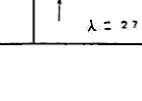
r = 1	r = 2	r = 3	r = 4	r = 5	r > 5
 $\lambda = 3,52$	 $\lambda = 22,4$	 $\lambda = 61,7$	 $\lambda = 121,0$	 $\lambda = 200,0$	$[(2r-1) \frac{\pi}{2}]^2$
 $\lambda = 9,87$	 $\lambda = 39,5$	 $\lambda = 88,9$	 $\lambda = 158$	 $\lambda = 247$	$[r \pi]^2$
 $\lambda = 22,4$	 $\lambda = 61,7$	 $\lambda = 121$	 $\lambda = 200$	 $\lambda = 298$	$[(2r+1) \frac{\pi}{2}]^2$
 $\lambda = 22,4$	 $\lambda = 61,7$	 $\lambda = 121$	 $\lambda = 200$	 $\lambda = 298$	$[(2r+1) \frac{\pi}{2}]^2$
 $\lambda = 15,4$	 $\lambda = 50,0$	 $\lambda = 104$	 $\lambda = 178$	 $\lambda = 272$	$[(4r+1) \frac{\pi}{4}]^2$
 $\lambda = 15,4$	 $\lambda = 50,0$	 $\lambda = 104$	 $\lambda = 178$	 $\lambda = 272$	$[(4r+1) \frac{\pi}{4}]^2$

Table 3.2: Effect of boundary conditions on modes



### 3.2.1.3. Structures quelconques

Avant de réaliser tout calcul numérique de dynamique des passerelles, que ce soit pour les cas simples en utilisant les formules de calcul de fréquences et d'accélération, ou pour la modélisation de structures plus complexes sur des programmes de calcul adaptés, il convient de se poser un certain nombre de questions sur les hypothèses du calcul et le modèle réalisé.

La liste suivante se propose d'énumérer les principaux points sur lesquels il est nécessaire d'être vigilant pour mener à bien la modélisation. Ces points concernent le calcul dynamique proprement dit. Il va de soi que toutes les hypothèses et techniques habituelles de modélisation de structures en statique sont reconduites. Ceci concerne par exemple la pertinence du maillage aux éléments finis, les réflexions sur la modélisation des liaisons pour les ouvrages métalliques etc.

Le modélisateur doit être particulièrement vigilant aux aspects et aux questions suivantes avant de démarrer la modélisation numérique de la structure :

- Structure du tablier

On doit se demander si le platelage est participant ou non. Si non, il ne joue que par sa masse, si oui, il apporte en plus une rigidité qui joue directement sur les fréquences, et un amortissement qui joue directement sur l'amortissement structural global.

Les liaisons entre les différents éléments doivent être décrites et prises en compte : rotules, encastremets, liaisons intermédiaires jouent directement sur les fréquences.

Les soudures ou les boulonnages conduisent à des amortissements différents.

- Appuis

Une attention toute particulière doit être accordée aux appuis. En effet, le comportement dynamique de la structure du tablier des passerelles est souvent pris en compte mais pas celui de ses appuis. Dans la majorité des cas courants, cette simplification est licite car les appuis ont souvent des rigidités plus importantes que les tabliers de passerelle, et des amortissements plus importants. Mais ce n'est pas toujours le cas.

A la base de l'appui, on trouve la fondation, sur pieux ou sur semelle superficielle. Cette fondation a une certaine souplesse liée à celle du sol. En général, elle a aussi un fort amortissement lié au frottement sol / structure. Dans certains cas, elle peut être prise en compte, pour les composantes horizontales et/ou verticales.

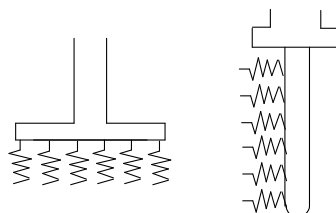


Figure 3.3 Sur semelle ou sur pieux, une fondation a une certaine rigidité  $k_{sol}$

### 3.2.1.3 Structures generally

Before carrying out any numerical calculation of the dynamics of footbridges, whether for simple cases using formulas for calculating frequencies and acceleration or for modelling more complex structures with special design software, a certain number of questions should be asked about the design assumptions and the model prepared.

The following list sets out to give the main points requiring careful attention if modelling is to be done effectively. These points concern the actual dynamic calculation. Needless to say, all the usual assumptions and techniques for static structural modelling still stand. For instance, this concerns the relevance of the finite-element mesh, thinking on modelling of connections for steel structures, etc..

The person in charge of the model must pay special attention to the following aspects and questions before starting numerical modelling of the structure.

- Deck structure

It must be determined whether the decking contributes to structural strength or not. If not, only its mass is taken into account; otherwise it also contributes stiffness, which directly affects frequencies, and damping which directly affects overall structural damping.

Connections between the various structural components must be described and taken into account: hinges, end-fixing, and intermediate connections have a direct effect on frequencies. Welding and bolting result in different damping factors.

- Substructure

Special attention must be paid to the substructure. The dynamic behaviour of a footbridge deck structure is often taken into account, but not that of its substructure. In most standard cases, this simplification is acceptable since the substructure is often more rigid than the decks, and has a greater damping effect. But this is not always true. Beneath the substructure is the foundation, either piles or a shallow footing, for example. The foundation has a certain flexibility related to that of the soil. In general it also has a high damping quality due to soil/structure friction. In some cases it can be taken into account for the horizontal and/or vertical components.

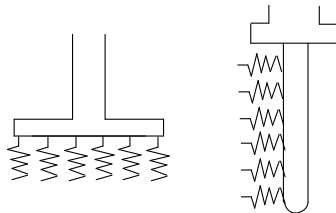


Figure 3.3 Whether on a footing or piles, a foundation has a certain stiffness  $k_{soil}$

Puis on trouve la pile. Si celle-ci est de grande hauteur, sa souplesse devient importante et elle peut intervenir dans les fréquences propres de la structure globale.

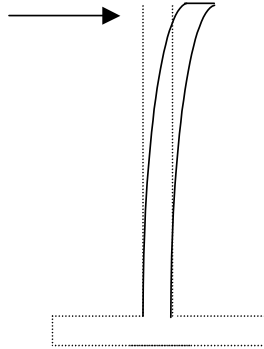


Figure 3.4 : Pile de grande hauteur : La rigidité de ce type d'appui encastré à la base et libre en tête peut être évaluée à  $k_{pile} = 3EI/h^3$  où  $h$  est la hauteur,  $I$  l'inertie et  $E$  le module élastique.

Enfin, il ne faut pas oublier les appareils d'appui et leur effet sur la rigidité globale de la structure et sur l'amortissement global.

Pour un appareil d'appui en élastomère fretté, de dimensions  $a \times a$ , dont l'épaisseur d'un feuillet est  $e$ , de module de cisaillement  $G$  et comportant  $n$  feuillets, la raideur horizontale est :  $k_{appareil\ appui} = G a^2 / n e$

Tous ces éléments intermédiaires peuvent modifier les fréquences propres et les amortissements associés de la passerelle. Le modèle théorique et schématique simplifié peut devenir le suivant :

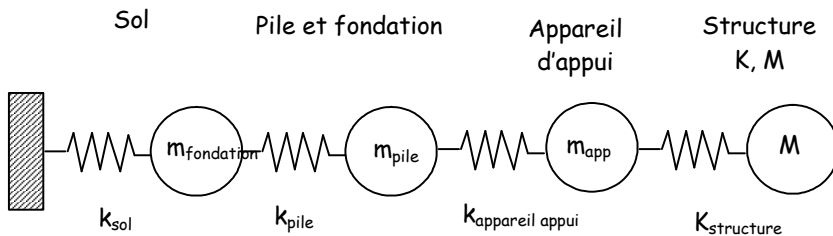


Figure 3.5 : Schéma « simplifié » de la structure jusqu'aux fondations

Dans le cas de systèmes continus, il n'y a pas nécessairement une seule raideur pour chacun des éléments précédents. Un modèle complet, souvent numérique, est alors nécessaire.

Then there comes the pier. If it is tall, its flexibility is an important factor and may affect the natural frequencies of the structure as a whole.

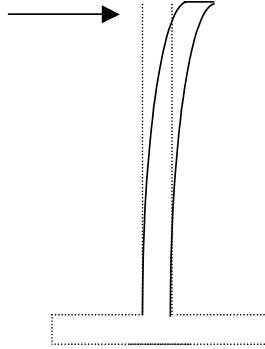


Figure 3.4: Tall pier: the stiffness of this kind of substructure unit—end-fixed at the bottom and free at the top—can be estimated to be  $k_{\text{pier}} = 3EI/h^3$  where  $h$  is its height,  $I$  its inertia, and  $E$  the modulus of elasticity.

Lastly, bearings and their effect on the stiffness of the structure as a whole and on global damping must not be overlooked.

For an elastomeric laminated bearing of dimensions  $a \times a$  and an elastomeric lamination thickness of  $e$ , with a shear modulus  $G$  and  $n$  laminations, the horizontal stiffness is:

$$k_{\text{bearing}} = G a^2 / n e$$

All these intermediate components can modify the natural frequencies and damping ratio of the footbridge. The simplified theoretical schematic model can become the following:

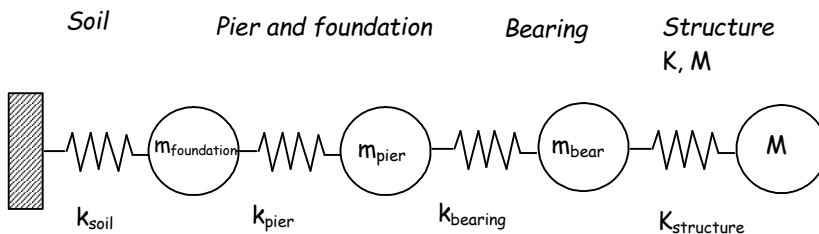


Figure 3.5: "Simplified" structural system down to foundations

In the case of continuous systems there is not necessarily a single stiffness for each of the above components. A complete model—often numerical—is then necessary.

- **Prise en compte de la masse**

Certains logiciels de calcul en dynamique restent confus quant à la prise en compte de la masse. C'est un facteur important qui doit être bien traité par le logiciel en le distinguant des effets statiques du poids propre. Il faut en effet être vigilant par exemple pour ne pas confondre l'inertie de rotation, utile pour le calcul de l'inertie massique en rotation, de l'inertie de torsion, utile pour le calcul de la rigidité en torsion.

De plus, la masse influant directement les fréquences des modes, celle des piétons, qu'ils soient fixes ou mobiles, circulant sur la passerelle doit être prise compte.

Ainsi, pour chaque mode, la fréquence du mode en question est située dans une plage variable comprise entre deux fréquences extrêmes  $f_1$  et  $f_2$ , l'une calculée avec la masse de la structure et des piétons ( $f_1$ ) et l'autre avec la masse de la structure uniquement ( $f_2$ ). Pour les passerelles très légères, ces deux fréquences peuvent être assez éloignées. Il convient donc de les calculer toutes les deux. De même, lors du calcul des accélérations, il y a lieu d'être cohérent entre le cas de chargement réalisé et la masse prise en compte (et de réaliser plusieurs calculs si nécessaire).

- **Prise en compte des amortisseurs**

Le calcul dynamique peut être réalisé avec prise en compte d'amortisseurs dynamiquement accordés (dans le cas d'un recalcul de passerelle existante qu'il faut renforcer par des amortisseurs, ou dans le cas d'une passerelle dont la conception ne permettrait pas de faire l'économie d'amortisseurs).

Ces amortisseurs peuvent être intégrés directement au modèle numérique si celui-ci permet leur modélisation. Comme il s'agit d'ajouter dans la plupart des cas un système masse, ressort, amortissement, les logiciels de calcul le permettent en général aisément.

Le calcul analytique peut être fait mode par mode si l'on connaît les fréquences de la passerelle, ainsi que ses masses modales et raideurs modales. On peut dans ce cas pour chacun des modes calculer les fréquences propres du système suivant :

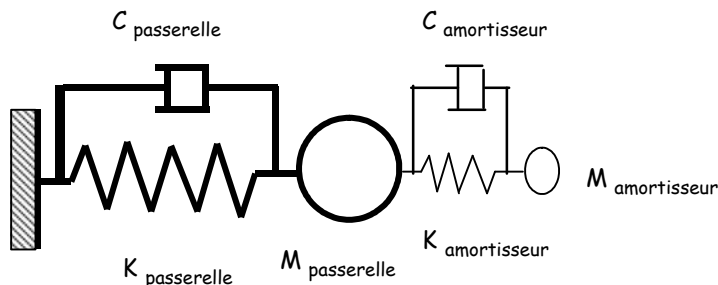


Figure 3.6 : Représentation schématique d'un système Structure - Amortisseur

- Taking account of mass

When it comes to taking account of mass, certain dynamic calculation programs are confused. Mass is an important factor that must be correctly considered by the software, distinguishing it from the static effects of selfweight. The greatest of care must be taken to, for example, not confuse rotational inertia, which is useful for calculating the rotational inertia per unit mass, with the torsional inertia which is useful for calculating torsional stiffness.

In addition, since mass directly affects natural frequencies, the mass of pedestrians on the bridge, whether stationary or moving, must be taken into account.

Thus, for each mode the frequency in question lies within a variable range between two extreme frequencies,  $f_1$  and  $f_2$ , one calculated with the mass of the structure and pedestrians ( $f_1$ ), the other with the mass of the structure alone ( $f_2$ ). For very light footbridges, these two frequencies may be a long way apart.

Both should therefore be calculated. Similarly, when calculating accelerations, there should be coherence between the load case studied and mass taken into account (and several calculations should be run if necessary).

- Taking account of dampers

Dynamic calculation may be done taking account of tuned mass dampers (in the case of an existing footbridge requiring upgrading by retrofitting dampers, or in the case of a footbridge whose design cannot dispense with dampers).

The dampers can be integrated directly into the numerical model if it is possible. As in most cases it is a question of adding a system comprising a mass, spring, and damper, design software generally makes easy provision for this.

Analytical calculation may be carried out mode by mode if the footbridge frequencies are known, together with its modal masses and modal stiffnesses. In this case the natural frequencies of the following system can be calculated for each mode:

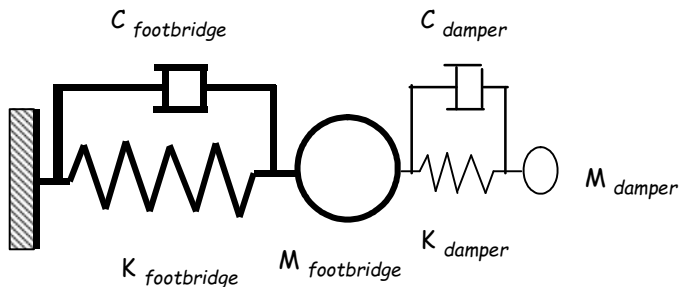


Figure 3.6: Schematic representation of a Structure-Damper system

$M_{passerelle}$  est la masse généralisée du mode considéré de la passerelle,  $K_{passerelle}$  la raideur généralisée du mode considéré de la passerelle et  $C_{passerelle}$  son amortissement généralisé. L'annexe 3 donne la solution analytique de l'amplification dynamique en fonction du rapport de la fréquence excitatrice et de la fréquence initiale de la passerelle. Cette courbe permet de connaître les 2 modes propres ainsi dégénérés, et leurs amplifications (donc les amortissements) associés.

- Particularités

Les points suivants, susceptibles de modifier le modèle dynamique de la passerelle, doivent enfin être pris en compte :

- existence d'une contrainte initiale qui influence les fréquences propres (précontrainte dans le béton précontraint, prétension dans les haubans ou tirants, poussée dans les arcs, etc.) ;
- non-linéarités du fait des câbles ou des tirants, des matériaux, grands déplacements, effets de pendule, etc. ;
- distinction des modes locaux (par exemple, vibration d'un élément de dalle sur une passerelle, sans risque pour une foule de piétons) et des modes globaux ;
- caractéristiques dynamiques des matériaux à prendre en compte (béton, raideur de sol, etc.).

### 3.2.2. Calcul pratique de la réponse au chargement

#### 3.2.2.1. Principe

On rappelle l'équation régissant le comportement du mode  $i$  avec amortissement modal (cf. annexe 1) :

$$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = p_i(t) = \frac{[\phi_i]^T [F(t)]}{m_i}$$

Chacune de ces réponses  $q_i$  se calcule séparément des autres, puis on déduit la réponse globale en recomposant les modes. Si la fonction  $[F(t)]$  est harmonique ( $[F(t)] = [F_0] \sin(\omega t)$ ), à la fréquence de l'un des modes (le mode  $j$  par exemple), il y a alors résonance de ce mode. La réponse  $q_j$  du mode  $j$  est beaucoup plus importante que les autres et la réponse globale est, après une période transitoire, proche de

$$[X(t)] = \sum_{i=1}^n [\phi_i] q_i(t) \approx [\phi_j] q_j(t)$$

$M_{\text{footbridge}}$  is the generalized mass of the footbridge mode considered,  $K_{\text{footbridge}}$  the generalized stiffness of the footbridge mode considered, and  $C_{\text{footbridge}}$  its generalized damping. Appendix 3 gives the analytical solution of dynamic amplification versus the ratio between the exciting frequency and the initial frequency of the bridge. This curve serves to identify the two resulting degenerated modes, together with the associated amplifications (and therefore damping).

- Special features

The following points which are likely to modify the dynamic model of a footbridge must be taken into account:

- existence of an initial stress affecting frequencies (prestress in post-tensioned concrete, prestress in stay cables or ties, thrust in arches, etc.);
- non-linearities due to cables or ties, materials, large displacements, pendulum effects, etc.;
- distinction between local modes (e.g. vibration of a slab on the bridge, entailing no risk for a crowd) and global modes;
- dynamic characteristics of the materials to be taken into account (concrete, soil stiffness, etc.).

### 3.2.2 Practical calculation of response to loading

#### 3.2.2.1 Principle

The equation for behaviour of mode  $i$  with modal damping is (cf. appendix 1):

$$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = p_i(t) = \frac{[\phi_i]^T [F(t)]}{m_i}$$

Each of these responses,  $q_i$ , is calculated separately from the others, then the global response is deduced by recomposing the modes. If function  $[F(t)]$  is harmonic ( $[F(t)] = [F_0] \sin(\omega t)$ ) at the frequency of one of the modes (mode  $j$  for example), then there is resonance in that mode. The response  $q_j$  of mode  $j$  is much greater than the others and, after a transient period, the global response is close to:

$$[X(t)] = \sum_{i=1}^n [\phi_i] q_i(t) \approx [\phi_j] q_j(t)$$



L'amplitude de la réponse dynamique  $q_j(t)$ , après la période transitoire, est obtenue en multipliant la réponse statique ( celle obtenue comme si le chargement était constant et égal à  $[F_0]$  c'est-à-dire telle que :  $\omega_j^2 q_{j\text{statique}} = \frac{^t[\phi_j][F_0]}{m_j}$  ) par le coefficient d'amplification dynamique  $\frac{1}{2\xi_j}$ .

La réponse obtenue est donc :

$$\text{Déplacement : } q_j(t) = -\frac{1}{2\xi_j} \frac{1}{\omega_j^2} \frac{^t[\phi_j][F_0]}{m_j} \cos(\omega_j t) + \text{réponse transitoire}$$

$$\text{Accélération : } \ddot{q}_j(t) = \frac{1}{2\xi_j} \frac{^t[\phi_j][F_0]}{m_j} \cos(\omega_j t) + \text{réponse transitoire}$$

On constate que le déplacement et l'accélération sont déphasés d'un quart de période propre par rapport à l'excitation. La vitesse est quant à elle en phase avec l'excitation.

La réponse globale en déplacement s'écrit :

$$[X(t)] = [X]_{\text{statique}} + q_j(t) [\phi_j]$$

et en accélération :

$$[\ddot{X}(t)] = \ddot{q}_j(t) [\phi_j]$$

On rappelle que les différents calculs présentés dans ce guide sont basés sur la notion de nombre de piétons équivalents, qui est le nombre de piétons fictifs qui sont tous en phase, à la fréquence propre de la passerelle, régulièrement espacés, dont l'action est dans le même sens que la déformée modale en chaque point, et surtout lorsqu'on se place à la résonance maximale, c'est à dire en régime établi. Par conséquent, la réponse transitoire n'est pas intéressante et seule l'amplitude de la réponse permanente  $\frac{1}{2\xi_j} \frac{^t[\phi_j][F_0]}{m_j} [\phi_j]$  est intéressante, avec  $m_j = ^t[\phi_j][M][\phi_j]$

### 3.2.2.2. Positionnement du chargement

Comme cela est spécifié dans le chapitre précédent, le chargement doit être tel que l'amplitude de la force doit être du même signe que la déformée modale.

Dans le cas de modes à plusieurs ventres dans le sens longitudinal ou transversal, cela signifie que l'amplitude de la force doit avoir la forme donnée figure 3.7 :

The amplitude of the dynamic response  $q_j(t)$  after the transient period is obtained by multiplying the static response (that obtained assuming the load to be constant and equal to  $[F_0]$ , i.e. such that:  $\omega_j^2 q_{j\text{statique}} = \frac{^t[\phi_j][F_0]}{m_j}$ ) by the dynamic amplification factor  $\frac{1}{2\xi_j}$ .

The response obtained is therefore:

$$\text{Displacement: } q_j(t) = -\frac{1}{2\xi_j} \frac{1}{\omega_j^2} \frac{^t[\phi_j][F_0]}{m_j} \cos(\omega_j t) + \text{transient response}$$

$$\text{Acceleration: } \ddot{q}_j(t) = \frac{1}{2\xi_j} \frac{^t[\phi_j][F_0]}{m_j} \cos(\omega_j t) + \text{transient response}$$

It can be seen that displacement and acceleration are a quarter eigenperiod out of phase with excitation. Velocity is in phase with the excitation.

The global displacement response is:

$$[X(t)] = [X]_{\text{statique}} + q_j(t) [\phi_j]$$

and the global acceleration response is:

$$[\ddot{X}(t)] = \ddot{q}_j(t) [\phi_j]$$

It should be remembered that the calculations presented in this guide are all based on the notion of the number of equivalent pedestrians, i.e. the number of regularly spaced notional pedestrians all stepping in phase at the natural frequency of the bridge whose action is in the same direction as the modal deformation at each point, especially for maximum resonance, i.e. in an established regime. Consequently the transient response is of no interest and only the amplitude of the permanent response  $\frac{1}{2\xi_j} \frac{^t[\phi_j][F_0]}{m_j} [\phi_j]$  with  $m_j = ^t[\phi_j][M][\phi_j]$  is of interest.

### 3.2.2.2 Position of load

As specified in the previous chapter, loading must be such that the amplitude of the force has the same sign as the modal deformation.

In the case of modes with several loops in the longitudinal or lateral direction, this means that the amplitude of the force must have the shape shown in figure 3.7:

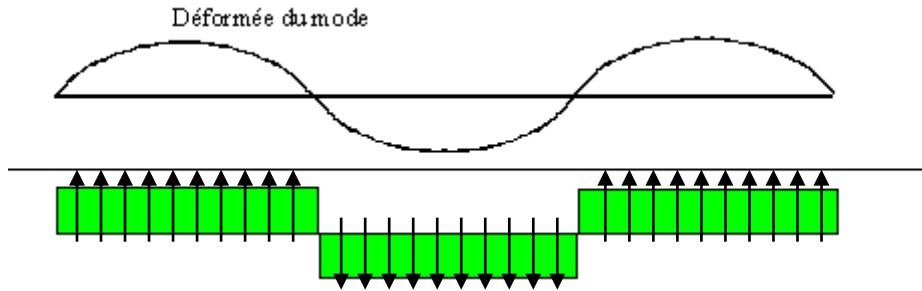


Figure 3.7 : Signe de l'amplitude du chargement dans le cas d'un mode à plusieurs ventres

Dans le cas de modes de torsion à plusieurs ventres, l'amplitude de la force doit avoir la forme donnée figure 3.8

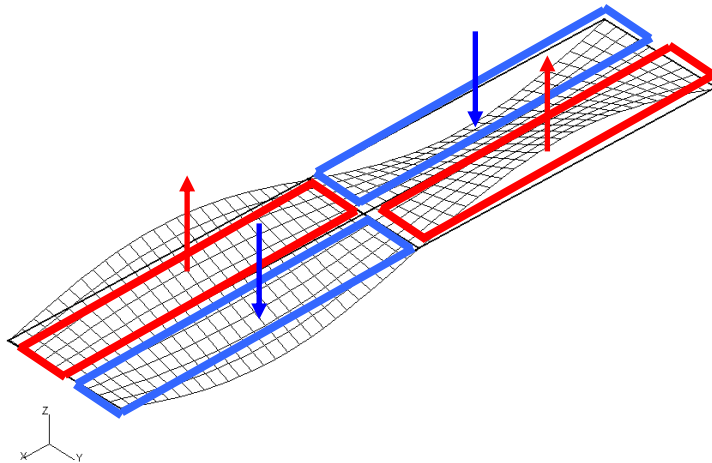


Figure 3.8 : Signe de l'amplitude du chargement dans le cas d'un mode de torsion à plusieurs ventres. En rouge sont notées les zones dans lesquelles l'amplitude du chargement est de signe positif, et en bleu les zones dans lesquelles l'amplitude du chargement est de signe négatif.

### 3.2.2.3. Calcul pratique dans le cas général

Dans le cas général, il faut utiliser un logiciel de calcul dynamique pour évaluer les fréquences propres, et aussi les accélérations obtenues avec les différents chargements. Plusieurs logiciels prenant en compte le calcul dynamique existent. Si la plupart permettent le calcul des modes propres et fréquences propres, en revanche, il en existe moins qui permettent le calcul temporel des accélérations sous chargement variable. Ceci vient du fait que ces logiciels, qui font des calculs en dynamique, sont en pratique surtout orientés vers le calcul sismique, et que dans ce type de calcul, on se contente en général du calcul des modes propres, et de l'application des spectres de réponses normalisés qui évitent tout calcul dynamique réel.

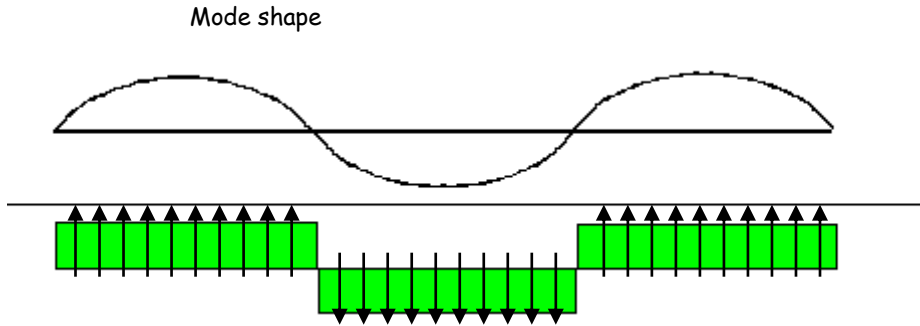


Figure 3.7: Sign of the amplitude of loading in the case of a mode with several waves

In the case of torsional modes with several waves, the amplitude of the force must have the shape shown in figure 3.8.

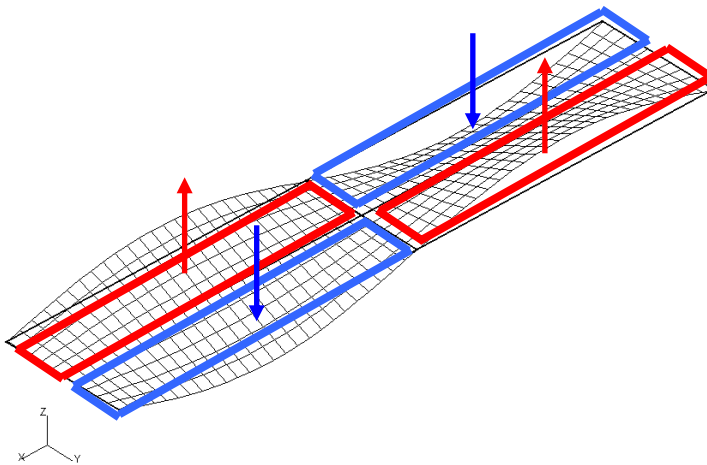


Figure 3.8: Sign of the amplitude of loading in the case of a torsional mode with several loops. Areas where the amplitude of loading has the positive sign are in red, and areas where it is negative are in blue.

### 3.2.2.3 Practical calculation in the general case

In the general case a dynamic calculation program must be used to assess the frequencies and also the accelerations obtained with different loadings. Several programs allowing dynamic calculation are commercially available. While most of them can calculate modes and frequencies, there are fewer that allow for time-domain calculation of accelerations under variable loading. This is because although they perform dynamic calculation, in practice these programs are above all intended for seismic calculations, in which it is generally sufficient to calculate modes and to apply normalized response spectra, making real dynamic calculation unnecessary.

Dans le cas des passerelles piétonnes, ces logiciels orientés vers le séisme ne sont pas nécessairement pertinents. Néanmoins, on peut utiliser les résultats qu'ils fournissent pour calculer les accélérations maximales, de la manière explicitée ci-après :

- Logiciels calculant uniquement les modes propres et caractéristiques modales.

Pour ce type de logiciel, il convient, pour chaque mode propre dans la plage à risque de récupérer les informations modales : déformée en tout point du mode, fréquence propre, amortissement modal (si possible), masse généralisée. Il convient d'être vigilant sur la notion de masse généralisée qui est différente de la masse modale, souvent donnée par les logiciels.

En effet, la masse généralisée est la grandeur  $m_j = \frac{1}{\phi_j^T [M] \phi_j}$  qui intervient dans l'équation modale de la dynamique et qui dépend de la normalisation que l'on choisit (le résultat final en est cependant indépendant) alors que la masse modale, dont l'expression est  $\frac{(\phi_j^T [M] \Delta)^2}{\phi_j^T [M] \phi_j}$ , est une grandeur couramment utilisée dans les calculs sismiques pour

évaluer le nombre de modes à prendre en compte pour bien représenter la réponse à une sollicitation sismique. En pratique, cela permet d'éliminer les modes propres de masse modale faible par rapport à la masse de la structure. Mais la masse modale n'a aucune réalité physique par rapport à la masse généralisée du mode qui représente bien la masse vibrante dans le mode considéré, étant donnée la norme choisie.

En pratique, pour le mode  $j$  considéré, il faut demander au logiciel de fournir pour chaque maille  $i$  du modèle les valeurs de déplacements de la déformée modale  $V_{ij}$ , ainsi que la valeur de la fréquence propre. On forme ensuite la masse généralisée par  $m_j = \sum_i M_i V_{ij}^2$  où  $M_i$  est la masse de la maille  $i$ .

On forme ensuite le chargement modal, projection du chargement sur le mode en écrivant

$$f_j = \sum_i \bar{F}_i V_{ij} \text{ où } \bar{F}_i \text{ représente la valeur de la force sur la maille } i. \text{ Elle s'écrit}$$

$\bar{F}_i = \bar{F}_i \cos(\omega t)$ . Compte-tenu du mode de chargement des poutres,  $\bar{F}_i$  a le même signe que  $V_{ij}$ . Sa valeur est donnée dans le chapitre 2. Le second membre de l'équation modale s'écrit alors  $\frac{f_j}{m_j}$ . L'amplitude de la réponse en accélération, à la résonance, s'écrit

$$\text{ensuite simplement, au niveau de la maille } k : \frac{1}{2\xi_j} \frac{f_j}{m_j} V_{kj} = \frac{1}{2\xi_j} \frac{\sum_i \bar{F}_i V_{ij}}{\sum_i M_i V_{ij}^2} V_{kj} \text{ (grandeur}$$

indépendante de la norme choisie pour les modes. En effet, si on multiplie tous les  $V_{ij}$  par une même constante, on ne modifie pas le résultat).

Although earthquake-based software is not necessarily relevant to footbridges, the results it provides can be used to calculate maximum acceleration in the manner explained below.

- Software calculating only modes and modal characteristics

For this kind of program, modal information must be gathered for each eigenmode in the risk range: deformation at all points of the mode, natural frequency, modal damping (if possible), generalized mass. Care must be taken with the notion of generalized mass which is not the same as the modal mass often given by software. Generalized mass is the quantity  $m_j = \int [\phi_j] [M] [\phi_j]$  involved in the modal equation of dynamics and which depends on the normalization selected (the final result is independent of this

nevertheless) whereas modal mass, which is expressed as  $\frac{(\int [\phi_j] [M] [\Delta])^2}{\int [\phi_j] [M] [\phi_j]}$ , is a quantity

commonly used in seismic calculations to assess the number of modes to be taken into account to properly represent the response to a seismic loading. In practice, this makes it possible to eliminate modes of low modal mass relative to the mass of the structure. But modal mass has no physical reality compared to the generalized mass of the mode which represents the vibrating mass in the mode considered, bearing in mind the norm chosen.

In practice, for the mode  $j$  considered, the program must be asked to provide the values of displacement of modal deformation,  $V_{ij}$ , and the value of the natural frequency for each mesh,  $i$ , of the model. The generalized mass is then formed with  $m_j = \sum_i M_i V_{ij}^2$

where  $M_i$  is the mass of the mesh  $i$ .

The modal loading is formed next. This is a projection of the load on the mode expressed

as  $f_j = \sum_i F_i V_{ij}$  where  $F_i$  is the value of the force at mesh  $i$ . It is written  $F_i = \bar{F}_i \cos(\omega t)$ .

Given the beam loading mode,  $\bar{F}_i$  has the same sign as  $V_{ij}$ . Its value is given in chapter 2.

The second side of the modal equation is written  $\frac{f_j}{m_j}$ . The amplitude of the acceleration

response at resonance, for mesh  $k$ , is then simply written:  $\frac{1}{2\xi_j} \frac{f_j}{m_j} V_{kj} = \frac{1}{2\xi_j} \frac{\sum_i \bar{F}_i V_{ij}}{\sum_i M_i V_{ij}^2} V_{kj}$

(quantity independent of the norm chosen for the modes; if all the  $V_{ij}$  values are multiplied by a given constant, the result is unchanged).

- Logiciels permettant le calcul dynamique temporel.

Pour les logiciels permettant le calcul dynamique temporel, il n'est pas nécessaire d'utiliser les artifices présentés ci-dessus.

On peut soit définir un chargement variable dans le temps de la forme  $q\cos(\omega t)$ , en ayant préalablement déterminé exactement les fréquences propres, et en regardant la réponse dynamique au bout d'un temps suffisamment long (en pratique, temps au bout duquel l'amplitude des accélérations devient quasi constante). Il faut par contre bien s'assurer que la fréquence du chargement correspond exactement à la fréquence propre de la structure, ce qui est un risque pour le calcul.

La seconde méthode, plus facile à mettre en œuvre et moins risquée, consiste à sélectionner pour le calcul dynamique uniquement le mode considéré (il faut pouvoir désactiver les autres modes), puis lui appliquer le même chargement que précédemment, mais supposé constant (donc  $q$  seul sans la partie temporelle) ce qui est plus aisé à définir. Puis on détermine le déplacement obtenu au bout d'un temps suffisamment long (c'est-à-dire lorsque les vibrations se sont amorties) et on le multiplie par  $\omega_j^2 \frac{1}{2\xi_j}$  pour

avoir l'accélération à la résonance du point considéré.

### 3.2.2.4. Calcul théorique pour une poutre sur deux appuis

Pour une passerelle d'inertie constante sur deux appuis, les grandeurs caractéristiques de la passerelle se calculent aisément comme le montre le tableau 3.3.

Type de grandeur	Expression littérale
Pulsations propres	$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$
Fréquences propres	$f_n = \frac{n^2 \pi}{2L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$
Flèche maximale	$v_{\max} = \frac{1}{2\xi_n} \frac{1}{n^4} \frac{4FL^4}{EI\pi^5}$
Moment maximal	$M_{\max} = \frac{1}{2\xi_n} \frac{1}{n^2} \frac{4FL^2}{\pi^3}$
Effort tranchant maximal	$V_{\max} = \frac{1}{2\xi_n} \frac{1}{n} \frac{4FL}{\pi^2}$
Accélération maximale	$\text{Accélération}_{\max} = \frac{1}{2\xi_n} \frac{4F}{\pi \rho S}$

Tableau 3.3 : Grandeurs modales pour une poutre appuyée-appuyée soumise à un chargement sur une passerelle en fonction du mode à  $n$  ventres.  $F$  représente l'amplitude de la force linéique.

- Software allowing time-domain dynamic calculation

When using software capable of time-domain dynamic calculation the above contrivances are not necessary.

In one method, a time-dependent variable load can be defined in the form  $q\cos(\omega t)$ , the frequencies having been precisely determined beforehand, and the dynamic response is noted after a sufficiently long time (in practice, the time at which the amplitude of accelerations becomes quasi-constant). However, it must be definitely ascertained that the load frequency is exactly the same as the natural frequency of the structure, but this entails a risk of numerical instability.

The second method—which is easier to use and less risky—consists in selecting only the mode considered for the dynamic calculation (it must be possible to deactivate the other modes) and applying to it the same load as previously, only assumed to be constant (therefore only  $q$  without the time-domain part). Then the displacement obtained after a sufficiently long time (i.e. when vibrations have died out) is determined and multiplied by  $\omega_j^2 \frac{1}{2\xi_j}$  to obtain the resonant acceleration of the point considered.

### 3.2.2.4. Theoretical calculation for a beam on two supports

For a footbridge of constant inertia on two supports, the characteristic quantities of the bridge are easily calculated as shown in table 3.3.

Type of quantity	Literal expression
Natural angular frequencies	$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$
Natural frequencies	$f_n = \frac{n^2 \pi}{2L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$
Maximum deflection	$v_{\max} = \frac{1}{2\xi_n} \frac{1}{n^4} \frac{4FL^4}{EI\pi^5}$
Maximum moment	$M_{\max} = \frac{1}{2\xi_n} \frac{1}{n^2} \frac{4FL^2}{\pi^3}$
Maximum shearing force	$V_{\max} = \frac{1}{2\xi_n} \frac{1}{n} \frac{4FL}{\pi^2}$
Maximum acceleration	$\text{Accélération}_{\max} = \frac{1}{2\xi_n} \frac{4F}{\pi \rho S}$

Table 3.3: Modal quantities for a loaded simply-supported beam on two supports for the  $n$ -wave mode.  $F$  is the amplitude of the force per unit length.



## **4. CAHIER DES CHARGES ÉTUDES ET TRAVAUX, ÉPREUVES**

### **4.1. Exemples d'éléments pour un cahier des charges d'études de dynamique des passerelles**

Le cahier des charges doit préciser que le dimensionnement de la passerelle est réalisé conformément aux recommandations du guide Sétra/AFGC sur le comportement dynamique des passerelles piétonnes.

Le maître d'ouvrage doit néanmoins spécifier :

- La classe de la passerelle (I à IV)
- Le niveau de confort acceptable (maximal, moyen, minimal)

### **4.2. Exemples d'éléments à insérer dans le CCTP Travaux d'une passerelle**

Il est conseillé d'annexer le présent guide au CCTP « Travaux » d'une passerelle et de préciser que les études d'exécution doivent suivre les recommandations de ce guide. Il faut donc à nouveau préciser :

- La classe de la passerelle (I à IV)
- Le niveau de confort acceptable (maximal, moyen, minimal)

De plus, si les études montrent que le comportement dynamique n'est assuré qu'avec la présence d'amortisseurs, ou bien avec des hypothèses d'amortissements importants, vraisemblables mais non garantis, il est nécessaire de faire procéder à des épreuves dynamiques (Voir paragraphe suivant) de façon à valider ces hypothèses ou amortisseurs.

### **4.3. Épreuves dynamiques ou essais sur des passerelles**

La réalisation d'épreuves dynamiques sur une passerelle neuve, ou d'essais sur une passerelle existante est une opération lourde, très coûteuse, qui ne doit s'envisager que dans des cas bien particuliers, et qui doit être réalisée par des entreprises compétentes dans le domaine.

Une telle opération s'envisage sur une passerelle neuve quand les études n'ont pas réussi à démontrer que l'ouvrage satisfait entièrement aux critères précédents, quand la conception a imposé l'usage d'amortisseurs qu'il faut valider, ou encore quand le comportement dynamique est assuré avec des hypothèses d'amortissements supérieurs à ceux recommandés dans le présent guide, mais vraisemblables. Si le comportement

dynamique est assuré sans amortisseurs et selon les recommandations du présent guide, il est possible de s'abstenir de réaliser des essais.

## 4. SPECIFICATIONS FOR DESIGN, CONSTRUCTION, AND TESTS

### 4.1 Examples of requirements for specifications for dynamic footbridge studies

*The specifications must stipulate that a footbridge is to be designed in accordance with the Sétra/AFGC recommendations on the dynamic behaviour of footbridges.*

*The project owner must nevertheless specify:*

- *the footbridge class (I to IV)*
- *the acceptable comfort level (maximum, intermediate, minimum).*

### 4.2 Examples of requirements to be included in the special technical specifications for footbridge construction

*It is recommended that this guide be appended to the special technical specifications for construction of a footbridge and that it be specified that the construction design studies must comply with its recommendations. Once again, the following must be specified:*

- *the footbridge class (I to IV)*
- *the acceptable comfort level (maximum, intermediate, minimum).*

*In addition, if the studies show that appropriate dynamic behaviour can be achieved only with dampers, or with probable but unguaranteed assumptions of major inherent damping, dynamic tests must be carried out (see next paragraph) to validate the assumptions or dampers.*

### 4.3 Dynamic tests or tests on footbridges

*It is complex and costly to carry out dynamic tests on a new footbridge or tests on an existing footbridge, and it is therefore something that should be envisaged only in very special cases. Moreover, it should only be carried out by contractors with competence in the field.*

*Such an operation can be envisaged for a new footbridge when the design studies have not succeeded in showing that the bridge entirely meets the above criteria, when the design calls for installation of dampers which have to be validated, or when its dynamic behaviour is appropriate only with damping assumptions in excess of those recommended*

*in this guide, but realistic nonetheless. If appropriate dynamic performance is guaranteed without dampers, and in accordance with the recommendations of this guide, testing need not be carried out.*

Dans le cas où des amortisseurs sont prévus dès l'origine, il est vivement recommandé de mesurer les fréquences et amortissements des modes de la passerelle terminée avant le dimensionnement final des amortisseurs, pour ajuster éventuellement ce dimensionnement. Le planning de construction devra en tenir compte.

Sur une passerelle existante, une campagne d'essais peut être programmée quand l'ouvrage a eu des problèmes de vibrations plusieurs fois au cours de son existence, et qu'une amélioration est nécessaire.

Les paragraphes suivants donnent des recommandations pour mener à bien une telle campagne d'essais. En fonction de l'importance de l'ouvrage, de l'importance des phénomènes rencontrés et aussi de ce que l'on veut mesurer, on peut adapter ces recommandations.

Au niveau du matériel, il faut prévoir les systèmes suivants :

- mise en place de capteurs dynamiques, (accéléromètres ou mesures de déplacements), ainsi qu'une centrale d'acquisition, et un système d'enregistrement. Les accéléromètres doivent être suffisamment nombreux et doivent être positionnés aux ventres des modes théoriques.
- mise en place d'un système de surveillance visuelle de la passerelle afin de pouvoir relier les mesures dynamiques à l'image de la passerelle. Il est nécessaire que ce système soit synchronisé avec la centrale d'acquisition.
- Utilisation éventuelle d'un excitateur mécanique (de type balourd par exemple) afin de pouvoir caractériser précisément les modes propres, fréquences propres, masses modales et amortissements modaux de la passerelle. Ce système doit permettre une excitation fiable et contrôlée, horizontale et/ou verticale (suivant la passerelle), à des fréquences programmables couvrant la gamme 0,5 Hz / 3 Hz au minimum.

Les essais se déroulent de la manière suivante :

#### 4.3.1. Etape 1 : Caractérisation des modes propres

Cette étape est réalisée à l'aide de l'excitateur dynamique si l'on veut avoir une bonne précision quant aux grandeurs mesurées. En l'absence d'excitateur dynamique, il est possible de mesurer les vibrations de la passerelle, en service normal, et d'en déduire avec des outils informatiques adaptés les fréquences propres ainsi que les déformées propres. Dans ce cas, il se peut que certains modes soient oubliés. De plus, il est possible de mesurer les amortissements à l'aide de la méthode du décrétement logarithmique, mais pas les masses généralisées, sauf si on utilise un excitateur dynamique. L'analyse dynamique est tout de même possible, mais moins précise.

#### 4.3.2. Etape 2 : Essais de foule.

Des essais de foule sont à programmer, car ce sont eux qui permettent de valider effectivement le comportement dynamique et la validité des amortisseurs. Le nombre de piétons est à déterminer en fonction de la taille de la passerelle, de ses caractéristiques théoriques, mais aussi de la complexité de la gestion d'une telle foule. Plusieurs dizaines de piétons sont tout de même nécessaires pour avoir un essai représentatif.

*If dampers are an integral part of the design, it is strongly recommended that the frequencies and damping of the modes of the completed bridge be measured before the final design of the dampers is settled, so that damping can be adjusted if necessary. The construction schedule should take this into account.*

*For an existing footbridge, a test campaign may be programmed if the bridge has experienced vibration problems several times in its lifetime and improvement is necessary.*

*The following paragraphs give recommendations for carrying out such a test campaign. Depending on the size of the bridge, the magnitude of the phenomena encountered, and what is to be measured, these recommendations may be adapted.*

*In terms of equipment, the following systems are required:*

- installation of dynamic sensors (accelerometers or displacement measurements) and a data acquisition and logging unit. There must be sufficient numbers of accelerometers and they must be placed at the waves of the theoretical modes.*
- installation of a visual surveillance system to enable the dynamic measurements to be linked to an image of the bridge. This system must be synchronized with the data acquisition and logging unit.*
- possibly, use of a mechanical exciter (revolving eccentric mass, for example) for precisely characterizing the modes, natural frequencies, modal masses, and modal damping of the footbridge. This system must be suitable for reliable, controlled, horizontal and/or vertical (depending on the bridge) excitation at frequencies programmable in the range from 0.5 Hz / 3 Hz at least.*

*Tests are carried out as described below.*

#### **4.3.1 Step 1: Modal characterization of modes**

*This step should be carried out with a dynamic exciter if good measurement accuracy is to be obtained. In the absence of a dynamic exciter it is possible to measure footbridge vibration under normal service conditions and to deduce the natural frequencies and the mode shapes with suitable software. In this case, some modes may be overlooked. In addition, it is possible to measure damping with the logarithmic decrement method, but not generalized masses, unless a dynamic exciter is used. Dynamic analysis is also a possibility, but is less precise.*

#### **4.3.2 Step 2: Crowd tests**

*Crowd tests have to be scheduled, for it is they which will effectively validate the dynamic behaviour and the validity of dampers. The number of pedestrians should be determined in accordance with the size of the footbridge, its theoretical characteristics, and the complexity of managing the crowd. Several dozen pedestrians are required for a representative test.*

Les essais peuvent inclure les éléments suivants :

- Marches aléatoires, circulaires sur la passerelle et en continu ou bien d'une extrémité à l'autre.
- Marches cadencées à l'aide d'un métronome, aux fréquences propres de la passerelle.
- Marches cadencées, puis arrêt brutal de la marche afin de mesurer les amortissements de la passerelle.
- Courses, sauts, genuflexions afin de tester la passerelle sous sollicitations extrêmes.

Les essais doivent être préparés de façon à définir a priori des seuils d'alerte au-delà desquels les essais doivent être arrêtés.

En présence d'amortisseurs, les essais doivent être conduits avec les amortisseurs en fonctionnement et bloqués dans un second temps de façon à déterminer leur efficacité réelle.

Les essais sont réussis si les vibrations ressenties lors du passage de foules désynchronisées conduisent à des vibrations acceptables par le maître d'ouvrage, tolérables en cas de foules synchronisées, et pas trop intolérables en cas d'essais de chargement exceptionnels (sauts, courses, genuflexions, vandalisme etc.). La décision revient dans tous les cas au maître d'ouvrage qui doit juger du niveau de confort de sa passerelle en fonction de ses besoins.

*Tests may include the following:*

- random walking, cycled continuously over the bridge, or successively from one end to the other.*
- walking at a stepping frequency governed by a metronome set to the natural frequencies of the bridge.*
- walking at a controlled stepping frequency, then a sudden stop, to measure the damping of the bridge.*
- running, jumping, knee-bends to test the bridge under extreme loading conditions.*

*The tests must be prepared in order to identify the assumed alert thresholds at which testing must be stopped.*

*If there are dampers, the tests can be continued with the dampers operating, and then with them blocked in order to determine their real efficacy.*

*The tests will be successful if the vibrations felt are acceptable for the project owner when unsynchronized crowds cross the bridge, are bearable in the event of synchronized crowds, and not too unbearable for exceptional loading tests (jumping, running, knee-bending, vandalism, etc.). In all cases the final decision lies with the project owner who must assess the level of comfort on the bridge in accordance with his requirements.*

## **ANNEXES**

**Annexe 1 : Rappels de dynamique des structures**

**Annexe 2 : Modélisation de la charge piétonne**

**Annexe 3 : Systèmes amortisseurs**

**Annexe 4 : Exemples de passerelles**

**Annexe 5 : Exemples de calculs de passerelles**

**Annexe 6 : Bibliographie**

## **APPENDICES**

*Appendix 1: Review of structural dynamics*

*Appendix 2: Modelling pedestrian load*

*Appendix 3: Damper systems*

*Appendix 4: Footbridge examples*

*Appendix 5: Examples of footbridge calculations*

*Appendix 6: Bibliography*



## ANNEXE 1 : RAPPELS DE DYNAMIQUE DES STRUCTURES

### A.1.1. L'oscillateur simple

#### A.1.1.1. Introduction

L'oscillateur simple est l'élément de base de la mécanique des vibrations. Son étude permet d'appréhender les phénomènes caractéristiques de l'analyse dynamique. En outre, on verra que l'analyse dynamique de structures ramène celles-ci à des oscillateurs simples.

L'oscillateur simple est constitué d'une masse  $m$ , reliée à un point fixe par l'intermédiaire d'un ressort linéaire de raideur  $k$ , et d'un amortisseur linéaire de viscosité  $c$  (figure A.1.1).

Cet oscillateur est entièrement déterminé lorsque l'on connaît sa position  $x(t)$  ; un seul paramètre étant suffisant pour le décrire, on dit qu'il a 1 degré de liberté (1 ddl) : on l'appelle également oscillateur à 1 ddl. La masse peut être soumise à une excitation dynamique  $F(t)$ .

Nous supposerons toujours que l'oscillateur effectue des petits mouvements autour de sa configuration d'équilibre :  $x(t)$  désigne sa position autour de cette configuration d'équilibre.

On réalise une étude exhaustive de cet oscillateur :

- oscillation libre amortie/non-amortie,
- oscillation forcée amortie/non-amortie.

Le cas « non-amorti » correspond à une valeur d'amortissement nulle. On dit alors que le système est conservatif.

Le cas « libre » correspond à une excitation nulle.

On mettra également en évidence le phénomène de résonance : on définira la pulsation propre d'un système. Enfin, un bref exposé sur l'amortissement sera présenté.

#### A.1.1.2. Mise en équation

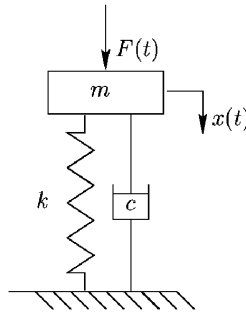


Figure A.1.1 : Oscillateur simple

## APPENDIX 1: REVIEW OF STRUCTURAL DYNAMICS

### A.1.1 SDOF oscillator

#### A.1.1.1 Introduction

The SDOF (single degree of freedom) oscillator is the basic component in vibrational mechanics. Studying it gives insight into the characteristic phenomena of dynamic analysis. In addition, dynamic analysis of structures simplifies structures to a series of SDOF oscillators.

An SDOF oscillator consists of a mass,  $m$ , connected to a fixed point by a linear spring of stiffness  $k$ , and a linear damper of viscosity  $c$  (figure A.1.1).

The oscillator is wholly determined when its position  $x(t)$  is known; since a single parameter is sufficient to describe it, it is said to have a single degree of freedom (SDOF). Its mass may be subject to dynamic excitation  $F(t)$ .

It will always be assumed that the oscillator effects small movements about its equilibrium configuration:  $x(t)$  is its position about that equilibrium position.

An exhaustive study of the oscillator is carried out:

- free damped/undamped oscillation,
- forced damped/undamped oscillation.

The "undamped" case corresponds to zero damping value. It is said that the system is conservative.

The "free" case corresponds to zero excitation.

The phenomenon of resonance will also be shown: the natural angular frequency of a system will be defined. Lastly, a brief overview of damping will be given.

A.1.1.2 Model

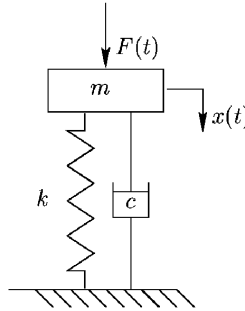


Figure A.1.1: SDOF oscillator

La masse  $m$  (figure A.1.1) est soumise à :

- la force de rappel du ressort  $- k x$  : si la raideur  $k$  est négative, le ressort va dans le sens du mouvement : on est en présence de flambement,
- la force de dissipation visqueuse  $- c \dot{x}$  : si la viscosité  $c$  est négative, la structure ne peut pas dissiper d'énergie : on est en présence d'instabilité dynamique,
- la force extérieure  $F(t)$ .

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit donc :

$$m \ddot{x} = F - c \dot{x} - k x \quad (\text{Eq. A.1.1})$$

qui se réécrit sous la forme :

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = F \quad (\text{Eq. A.1.2})$$

Pour résoudre une telle équation, il faut évidemment disposer des conditions initiales :

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= \dot{x}_0 \end{aligned}$$

On a donc une équation différentielle à coefficients constants et à une entrée, la force  $F(t)$ . D'un point de vue pratique, le système étant linéaire, on peut séparer l'étude de cet oscillateur selon deux régimes :

- le régime propre ou libre: le système est uniquement excité par des conditions initiales non nulles : on obtient alors les vibrations libres du système,
- le régime forcé : seule la force  $F(t)$  est non nulle ; cette force peut être sinusoïdale, périodique, aléatoire ou quelconque,

Il est courant et pratique de diviser l'équation (A.1.2) par  $m$ . On pose alors :

- $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f_0$  : pulsation naturelle ou propre de l'oscillateur (rad/s) ;  $f_0$  étant la fréquence propre de l'oscillateur (en Hz).
- $\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$  : taux d'amortissement critique ( sans dimension ).

L'équation (A.1.2) devient :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} \quad (\text{Eq. A.1.3})$$

The mass  $m$  (figure A1.1) is subject to:

- the elastic tensile force of the spring  $-k x$ : if stiffness  $k$  is negative, the spring moves in the direction of the movement: there is buckling,
- the viscous dissipation force  $-c \dot{x}$ : if viscosity  $c$  is negative, the structure cannot dissipate energy: there is dynamic instability,
- the external force  $F(t)$ .

The fundamental dynamic relationship is therefore:

$$m \ddot{x} = F - c\dot{x} - k x \quad (\text{Eq. A.1.1})$$

which can be rewritten thus:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = F \quad (\text{Eq. A.1.2})$$

To solve such an equation, the initial conditions must obviously be known:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= \dot{x}_0 \end{aligned}$$

It is therefore a differential equation with constant coefficients and a single input, the force  $F(t)$ . In practical terms, since the system is linear, the study of this oscillator can be divided into two regimes:

- the free regime: the system is excited only by non-zero initial conditions: the free vibrations of the system are obtained,
- the forced regime: only force  $F(t)$  is non-zero; this force can be a sine wave, periodic, random, or forced,

It is practical and common practice to divide equation (A.1.2) by  $m$ . The following is therefore written:

- $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f_0$  : natural angular frequency of the oscillator (rad/s) ;  $f_0$  being the natural frequency of the oscillator (in Hz).

- $\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$  : damping ratio (no unit).

Equation (A.1.2) becomes:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} \quad (\text{Eq. A.1.3})$$

### A.1.1.3. Oscillation libre

Le système est mis en vibration uniquement par des conditions initiales non nulles :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

La solution de cette équation différentielle à coefficients constants est du type :

$$x(t) = A e^{(rt)}$$

avec  $r$  vérifiant l'équation caractéristique :

$$r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

dont le discriminant réduit vaut :

$$\Delta = \omega_0^2 (\xi^2 - 1)$$

On supposera que  $\xi$  est positif (système dissipatif) ou nul. Ainsi on obtient des régimes différents selon si  $\xi$  est inférieur, égal ou supérieur à 1 (figure A.1.2). On étudiera ici le seul cas courant dans la pratique :  $\xi$  est strictement plus petit que 1.

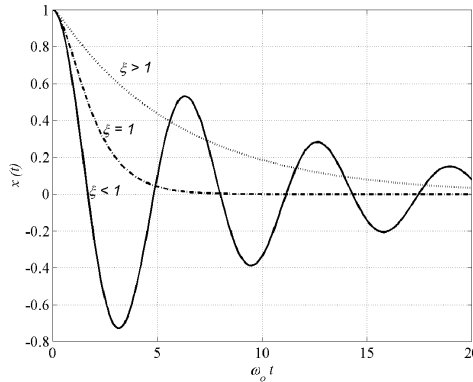


Figure A.1.2 : Oscillations libres

**A.1.1.3.1. Amortissement  $\xi = 0$  : le système est non-amorti (ou conservatif)**

La solution est alors :

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)$$

A et B sont deux constantes à déterminer à l'aide des conditions initiales :

$$x(0) = x_0 = B$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = A \omega_0$$

**A.1.1.3. Free oscillation**

The system is set into vibration only by non-zero initial conditions:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

The solution of this constant-coefficient differential equation is of the following type:

$$x(t) = A e^{(rt)}$$

where r verifies the characteristic equation:

$$r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

whose reduced discriminant is:

$$\Delta = \omega_0^2 (\xi^2 - 1)$$

It is assumed that  $\xi$  is positive (dissipative system) or zero. As a result, the regimes obtained are different, depending on whether  $\xi$  is less than, equal to, or greater than 1

(figure A.1.2). The only case studied here will be the only common case in practice:  $\xi$  is always less than 1.

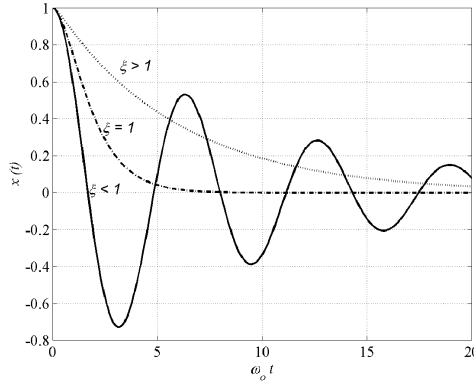


Figure A.1.2: Free oscillations

#### A.1.1.3.1 Damping $\xi = 0$ : the system is undamped (or conservative)

The solution in this case is:  $x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)$

A and B are constants determined with the help of the initial conditions:

$$x(0) = x_0 = B$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = A \omega_0$$

A noter que la solution peut également s'écrire sous la forme :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Les constantes d'intégration sont maintenant A et la phase  $\phi$ , qui sont également obtenues à l'aide des conditions initiales.

#### A.1.1.3.2. Amortissement $\xi$ est strictement compris entre 0 et 1

Il s'agit du cas le plus intéressant en pratique. Les solutions de l'équation caractéristique sont :

$$r_{1,2} = -\xi \omega_0 \pm i \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

La solution générale de l'équation de mouvement s'écrit selon une des trois écritures suivantes:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{(-\xi \omega_0 + i \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2})t} + A_2 e^{(-\xi \omega_0 - i \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2})t} \\ &= B_1 e^{-\xi \omega_0 t} \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t) + B_2 e^{-\xi \omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t) \\ &= C_1 e^{-\xi \omega_0 t} \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t + \phi) \end{aligned}$$

On appellera pulsation naturelle du système amorti ou pseudo-pulsation, la pulsation  $\omega_a$  :

$$\omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

Les constantes sont évidemment déterminées grâce aux conditions initiales.

Remarque : Notons que si l'amortissement  $\xi$  était négatif, on aurait une solution qui deviendrait divergente : les oscillations auraient une amplitude qui augmenterait exponentiellement. On rencontre ce problème dans le cadre de structures excitées par le vent : le vent peut induire une force proportionnelle à la vitesse et de même sens ; il est alors possible d'obtenir un amortissement négatif, dès que ce coefficient de proportionnalité devient supérieur à l'amortissement de la structure.

#### A.1.1.4. Vibration forcée

##### A.1.1.4.1. Exposé du problème

L'objectif est de résoudre l'équation (A.1.3). Différents cas peuvent être examinés pour  $F(t)$  :  $F$  peut être harmonique, périodique, aléatoire ou encore quelconque.

D'un point de vue mathématique, la solution générale de (1.3) est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre (mouvement ou régime transitoire) et d'une solution particulière de l'équation complète (mouvement ou régime permanent)  $x_{SP}(t)$ . Elle peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$x(t) = A e^{-\xi \omega_0 t} \cos(\omega_a t - \phi) + x_{SP}(t) \quad (\text{Eq. A.1.4})$$

Les constantes sont déterminées avec les conditions initiales.

*The solution can also be expressed the following way:  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$*

*The integration constants are now  $A$  and phase  $\phi$ , which are also determined from the initial conditions.*

##### A.1.1.3.2. Damping $\xi$ is always between 0 and 1

*This is the most interesting case in practice. The solutions for the characteristic equation are:*

$$r_{1,2} = -\xi \omega_0 \pm i \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

*The general solution for the movement equation is expressed in one of the following three ways:*

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{(-\xi \omega_0 + i \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2})t} + A_2 e^{(-\xi \omega_0 - i \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2})t} \\ &= B_1 e^{-\xi \omega_0 t} \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t) + B_2 e^{-\xi \omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t) \\ &= C_1 e^{-\xi \omega_0 t} \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t + \phi) \end{aligned}$$



The angular frequency  $\omega_a$  is known as the natural angular frequency of the damped system or the pseudo-angular frequency:

$$\omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

The constants are obviously determined from the initial conditions.

Observation: If the damping  $\xi$  were negative, the solution would become divergent: the amplitude of oscillations would increase exponentially. This problem is encountered with structures excited by wind: wind can induce a force proportional to its velocity and in the same direction; it then becomes possible to have negative damping, whenever the coefficient of proportionality becomes greater than the damping of the structure.

#### A.1.1.4 Forced vibration

##### A.1.1.4.1 Problem summary

The objective is to solve equation A.(1.3). Different cases can be considered for  $F(t)$ :  $F$  can be harmonic, periodic, random, or forced.

From the mathematical point of view, the general solution for (A.1.3) is the sum of the general solution for the equation without the second side (transient regime or movement) and a particular solution for the complete equation (permanent regime or movement)  $x_{SP}(t)$ . It can therefore be written as follows:

$$x(t) = A e^{-\xi\omega_0 t} \cos(\omega_a t - \phi) + x_{SP}(t) \quad (\text{Eq. A.1.4})$$

The constants are determined from the initial conditions.

Le régime transitoire est associé au mouvement libre : son influence devient vite négligeable (en fait au bout de quelques périodes propres il est déjà amorti). Lors de l'étude avec excitation harmonique ou périodique, on n'en tiendra pas compte.

A l'aide de l'excitation harmonique, on va introduire la notion de fonction de transfert. Cette notion est fondamentale en mécanique des vibrations.

##### A.1.1.4.2. Excitation harmonique

Une excitation harmonique est une fonction sinusoïdale :

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t) = \Re(F_0 e^{i\omega t})$$

Une solution particulière intéressante est de la forme :

$$x(t) = X(\omega) \cos(\omega t + \phi)$$

Pour effectuer plus simplement et plus rapidement les calculs, on travaille en nombres complexes. On cherche donc une solution de la forme :

$$\tilde{x}(t) = X(\omega) e^{i(\omega t - \phi)} \quad (\text{Eq. A.1.5})$$

avec  $X(\omega) \in \mathbb{R}^*$

La solution recherchée est donc la partie réelle de  $\tilde{x}(t)$  :  $x(t) = \Re(\tilde{x}(t))$ .

On injecte (A.1.5) dans l'équation (A.1.3). Après simplification par le facteur  $e^{i\omega t}$ , on obtient :

$$e^{-i\phi} (-\omega^2 X(\omega) + 2i\xi\omega_0 \omega X(\omega) + \omega_0^2 X(\omega)) = \frac{F_0}{m}$$

On définit alors la fonction de transfert, appelée également réponse en fréquence,  $H_{x,F}(\omega)$  entre l'excitation et la réponse (ici en déplacement) par le rapport :

$$H_{x,F}(\omega) = \frac{X(\omega) e^{-i\phi}}{F_0 / m} = \frac{1}{-\omega^2 + 2i\xi\omega_0 \omega + \omega_0^2} \quad (\text{Eq. A.1.6})$$

Cette fonction caractérise la dynamique du système étudié. Si on pose  $\Omega = \omega / \omega_0$ , on définit l'amplification dynamique par :

$$A(\Omega) = \omega_0^2 H_{x,F}(\Omega) = \frac{X(\Omega) e^{-i\phi}}{F_0 / k} = \frac{X(\Omega) e^{-i\phi}}{x_{\text{statique}}} = \frac{1}{1 - \Omega^2 + 2i\xi\Omega} \quad (\text{Eq. A.1.7})$$

$x_{\text{statique}}$  est la valeur du déplacement que l'on obtiendrait si on exerçait une force statique  $F_0$  sur l'oscillateur dont la rigidité est  $k$  : il est important de remarquer que cette valeur est prise par  $X(\omega)$  à la fréquence nulle. Ainsi l'ordonnée à l'origine de la fonction  $H_{x,F}$  se détermine avec un calcul statique : cette valeur est souvent appelée souplesse statique. Cette fonction  $A(\Omega)$  montre que, à  $F_0$  donné, la réponse maximale de l'oscillateur dépend effectivement de la fréquence (figure A.1.3) : pour certaine fréquence cette réponse est supérieure (voire très supérieure) à la réponse statique.

*The transient regime is associated with the free movement: its influence quickly becomes negligible (in fact, it is damped after just a few eigenperiods). For the study with harmonic or periodic excitation, no account is taken of it.*

*Using the harmonic excitation, the notion of transfer function is introduced. This is fundamental for vibrational mechanics.*

#### A.1.1.4.2 Harmonic excitation

*Harmonic excitation is a sine-wave function:  $F(t) = F_0 \cos(\omega t) = \Re(F_0 e^{i\omega t})$*

*A particularly interesting solution takes the following form:  $x(t) = X(\omega) \cos(\omega t + \phi)$*

*To calculate more simply and more quickly, complex numbers are used. A solution of the following form is therefore sought:*

$$\tilde{x}(t) = X(\omega) e^{i(\omega t - \phi)} \quad (\text{Eq. A.1.5})$$

with  $X(\omega) \in \mathbb{R}^*$ .

*The solution sought is therefore the real part of  $\tilde{x}(t)$  :  $x(t) = \Re(\tilde{x}(t))$ .*

Equation (A.1.5) is injected into equation (A.1.3). After simplification with the factor  $e^{i\omega t}$ , the following result is obtained:

$$e^{-i\phi} (-\omega^2 X(\omega) + 2i\xi\omega_0 \omega X(\omega) + \omega_0^2 X(\omega)) = \frac{F_0}{m}$$

The next step is to define the transfer function, also known as the frequency response function (FRF),  $H_{x,F}(\omega)$ , between excitation and the response (here in terms of displacement), using the relationship:

$$H_{x,F}(\omega) = \frac{X(\omega) e^{-i\phi}}{F_0 / m} = \frac{1}{-\omega^2 + 2i\xi\omega_0 \omega + \omega_0^2} \quad (\text{Eq. A.1.6})$$

This function characterizes the dynamics of the system studied. Assuming  $\Omega = \omega / \omega_0$ , the dynamic amplification is defined by:

$$A(\Omega) = \omega_0^2 H_{x,F}(\Omega) = \frac{X(\Omega) e^{-i\phi}}{F_0 / k} = \frac{X(\Omega) e^{-i\phi}}{x_{\text{statique}}} = \frac{1}{1 - \Omega^2 + 2i\xi\Omega} \quad (\text{Eq. A.1.7})$$

$x_{\text{static}}$  is the displacement value obtained that would be obtained if a static force  $F_0$  were exerted on the oscillator whose stiffness is  $k$ : it is important to observe that this value is taken as  $X(\omega)$  in the case of zero frequency. Thus the y-coordinate at the origin of the function  $H_{x,F}$  is determined by static calculation: this value is often referred to as the static flexibility. Function  $A(\Omega)$  demonstrates that for a given  $F_0$  value the maximum response of the oscillator effectively depends on the frequency (figure A.1.3): for certain frequencies this response is higher (and sometimes much higher) than the static response.

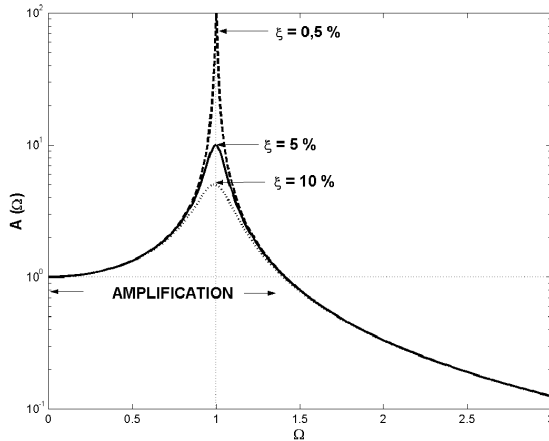


Figure 1.3 : Phénomène de résonance

La solution complexe est donc :

$$\tilde{x}(t) = \frac{F_0}{m} \frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\xi\omega_0\omega}$$

L'étude de  $A(\Omega)$  montre que si  $\xi$  est compris entre 0 et  $1/\sqrt{2}$  on obtient le phénomène de résonance (figure 1.3) :  $|A(\Omega)|$  admet un maximum pour  $\Omega = \Omega_R = \sqrt{1 - 2\xi^2}$  qui vaut :

$$|A(\Omega_R)| = \frac{1}{2\xi} \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

On constate que plus l'amortissement est faible (i.e. plus  $\xi$  tend vers 0), plus l'amplification au niveau de la résonance est importante et tend vers  $\frac{1}{2\xi}$  : ainsi, pour  $\xi = 0,5\%$ , on constate figure 1.3 une amplification de l'ordre de 100.

Remarque 1 : A l'aide de cet oscillateur à 1ddl, on illustre immédiatement la différence entre « statique » et « dynamique ». En statique, seule l'amplitude de l'excitation joue sur l'amplitude de la réponse ; en dynamique, il faut également tenir compte de la fréquence : exciter une structure à sa résonance peut produire (surtout si la structure est faiblement amortie) de grands déplacements donc un niveau de contraintes élevé dans la structure. C'est pourquoi il est si important de déterminer les fréquences de résonance d'une structure dès que l'on a une excitation dynamique.

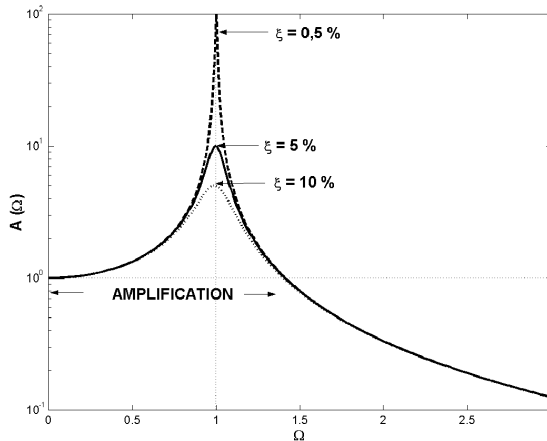


Figure 1.3: Phenomenon of resonance

The complex solution is therefore:

$$\tilde{x}(t) = \frac{F_0}{m} \frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\xi\omega_0\omega}$$

Study of  $A(\Omega)$  shows that if  $\xi$  is between 0 and  $1/\sqrt{2}$ , resonance occurs (figure A.1.3):  $|A(\Omega)|$  allows a maximum for  $\Omega = \Omega_R = \sqrt{1 - 2\xi^2}$  of:

$$|A(\Omega_R)| = \frac{1}{2\xi} \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

It is seen that the lower the damping is (i.e. the more  $\xi$  tends to 0), the greater is the amplification at resonance which tends to  $\frac{1}{2\xi}$ : thus, for  $\xi = 0.5\%$ , amplification is around 100, as can be seen on figure 1.3.

*Observation 1: Using this SDOF oscillator the difference between "static" and "dynamic" is illustrated immediately. In the static situation, only the amplitude of excitation affects the amplitude of the response; in the dynamic situation, account must also be taken of the frequency: exciting a structure to resonance can (especially if the structure is only slightly damped) produce large displacements, i.e. a high stress level, in the structure. For this reason it is important to determine the resonant frequencies of a structure whenever dealing with dynamic excitation.*

Remarque 2 : On constate que la résonance est atteinte pour une valeur de pulsation inférieure à la pulsation propre du système  $\omega_0$ . Néanmoins pour les systèmes faiblement amortis, on confond la pulsation de résonance en déplacement et la pulsation propre du système. En ce qui concerne la phase, on est à la résonance lorsque celle-ci vaut  $\pi/2$ .

Remarque 3 : dans ce qui précède, on n'a pas tenu compte des conditions initiales et du transitoire, car, comme on l'a fait remarquer précédemment, cette composante de la solution devient vite négligeable, comme on peut le voir sur la figure 1.4. Toutefois, il est clair que plus l'amortissement est élevé, plus la composante transitoire devient vite négligeable.

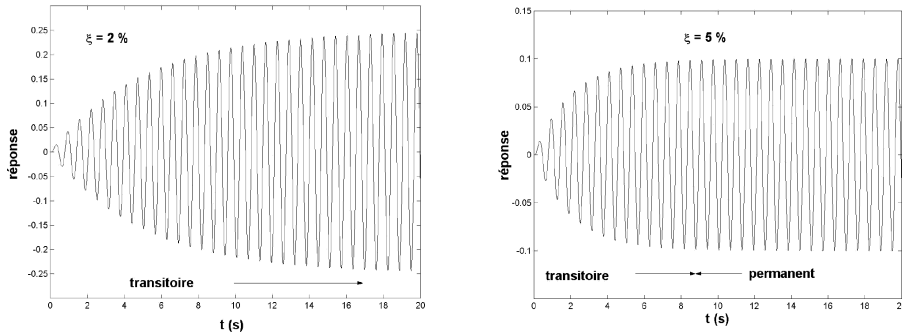


Figure A.1.4 : Transitoire et amortissement

#### A.1.1.4.3. Excitation périodique de période T

On se ramène au cas précédent. En effet, on peut développer la fonction de chargement en série de Fourier :

$$F(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} C_n \exp(i \frac{2\pi}{T} t)$$

Ainsi, en déterminant la solution  $x_p(t)$  pour chaque harmonique p (paragraphe précédent), on obtient la solution en superposant (en sommant) les  $x_p(t)$ .

#### A.1.1.4.4. Excitation quelconque

En prenant la transformée de Fourier de l'équation (A.1.3), on obtient l'équation fréquentielle :

$$X(\omega) = \frac{F(\omega)/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\xi\omega\omega_0} = H_{x,F}(\omega) \times \frac{F(\omega)}{m}$$

où  $X(\omega)$  et  $F(\omega)$  sont les transformées de Fourier de  $x(t)$  et de  $F(t)$ . Par transformée de Fourier inverse, on en déduit alors  $x(t)$  qui s'exprime à l'aide de l'intégrale de Duhamel :

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}} \int_0^t F(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} (t-\tau)) d\tau \quad (\text{Eq. A.1.8})$$

*Observation 2: It is observed that resonance occurs for a lower angular frequency value than the natural angular frequency of the system,  $\omega_0$ . Nevertheless, for slightly damped structures, the angular frequency of resonance and the natural angular frequency of the system are the same. With respect to phase, resonance occurs when the phase value is  $\pi/2$ .*

*Observation 3: No account is taken in the above of the initial conditions or of the transient, for, as already observed, this component of the solution quickly becomes negligible, as can be seen on figure 1.4. It is clear, however, that the greater the damping, the sooner the transient component becomes negligible.*

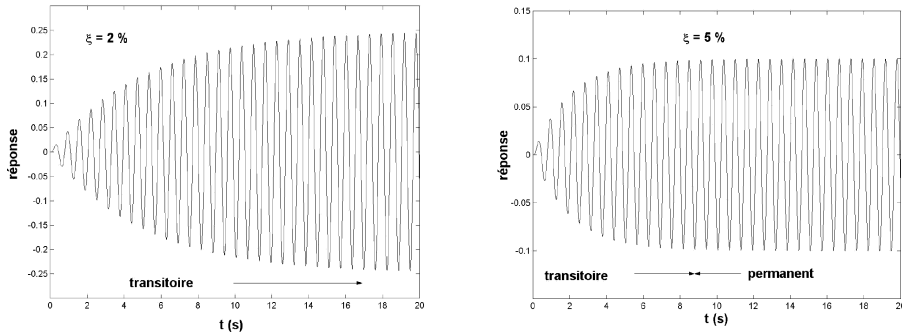


Figure A.1.4: Transient and damping

#### A.1.1.4.3 Periodic excitation at period T

Let us take up the previous case again. The loading function can be developed as a Fourier series:

$$F(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} C_n \exp(i \frac{2\pi}{T} t)$$

Thus, by determining the solution  $x_p(t)$  for each harmonic p (previous paragraph), the solution is obtained by superposing (summing) the  $x_p(t)$  values.

#### A.1.1.4.4 Forced excitation

Taking the Fourier transform of equation (A.1.3), we get the frequency equation:

$$X(\omega) = \frac{F(\omega) / m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i \xi \omega \omega_0} = H_{x,F}(\omega) \times \frac{F(\omega)}{m}$$

where  $X(\omega)$  and  $F(\omega)$  are the Fourier transform values of  $x(t)$  and  $F(t)$ . By inverse Fourier transform  $x(t)$  can then be deduced, and, with the help of the Duhamel integral, is expressed:

$$x(t) = \frac{1}{m \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} \int_0^t F(\tau) e^{-\xi \omega_0 (t - \tau)} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} (t - \tau)) d\tau \quad (\text{Eq. A.1.8})$$

En pratique, on réalise une intégration numérique de l'équation différentielle du mouvement (A.1.3), à l'aide d'un logiciel.

#### A.1.1.4.5. Excitation aléatoire

On suppose que l'excitation F est modélisée par un processus stochastique. La réponse x du système à 1 ddl est également un processus stochastique : on ne peut donc l'appréhender que par l'intermédiaire de grandeurs caractérisant ce processus (moyenne, écart-type, fonction d'autocorrélation, densité spectrale de puissance,.... ).

Toutefois, l'étude des vibrations aléatoires dépasse l'objectif de cette annexe, aussi le lecteur est renvoyé à des ouvrages de références.

**A.1.1.4.6. Excitation base**

On impose maintenant un mouvement  $u(t)$  au support :  $F(t)$  et les conditions initiales sont donc supposées nulles.

NB :  $x(t)$  et  $u(t)$  désignent des déplacements dans un repère absolu.

On ne s'intéressera qu'au mouvement harmonique du support :  $u(t) = U e^{i\omega t}$

On cherche à nouveau une solution de la forme :  $X(\omega) e^{i(\omega t - \phi)}$ . En injectant ces deux expressions dans l'équation (A.1.3) :  $\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 2\xi\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u$

On en déduit la fonction de transfert entre le déplacement de la base et le déplacement de la masse  $m$  :

$$H_{x,u}(\Omega) = \frac{X(\Omega) e^{-i\phi}}{U} = \frac{1 + 2i\xi\Omega}{1 - \Omega^2 + 2i\xi\Omega} \tag{Eq. A.1.9}$$

Le module de cette fonction de transfert est tracé sur la figure A.1.5.

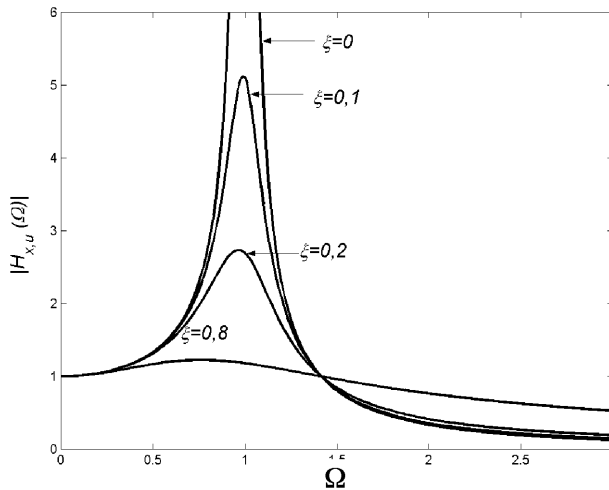


Figure A.1.5 : FRF en déplacement, vis-à-vis d'une excitation base

In practice, numerical integration of the differential equation of movement (A.1.3) is carried out with software.

**A.1.1.4.5. Random excitation**

It is assumed that excitation  $F$  is modelled by a stochastic process. The response  $x$  of the SDOF system is also a stochastic process: it can therefore only be appraised by



means of quantities characterizing the process (mean, standard deviation, autocorrelation function, power spectral density, etc.).

The study of random vibration is beyond the scope of this appendix, however; further information may be found in the works referred to in the bibliography.

**A.1.1.4.6. Base excitation**

A movement  $u(t)$  is now imposed on the support:  $F(t)$  and the initial conditions are therefore assumed to be zero.

NB:  $x(t)$  and  $u(t)$  refer to displacements in an absolute coordinate system.

Only the harmonic movement of the support will be considered:  $u(t) = U e^{i\omega t}$

Once again a solution of the following form is sought:  $X(\omega) e^{i(\omega t - \phi)}$ . By injecting these two expressions into the equation (1.3):

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 2\xi\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u$$

is deduced the function for transfer between displacement of the base and displacement of mass  $m$ :

$$H_{x,u}(\Omega) = \frac{X(\Omega) e^{-i\phi}}{U} = \frac{1 + 2i\xi\Omega}{1 - \Omega^2 + 2i\xi\Omega} \tag{Eq. A1.9}$$

The modulus of this transfer function is plotted on figure A.1.5.

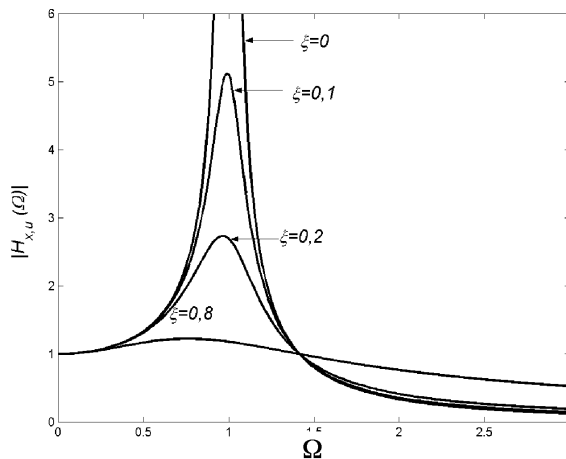


Figure A.1.5: FRF in displacement for a base excitation

Il est intéressant de constater l'existence d'un point fixe :  $\forall \xi, |H_{x,u}(\sqrt{2})| = 1$

De ce fait, lors d'une excitation base un compromis doit être trouvé afin d'optimiser l'amortissement : si des  $\xi$  élevés limitent les débattements jusqu'à  $\sqrt{2} \omega_0$ , après cette valeur, il vaut mieux des valeurs faibles de  $\xi$ .

L'excitation base est une excitation beaucoup plus courante qu'on pourrait le penser en premier abord : en effet, c'est l'excitation sismique (donc rare) qui vient à l'esprit en priorité pour illustrer une excitation base. Cependant, tous les systèmes sont excités par leur support. C'est d'ailleurs pour cette raison que l'on cherche à les « isoler » (plots élastiques, sandows).

En effet, si un système est excité, il transmet un signal (déplacement) à son support : cela produit alors une onde qui est transmise (sol, mur, air...) et produit le déplacement du support d'un autre système.

Si l'excitation base est périodique ou quelconque, on fait une étude identique à celle menée pour l'excitation forcée.

#### A.1.1.5. Amortissement

##### A.1.1.5.1. Généralités

Nous l'avons vu : le phénomène de résonance occasionne dans les structures des déplacements donc des contraintes (très) supérieures à ce que l'on obtiendrait par un calcul statique. En outre, l'amplification maximale est directement liée à l'amortissement. Il est donc indispensable de bien estimer ce paramètre afin de réaliser un dimensionnement dynamique correct.

Les sources d'amortissement les plus communes sont :

- l'amortissement interne lié au matériau lui-même ; sa valeur est liée à la température et à la fréquence d'excitation
- l'amortissement par frottement (Coulomb) : il est lié à l'assemblage d'éléments de structure ; il est induit par le déplacement relatif de deux pièces en contact.

Expérimentalement, on constate que le taux d'amortissement critique ne dépend généralement pas de la fréquence ; l'amortissement est alors appelé amortissement structural :  $\xi_n = \xi$

Classiquement, cet amortissement est modélisé par de l'amortissement visqueux : cela se traduit par une force qui s'oppose à la vitesse de la structure. Il est intéressant de savoir que, parfois, il existe des forces excitatrices qui « s'accordent » avec la vitesse (certaines modélisations du comportement du piéton) : cela génère un « amortissement négatif » qui engendre des oscillations de la structure qui deviennent de plus en plus grande de la structure. On est alors en présence d'instabilité (voir figure A.1.6) qui peut aller jusqu'à la ruine de la structure.

*It is interesting to observe that there is a fixed point:  $\forall \xi, |H_{x,u}(\sqrt{2})| = 1$*

*As a result, for base excitation a tradeoff must be found to optimize damping: if high  $\xi$  values restrict deflection to  $\sqrt{2} \omega_0$ , beyond this value it is better to have low  $\xi$  values.*

Base excitation is a much more common excitation than might be thought at first sight. The first thing that comes to mind to illustrate a base excitation is seismic excitation (which is rare). However, all systems are excited by their supports. It is for this reason that the utmost is done to "isolate" them (elastic pads, elastic cords).

This is because if a system is excited, it transfers a signal (displacement) to its support: this causes transmission of a wave that causes the displacement of the support of another system.

If the base excitation is periodic or forced, the same study as for forced excitation is carried out.

#### A.1.1.5. Damping

##### A.1.1.5.1. General

As has been seen above, the phenomenon of resonance causes displacements in structures, and therefore stresses which can be considerably higher than those determined by static calculation. Moreover, the maximum amplification is directly linked to damping. It is therefore vital that this parameter be correctly assessed if the dynamic design is to be correct.

The most common sources of damping are:

- internal damping due to the material itself; its value is linked to temperature and the excitation frequency,
- damping due to friction (Coulomb): this is associated with the assembly of structural components; it is caused by the relative displacement of two components in contact with each other.

Experiments have shown that the damping ratio does not generally depend on frequency; the damping in this case is called structural damping:  $\xi_n = \xi$

Conventionally this damping is modelled by viscous damping; this amounts to a force opposing the velocity of the structure. It is interesting to note that there are sometimes exciting forces that 'tune into' the velocity (certain models of pedestrian behaviour); this generates a 'negative damping' which sets up structural oscillations that become increasingly large. This is a situation of instability (see figure A.1.6) which could possibly result in collapse of the structure.

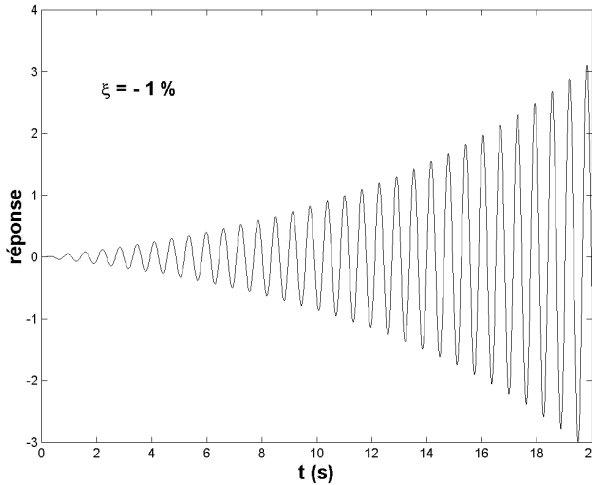


Figure A.1.6 : Divergence induite par de l' « amortissement négatif »

#### A.1.1.5.2. Détermination expérimentale de $\xi$ et $\omega_0$ : essais de relaxation

Lorsque l'on étudie un système réel ( $\xi$  est a priori inférieur à 1) que l'on modélise par un oscillateur simple, identifier ses paramètres mécaniques caractéristiques,  $\omega_0$  et  $\xi$ , est indispensable.

Ceci est réalisable à l'aide d'un essai de vibration libre : on impose des conditions initiales au système et on mesure sa réponse temporelle. Puis on mesure (voir figure 1.7) :

- la durée  $T_a$  entre deux maxima successifs situés en  $t_1$  et  $t_2$  ( $T_a = t_2 - t_1$ ) : on obtient alors :

$$\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} = (2 \pi) / (T_a),$$

- la valeur  $x(t_1)$  et  $x(t_2)$  de deux maxima successifs : on en déduit alors la valeur du décrément logarithmique  $\delta$  :

$$\exp(\delta) = \frac{x(t_1)}{x(t_2)} \cong \exp(\xi \omega_0 T_a) = \exp\left(\frac{2 \pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right)$$

$$\text{Soit : } \delta = \text{Log}(x(t_1) / (x(t_2))) \cong (2 \pi \xi) / \sqrt{1 - \xi^2}$$

Donc, si  $\xi \ll 1$  (ce qui est courant),  $\xi \cong \delta / (2 \pi)$

Ainsi, les mesures de  $T_a$  et du décrément logarithmique  $\delta$  permettent de déterminer les caractéristiques mécaniques d'un oscillateur simple.

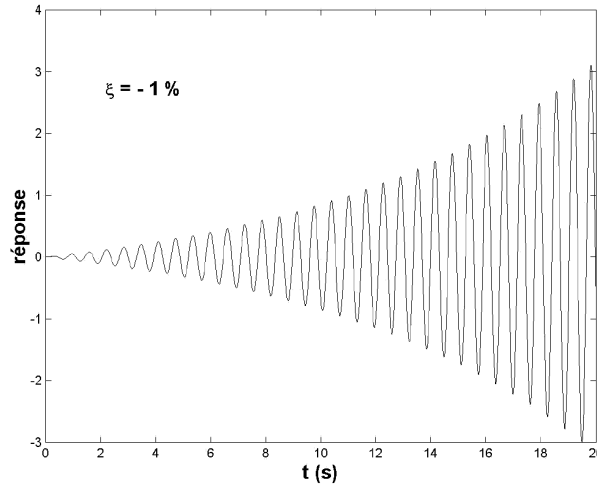


Figure A.1.6: Divergence induced by 'negative damping'

#### A.1.1.5.2 Experimental determination of $\xi$ and $\omega_0$ : relaxation tests

When modelling a real system ( $\xi$  is less than unity in principle) with an SDOF oscillator, it is vital to identify the characteristic mechanical parameters  $\omega_0$  and  $\xi$ .

This can be done by means of a free-vibration test: initial conditions are imposed on the system and its time-domain response is measured. The following are then measured (see figure A.1.7):

- the time  $T_a$  between two successive maximums at  $t_1$  and  $t_2$  ( $T_a = t_2 - t_1$ ): this gives:

$$\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} = (2 \pi) / (T_a),$$

- the values  $x(t_1)$  and  $x(t_2)$  of two successive maximums: from this is deduced the value of the logarithmic decrement  $\delta$  :

$$\exp(\delta) = \frac{x(t_1)}{x(t_2)} \cong \exp(\xi \omega_0 T_a) = \exp\left(\frac{2 \pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right)$$

$$\text{i.e. } \delta = \text{Log}(x(t_1) / (x(t_2))) \cong (2 \pi \xi) / \sqrt{1 - \xi^2}$$

Therefore, if  $\xi \ll 1$  (which is common),  $\xi \cong \delta / (2 \pi)$ .

Thus, measurement of  $T_a$  and of the logarithmic decrement  $\delta$  enable the mechanical characteristics of an SDOF oscillator to be determined.

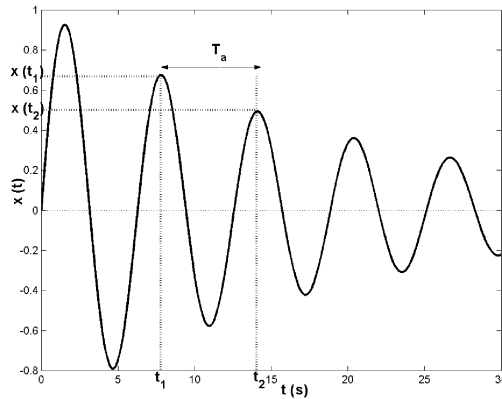


Figure A.1.7 : Réponse de l'oscillateur 1 ddl

### A.1.1.5.3. Détermination expérimentale de $\omega_0$ et $\xi$ : méthode du pic

Définition : On appelle bande passante  $\Delta\Omega$  (ou largeur de bande) à -3 décibels, la différence entre  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  tels que :

$$|A(\Omega_{1,2})| = \frac{|A(\Omega)|_{\max}}{\sqrt{2}}$$

On montre que la bande passante est liée à l'amortissement par la relation :

$$\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 \cong 2 \xi \sqrt{1 - \xi^2} \sim 2 \xi \quad (\text{si l'amortissement est faible})$$

Plus cette largeur de bande tend vers 0, plus la résonance est aiguë, donc l'amortissement faible (figure 1.8). En conséquence, pour déterminer  $\Omega_R$  (et donc  $\omega_0$ ) et  $\xi$ , on trace expérimentalement  $|A(\Omega)|$ , en effectuant un essai de sinus balayé. La pulsation correspondant au maximum de la courbe, donne  $\Omega_R$ . En outre, cette courbe permet d'obtenir la bande passante, donc,  $\xi$ .

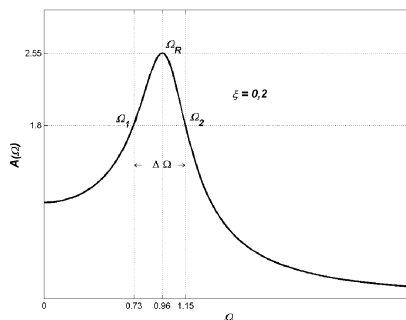


Figure A.1.8 : Bande passante pour  $\xi = 0,2$

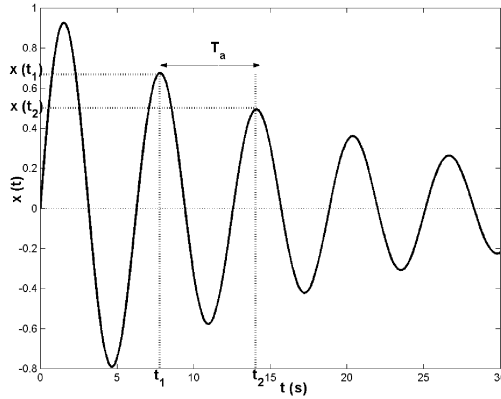


Figure A.1.7: Response of an SDOF oscillator

### A.1.1.5.3 Experimental determination of $\omega_0$ and $\xi$ : peak method

Definition: The -3 decibel pass band  $\Delta\Omega$  (or band width) is defined as the difference between  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$  such that:

$$|A(\Omega_{1,2})| = \frac{|A(\Omega)|_{\max}}{\sqrt{2}}$$

It is demonstrated that the pass band is linked to damping by the relation:

$$\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 \cong 2\xi\sqrt{1-\xi^2} \sim 2\xi \quad (\text{if damping is slight})$$

The more the bandwidth tends to zero, the more acute the resonance, and therefore the lower the damping is (figure A.1.8). Consequently, to determine  $\Omega_R$  (and therefore  $\omega_0$ ) and  $\xi$ ,  $|A(\Omega)|$  is plotted experimentally by conducting a swept sine test. The angular frequency corresponding to the highest point on the curve gives  $\Omega_R$ . In addition, this curve gives the pass band, and therefore  $\xi$ .

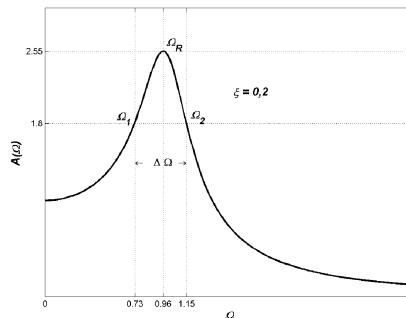


Figure A.1.8: Pass band for  $\xi = 0.2$

#### A.1.1.5.4. Amortissement hystérétique

L'amortissement utilisé dans notre modèle est un amortissement de type visqueux : la force d'amortissement est proportionnelle à la vitesse. Ce modèle est très largement employé pour représenter l'amortissement. Cependant, en réalité, les structures ne sont que très peu soumises à ce type d'amortissement : son emploi est dû à sa simplicité.

Lors d'une sollicitation harmonique, ce modèle d'amortissement indique que l'énergie dissipée par cycle, pour une amplitude de déplacement donnée, dépend de la fréquence d'excitation : expérimentalement, on constate que tel n'est pas le cas. D'autres modèles doivent être déterminés pour pallier ce problème. Lorsque la sollicitation est harmonique, un modèle simple intéressant est le modèle d'amortissement hystérétique. Ce modèle consiste à utiliser un élément de ressort dont la rigidité  $k_s$  est complexe :

$$k_s = k (1 + i \eta)$$

où  $\eta$  est appelé facteur d'amortissement structural. Si on écrit alors l'équilibre dynamique de la masse  $m$  :

$$m \ddot{x} + k_s x = F(t)$$

Sous excitation harmonique, on peut définir un  $\xi$  équivalent à  $\eta$  de sorte à conserver l'énergie dissipée par cycle :  $W_d = \pi k \eta x_0^2 = \pi \omega c x_0^2$

$$\text{Ce qui conduit à : } \eta = 2 \xi \frac{\omega}{\omega_0}$$

### A.1.2. Systèmes linéaires à n ddl

Après avoir exposé l'oscillateur simple, on peut directement étudier les systèmes discrets à  $n$  ddl, puisque à partir de 2 ddl, les méthodes pour appréhender les phénomènes vibratoires sont les mêmes, quel que soit le nombre  $n$  de ddl.

Cependant, étudier des systèmes à 2 ddl permet de mener les calculs jusqu'au bout : c'est pourquoi, sans perte de généralité, les calculs, lorsqu'ils sont menés, sont effectués sur des systèmes à 2 ddl.

La méthode générale consiste à :

- écrire les équations dynamiques sous forme matricielle : les matrices de masse, raideur et d'amortissement sont alors définies,
- étudier ensuite le système non-amorti : on définit alors les modes propres du système, la base modale,
- si besoin, déterminer la solution temporelle (en se plaçant dans la base modale, par exemple).

Ainsi, à travers ce chapitre nous aborderons les notions de matrices de masse, de raideur et d'amortissement, les notions de modes propres d'une structure, de couplage entre les ddl.



#### A.1.1.5.4 Hysteretic damping

The damping used in our model is viscous damping: the damping force is proportional to the velocity. This model is very widely used to represent damping. In reality, however, structures are very seldom subject to this kind of damping: it is used because it is simple.

During harmonic loading, this damping model indicates that the energy dissipated by a cycle with a given amplitude of displacement depends on the excitation frequency: experiments show that this is not actually the case. Other models must be used to overcome this problem. When loading is harmonic, an interesting simple model is the hysteretic damping model. This involves using a spring element with complex stiffness  $k_s$ :

$$k_s = k(1 + i\eta)$$

where  $\eta$  is the structural damping factor. If the dynamic equilibrium of mass  $m$  is written:

$$m \ddot{x} + k_s x = F(t)$$

under harmonic excitation, a  $\xi$  equivalent to  $\eta$  can be defined in order to find the same energy dissipated per cycle:  $W_d = \pi k \eta x_0^2 = \pi \omega c x_0^2$

This results in: 
$$\eta = 2\xi \frac{\omega}{\omega_0}$$

### A.1.2 Linear MDOF systems

Having looked at the SDOF oscillator, we can now study discrete MDOF systems, since from 2 DOFs upwards the methods used to appraise vibratory phenomena are the same, irrespective of the number  $n$  of DOFs.

However, studying 2 DOF systems enables the calculations to be carried out all the way through: it is for this reason that, without any loss of general applicability, when calculations are carried out, they are carried out on 2 DOF systems.

The general method consists in:

- writing the dynamic equations in matrix form: the mass, stiffness, and damping matrices are therefore defined,
- studying the undamped system: the modes of the system and the modal base are defined,
- if necessary, determining the time-domain solution (by using the modal base, for example).

This chapter will therefore address the notions of mass, stiffness, and damping matrices, of the modes of a structure, and of coupling between DOFs.

### A.1.2.1. Mise en équation

Les systèmes à n ddl sont constitués de n masses reliées entre elles par des ressorts et des amortisseurs (figure A1.9) : si tel n'est pas le cas, on est ramené à n oscillateurs simples. Ainsi, le déplacement d'une masse est dépendant du déplacement d'une autre masse : on dit que les n masses sont couplées par l'intermédiaire des ressorts et des amortisseurs.

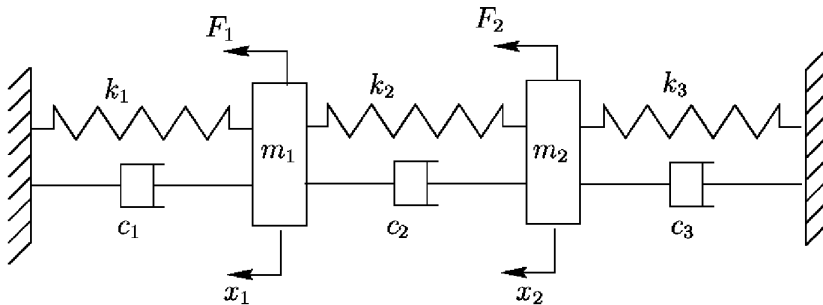


Figure A.1.9 : Système à 2 ddl

Bien évidemment les n ddl sont les positions  $x_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$  des n masses.

Pour le système représenté figure 1.9, les équations de la dynamique s'écrivent :

$$\begin{cases} M_1 \ddot{x}_1(t) + (C_1 + C_2) \dot{x}_1(t) - C_2 \dot{x}_2(t) + (K_1 + K_2) x_1(t) - K_2 x_2(t) = F_1(t) \\ M_2 \ddot{x}_2(t) + (C_2 + C_3) \dot{x}_2(t) - C_2 \dot{x}_1(t) + (K_2 + K_3) x_2(t) - K_2 x_1(t) = F_2(t) \end{cases} \quad (\text{Eq. A1.10})$$

Ce système peut facilement s'écrire sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}}_{[M]} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 \\ -C_2 & C_2 + C_3 \end{bmatrix}}_{[C]} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 + K_3 \end{bmatrix}}_{[K]} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}}_{[F(t)]} \quad (\text{Eq. A1.11})$$

Ce qui s'écrit donc :

$$[M][\ddot{X}(t)] + [C][\dot{X}(t)] + [K][X(t)] = [F(t)] \quad (\text{Eq. A.1.12})$$

Cette équation matricielle rappelle l'équation régissant l'oscillateur à 1 ddl. On appelle :

- $[X]$  : vecteur des ddl,
- $[M]$  : matrice de masse,
- $[C]$  : matrice d'amortissement visqueux,
- $[K]$  : matrice de raideur,
- $[F]$  : vecteur des efforts extérieurs.

Les matrices de masse et de raideur peuvent être retrouvées par des considérations énergétiques :

**A.1.2.1 Model**

MDOF systems consist of n masses directly linked to each other by springs and dampers (figure A.1.9): if this is not the case, then the situation is one with n SDOF oscillators. The displacement of a mass is therefore dependent on the displacement of another mass: the n masses are said to be coupled by the springs and dampers.

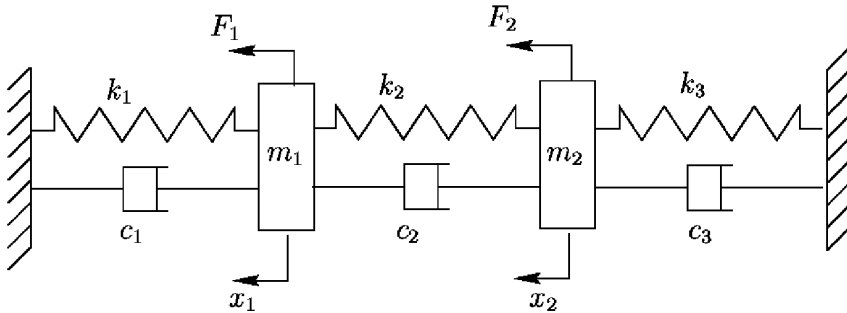


Figure A.1.9: 2 DOF system

Obviously the n DOFs are the positions  $x_i(t)_{i=1,\dots,n}$  of the n masses.

For the system shown in figure A.1.9, the equations of the dynamics are written:

$$\begin{cases} M_1 \ddot{x}_1(t) + (C_1 + C_2) \dot{x}_1(t) - C_2 \dot{x}_2(t) + (K_1 + K_2) x_1(t) - K_2 x_2(t) = F_1(t) \\ M_2 \ddot{x}_2(t) + (C_2 + C_3) \dot{x}_2(t) - C_2 \dot{x}_1(t) + (K_2 + K_3) x_2(t) - K_2 x_1(t) = F_2(t) \end{cases} \quad (\text{Eq. A.1.10})$$

This system can easily be presented in matrix form:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}}_{[M]} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix}}_{[\ddot{X}(t)]} + \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 \\ -C_2 & C_2 + C_3 \end{bmatrix}}_{[C]} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}}_{[\dot{X}(t)]} + \underbrace{\begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 + K_3 \end{bmatrix}}_{[K]} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{[X(t)]} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}}_{[F(t)]} \quad (\text{Eq. A.1.11})$$

Which is therefore written:

$$[M][\ddot{X}(t)] + [C][\dot{X}(t)] + [K][X(t)] = [F(t)] \quad (\text{Eq. A.1.12})$$

This matrix equation is similar to the equation governing the SDOF oscillator. The notation used is:

- $[X]$ : vector of the DOFs,
- $[M]$ : mass matrix,
- $[C]$ : matrix of viscous damping,
- $[K]$ : stiffness matrix,
- $[F]$ : vector of external forces.

The mass and stiffness matrices can be determined through conservation-of-energy considerations:

- La matrice de masse est une matrice associée à l'énergie cinétique T du système qui est la somme des énergies cinétiques de chaque masse :

$$T = \frac{1}{2} M_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{x}_2^2 = \frac{1}{2} \dot{[X]} [M] [\dot{X}]$$

- La matrice de raideur est une matrice associée à l'énergie de déformation J du système, i.e. à l'énergie potentielle élastique de chaque ressort :

$$J = \frac{1}{2} K_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K_2 (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} K_3 x_2^2 = \frac{1}{2} [X] [K] [X]$$

Ces matrices sont donc des matrices symétriques associées à des grandeurs énergétiques.

### A.1.2.2. Système non-amorti

On suppose ici que la matrice d'amortissement est nulle.

#### A.1.2.2.1. Mouvement libre

Ce cas particulier ([C] et [F] nuls) est fondamental dans l'étude des systèmes dynamiques : il met en évidence la notion de modes propres. L'équation matricielle (A.1.11) devient alors :

$$[M][\ddot{X}] + [K][X] = [0] \tag{Eq. A.1.13}$$

Les conditions initiales sont alors non nulles, sinon le système reste évidemment au repos. On cherche des solutions de la forme :

$$[X] = [\phi_0] e^{r \cdot t}$$

En injectant dans l'équation ci-dessus, on obtient le système homogène en  $\phi_0$  suivant :

$$[K + r^2 M] [\phi_0] = [0]$$

Soit, pour le système à 2 ddl de la figure A.1.9 :

$$\begin{bmatrix} K_1 + K_2 + r^2 M_1 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 + K_3 + r^2 M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{01} \\ \phi_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ce système admet la solution nulle qui ne peut pas nous satisfaire dès que l'on a des conditions initiales non nulles. Pour obtenir une solution intéressante, il faut que le déterminant du système soit nul. On en déduit donc l'équation suivante en r :

$$\text{Det} ([K + r^2 M]) = 0 \tag{Eq. A.1.14}$$

Soit pour le système à 2 ddl ci-dessus on obtient :

$$((K_1 + K_2) + r^2 M_1)((K_2 + K_3) + r^2 M_2) - K_2^2 = 0$$

Pour un système à n ddl cette équation caractéristique possède 2 n solutions :  $\pm i \omega_{k=1, \dots, n}$ .

A chaque indice k est associé un vecteur propre  $\phi_k$ , solution du système :

$$[K - \omega_k^2 M] [\phi_k] = [0]$$

• the mass matrix is a matrix associated with the kinetic energy T of the system which is the sum of the kinetic energies of each mass:

$$T = \frac{1}{2} M_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{x}_2^2 = \frac{1}{2} \dot{X}^T [M] \dot{X}$$

• the stiffness matrix is a matrix associated with the strain energy J of the system, i.e. with the potential elastic energy of each spring:

$$J = \frac{1}{2} K_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K_2 (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} K_3 x_2^2 = \frac{1}{2} X^T [K] X$$

These matrices are therefore symmetrical matrices associated with energy quantities.

### A.1.2.2 Undamped system

It is assumed in this case that the damping matrix is zero.

#### A.1.2.2.1 Free movement

This particular case ([C] and [F] are zero) is fundamental for the study of dynamic systems: it demonstrates the notion of modes. The matrix equation (A1.11) then becomes:

$$[M][\ddot{X}] + [K][X] = [0] \quad (\text{Eq. A.1.13})$$

The initial conditions have to be non-zero, otherwise the system will obviously stay at rest. Solutions with the following form are sought:

$$[X] = [\phi_0] e^{r t}$$

Injecting this into the equation above gives the following uniform system for  $\phi_0$ :

$$[K + r^2 M] [\phi_0] = [0]$$

In other words, for the 2DOF system of figure A.1.9:

$$\begin{bmatrix} K_1 + K_2 + r^2 M_1 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 + K_3 + r^2 M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{01} \\ \phi_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

This system can give a zero solution which will not be satisfactory for the initial conditions are non-zero. To obtain a worthwhile solution, the determinant of the system must be zero. The following equation is therefore deduced for r:

$$\text{Det}([K + r^2 M]) = 0 \quad (\text{Eq. A.1.14})$$

In other words, for the 2DOF system above, we get:

$$((K_1 + K_2) + r^2 M_1)((K_2 + K_3) + r^2 M_2) - K_2^2 = 0$$

For an MDOF system with  $n$  DOFs, this characteristic equation has  $2n$  solutions:  $\pm i \omega_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Each index  $k$  has an eigenvector  $\phi_k$ , the solution to the system:

$$[K - \omega_k^2 M] [\phi_k] = [0]$$

Soit pour le système à 2 ddl :

$$\begin{bmatrix} K_1 + K_2 - \omega_k^2 M_1 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 + K_3 - \omega_k^2 M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les pulsations  $\omega_k$  sont appelées les pulsations propres du système. Les vecteurs propres  $[\phi_k]$  sont les vecteurs modaux du système. La solution s'écrit alors sous la forme :

$$[X(t)] = \sum_{k=1, \dots, n} [\phi_k] (\alpha_k e^{-i\omega_k t} + \beta_k e^{i\omega_k t})$$

où les  $\alpha_k$  et les  $\beta_k$  sont déterminés par les conditions initiales.

Les composantes du vecteur  $\phi_k$  sont évidemment liées. Un vecteur modal est défini à une constante multiplicative près : on doit donc choisir une norme pour ces vecteurs. Les choix les plus fréquents sont les suivants :

- une des composantes est prise égale à 1,
- chaque mode est unitaire :  $\|\phi_i\| = 1$ ,
- on norme par rapport à la matrice de masse :  ${}^t[\phi_i] [M][\phi_i] = 1$

Choisissons la première normalisation :  $[\phi_i] = \begin{bmatrix} 1 \\ \phi_{2i} \end{bmatrix}$

On est donc maintenant capable d'exprimer la solution générale du système à 2 ddl non-amorti sous excitation libre :

$$\begin{cases} x_1(t) = \alpha_1 e^{-i\omega_1 t} + \alpha_2 e^{i\omega_1 t} + \alpha_3 e^{-i\omega_2 t} + \alpha_4 e^{i\omega_2 t} \\ x_2(t) = \phi_{21} (\alpha_1 e^{-i\omega_1 t} + \alpha_2 e^{i\omega_1 t}) + \phi_{22} (\alpha_3 e^{-i\omega_2 t} + \alpha_4 e^{i\omega_2 t}) \end{cases}$$

Ces expressions sont réelles :  $x_1$  et  $x_2$  peuvent s'exprimer sous forme trigonométrique :

$$\begin{cases} x_1(t) = a_1 \cos(\omega_1 t) + a_2 \sin(\omega_1 t) + a_3 \cos(\omega_2 t) + a_4 \sin(\omega_2 t) \\ x_2(t) = \phi_{21} (a_1 \cos(\omega_1 t) + a_2 \sin(\omega_1 t)) + \phi_{22} (a_3 \cos(\omega_2 t) + a_4 \sin(\omega_2 t)) \end{cases}$$

Les constantes sont déterminées à l'aide des conditions initiales.

En résumé, un mode d'un système linéaire est une solution particulière du problème libre non-amorti telle que toutes les composantes du vecteur des ddl sont synchrones (elles atteignent leurs maxima et minima en même temps) :

$$\begin{bmatrix} X_{mod} \\ e_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_0 \end{bmatrix} e^{i\omega_0 t}$$

For the 2DOF system, therefore:

$$\begin{bmatrix} K_1 + K_2 - \omega_k^2 M_1 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 + K_3 - \omega_k^2 M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

The angular frequencies  $\omega_k$  are known as the natural angular frequencies of the system. The eigenvectors  $[\phi_k]$  are the modal vectors of the system. The solution can then be written:

$$[X(t)] = \sum_{k=1, \dots, n} [\phi_k] ( \alpha_k e^{-i\omega_k t} + \beta_k e^{i\omega_k t} )$$

where  $\alpha_k$  and  $\beta_k$  values are determined by the initial conditions.

The components of the vector  $\phi_k$  are obviously linked. A modal vector is defined to within one multiplicative constant: a norm must therefore be chosen for these vectors. The most frequent choices are as follows:

- one of the components is taken to be unity,
- each mode is unity:  $\|\phi_i\| = 1$ ,
- norming is done relative to the mass matrix:  ${}^T[\phi_i] [M][\phi_i] = 1$

Let us choose the first normalization:  $[\phi_i] = \begin{bmatrix} 1 \\ \phi_{2i} \end{bmatrix}$

This makes it possible to express the general solution of the undamped 2DOF system under free excitation:

$$\begin{cases} x_1(t) = \alpha_1 e^{-i\omega_1 t} + \alpha_2 e^{i\omega_1 t} + \alpha_3 e^{-i\omega_2 t} + \alpha_4 e^{i\omega_2 t} \\ x_2(t) = \phi_{21}(\alpha_1 e^{-i\omega_1 t} + \alpha_2 e^{i\omega_1 t}) + \phi_{22}(\alpha_3 e^{-i\omega_2 t} + \alpha_4 e^{i\omega_2 t}) \end{cases}$$

These expressions are real:  $x_1$  and  $x_2$  can be expressed in trigonometric form:

$$\begin{cases} x_1(t) = a_1 \cos(\omega_1 t) + a_2 \sin(\omega_1 t) + a_3 \cos(\omega_2 t) + a_4 \sin(\omega_2 t) \\ x_2(t) = \phi_{21}(a_1 \cos(\omega_1 t) + a_2 \sin(\omega_1 t)) + \phi_{22}(a_3 \cos(\omega_2 t) + a_4 \sin(\omega_2 t)) \end{cases}$$

The constants are determined from the initial conditions.

To sum up, a mode of a linear system is a particular solution to the undamped free problem such that all the components of the vector of the DOFs are synchronous (they reach their maximum and minimum points at the same time):

$$[X_{mod e0}] = [\phi_0] e^{i\omega_0 t}$$

Les pulsations propres  $\omega_i$  sont les racines carrées des valeurs propres positives de la matrice  $[M]^{-1} [K]$ . Les formes propres d'un système discret sont les vecteurs propres  $\phi_i$  associés. Le couple  $(\omega_i, \phi_i)$  s'appelle un mode propre.

On cherche les modes directement en écrivant :

- pulsation propre  $\omega_i$  : c'est l'ensemble des solutions de l'équation :

$$\det([K - \omega_i^2 M]) = 0$$

- vecteur propre  $[\phi_i]$  :

$$[K - \omega_i^2 M] [\phi_i] = [0]$$

#### A.1.2.2.2. Orthogonalité des modes

Les modes propres sont orthogonaux par rapport à la matrice de masse et par rapport à la matrice de raideur :

$$\forall i, j \quad {}^t[\phi_i] [M] [\phi_j] = m_i \delta_{ij}$$

$$\forall i, j \quad {}^t[\phi_i] [K] [\phi_j] = k_i \delta_{ij}$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker et  $m_i$  et  $k_i$  sont la masse et la raideur généralisée associées au mode  $i$  : ces grandeurs dépendent de la norme des vecteurs propres choisie.

#### A.1.2.2.3. Excitation harmonique

Encore une fois, avant de passer à une excitation forcée générale, on s'intéresse à l'excitation harmonique : on généralisera ainsi la notion de fonction de transfert.

On considère donc que la structure est excitée par un vecteur force dont chaque composante est harmonique et en phase avec les autres composantes :

$$[F(t)] = e^{i\omega t} [F_0]$$

On suppose donc que la solution est de la forme :

$$[X(t)] = e^{i\omega t} [X_0]$$

L'équation matricielle de la dynamique devient donc :

$$([K - \omega^2 M]) [X_0] e^{i\omega t} = e^{i\omega t} [F_0]$$

d'où :



$$[X_0] = ([K] - \omega^2 [M])^{-1} [F_0] = [\alpha(\omega)] [F_0]$$

la matrice  $[\alpha]$  est appelée matrice admittance ou matrice des coefficients d'influence dynamique : c'est une matrice de réponse en fréquence entre l'excitation forcée  $[F]$  et la réponse  $[X(t)]$ .

On met en évidence le phénomène de résonance : si on excite à une fréquence propre, la réponse devient infinie.

The natural angular frequencies  $\omega_i$  are the square roots of the positive eigenvalues of the matrix  $[M]^{-1} [K]$ . The eigenforms of a discrete system are the associated eigenvectors  $\phi_i$ .

The couple  $(\omega_i, \phi_i)$  is known as an eigenmode.

Modes are sought directly by writing:

- natural angular frequency  $\omega_i$ : this is the set of solutions to the equation:

$$\det([K] - \omega_i^2 [M]) = 0$$

- eigenvector  $[\phi_i]$ :

$$[K] - \omega_i^2 [M] [\phi_i] = [0]$$

#### A.1.2.2.2. Mode orthogonality

The modes are orthogonal to the mass and stiffness matrices:

$$\forall i, j \quad \phi_i^T [M] \phi_j = m_i \delta_{ij}$$

$$\forall i, j \quad \phi_i^T [K] \phi_j = k_i \delta_{ij}$$

where  $\delta_{ij}$  is the Kronecker symbol and  $m_i$  and  $k_i$  are the generalized mass and stiffness associated with mode  $i$ : these quantities depend on the norm chosen for the eigenvectors.

#### A.1.2.2.3. Harmonic excitation

Again, before going onto general forced excitation, harmonic excitation is examined: the notion of transfer function will thus be generalized.

It is considered that the structure is excited by a force vector whose components are all harmonic and in phase with each other:

$$[F(t)] = e^{i\omega t} [F_0]$$

It is therefore assumed that the solution has the following form:

$$[X(t)] = e^{i\omega t} [X_0]$$

The matrix equation of the dynamics is therefore:

$$([K] - \omega^2 [M]) [X_0] e^{i\omega t} = e^{i\omega t} [F_0]$$

Whence:

$$[X_0] = ([K] - \omega^2 [M])^{-1} [F_0] = [\alpha(\omega)] [F_0]$$

Matrix  $[\alpha]$  is known as the admittance matrix or dynamic influence coefficient matrix: it is a matrix of the frequency response between forced excitation  $[F]$  and the response  $[X(t)]$ .

The phenomenon of resonance is revealed: with excitation at an natural frequency, the response is infinite.

Le terme général de cette matrice,  $\alpha_{ij}$  traduit l'influence de la composante  $j$  de la force sur la composante  $i$  du déplacement ; en effet si toutes les composantes de  $[F_0]$  sont

nulles sauf la composante  $j$ , on a : 
$$\alpha_{ij}(\omega) = \frac{x_{0i}}{F_{0j}}$$

Ceci n'est pas sans rappeler la fonction de transfert d'un système à 1 ddl entre l'excitation  $F_{0j}$  et la réponse  $x_{0i}$ . On dit encore que  $\alpha_{ij}$  est la fonction de transfert entre  $F_{0j}$  et  $x_{0i}$ , ou encore sa fonction de réponse en fréquence (FRF).

Remarque : On a un pic de résonance pour chaque fréquence propre du système. En théorie ce pic est infini. Cela vient de l'hypothèse (irréaliste) que le système n'est pas amorti.

#### A 1.2.2.4. Excitation quelconque

Rappelons l'équation à résoudre :

$$[M][\ddot{X}(t)] + [K][X(t)] = [F(t)]$$

Pour déterminer les composantes de  $[X(t)]$ , il est toujours possible d'effectuer une intégration temporelle (numérique) des équations. Cela nécessite par ailleurs de déterminer l'inverse de la matrice de masse (coût numérique élevé si le nombre de ddl est élevé). En fait, on a un système différentiel d'équations couplées. Si les équations à résoudre n'étaient pas couplées, cela simplifierait la résolution : on aurait  $n$  équations différentielles du second ordre à résoudre (cf chapitre précédent).

C'est pourquoi, il est courant de procéder autrement : on utilise une méthode modale qui découple les équations.

Le principe est de se placer en base modale : la solution  $[X(t)]$  est donc exprimée à l'aide d'une combinaison des vecteurs propres, qui forment une base. On effectue donc le changement de repère à l'aide de la transformation :

$$[X(t)] = [\phi][q(t)] = \sum_{i=1}^n [\phi_i] q_i(t) \quad (\text{Eq. A.1.15})$$

où :

$[\phi] = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_n]$  : est une matrice carrée dont les colonnes sont les vecteurs propres ;

$[q(t)]$  est le vecteur des nouvelles variables, appelées variables modales.

Si on remplace  $[X(t)]$  par son expression (Eq. A.1.15), dans l'équation matricielle de la dynamique, et si on pré-multiplie cette équation par  ${}^t[\phi]$ , on obtient :

$${}^t[\phi][M][\phi] [\ddot{q}(t)] + {}^t[\phi][K][\phi][q(t)] = {}^t[\phi][F(t)]$$

Vu l'orthogonalité des modes vis-à-vis des matrices de masse et de raideur, on a :

The general term of this matrix,  $\alpha_{ij}$ , reflects the effect of the component  $j$  of force on the component  $i$  of displacement; if all the components of  $[F_0]$  except component  $j$  are zero, we get:

$$\alpha_{ij}(\omega) = \frac{x_{0i}}{F_{0j}}$$

This is like the transfer function of an SDOF system between excitation  $F_{0j}$  and response  $x_{0i}$ . It is said that  $\alpha_{ij}$  is the transfer function between  $F_{0j}$  and  $x_{0i}$ , or its frequency response function (FRF).

Observation: There is a peak of resonance for each eigenfrequency of the system. In theory this peak is infinite. This is due to the assumption (unrealistic) that the system is not damped.

#### A.1.2.2.4. Forced excitation

The equation to be solved is as follows:

$$[M][\ddot{X}(t)] + [K][X(t)] = [F(t)]$$

To determine the components of  $[X(t)]$ , it is always possible to perform time-domain (numerical) integration of the equations. This requires determination of the inverse of the mass matrix (high computation cost if the number of DOFs is high). In fact, a differential system of coupled equations is used. If the equations to be solved were not coupled, it would simplify the solution: there would be  $n$  second-order differential equations to be solved (cf. previous chapter).

For this reason it is standard to proceed in a different manner: a modal method which decouples the equations is used.

The principle is to use a modal base: the solution  $[X(t)]$  is therefore expressed by means of a combination of eigenvectors which form a base. Coordinate change is performed by means of the following transform:

$$[X(t)] = [\phi][q(t)] = \sum_{i=1}^n [\phi_i] q_i(t) \quad (\text{Eq. A.1.15})$$

where:

- $[\phi] = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_n]$ : is a square matrix whose columns are the eigenvectors;

- $[q(t)]$  is the vector of the new variables which are called modal variables.

If, in the matrix equation of dynamics,  $[X(t)]$  is replaced by its expression (Eq. A.1.15), and if this equation is pre-multiplied by  ${}^t[\phi]$ , we get:

$${}^t[\phi][M][\phi] [\ddot{q}(t)] + {}^t[\phi] [K] [\phi][q(t)] = {}^t[\phi] [F(t)]$$

Given the orthogonality of the modes with respect to the mass and stiffness matrices, we have:

$$\begin{bmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix} [\ddot{q}(t)] + \begin{bmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & k_i & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix} [q(t)] = {}^t[\phi][F(t)]$$

Ainsi, les deux matrices  ${}^t[\phi][M][\phi]$  et  ${}^t[\phi][K][\phi]$  étant diagonales, on obtient un système d'équations différentielles découplées du type :

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \frac{{}^t[\phi_i][F(t)]}{m_i} = p_i(t) \quad (\text{Eq. A.1.16})$$

Le vecteur  $[p(t)]$  est le vecteur des facteurs des participations modales de la force  $[F(t)]$  : c'est la composante par unité de masse généralisée de  $[F(t)]$  dans la base modale.

On est donc ramené au chapitre sur l'oscillateur à 1 ddl : l'intégrale de Duhamel permet d'obtenir chaque  $q_i(t)$ . On en déduit ensuite le vecteur  $[X]$  par superposition modale, d'après l'équation (1.15).

A l'aide du principe de superposition modale, on ramène l'étude d'un système à n ddl à l'étude de n oscillateurs simples.

Cas particulier : Pour une excitation harmonique, on a :

$$q_i(t) = q_{i0} \cos(\omega t)$$

avec :

$$q_{i0} = \frac{p_{i0}}{\omega_i^2 - \omega^2}$$

d'où

$$[X] = \sum_{i=1}^n [\phi_i] \frac{p_{i0}}{\omega_i^2 - \omega^2} \cos(\omega t)$$

Cette expression met bien en évidence le phénomène de résonance pour chaque pulsation propre.

### A.1.2.3. Systèmes amortis

Pour simplifier l'étude, seul l'amortissement visqueux est considéré. L'équation du problème est donc l'équation (1.12) déjà énoncée :

$$[M][\ddot{X}] + [C][\dot{X}] + [K][X] = [F]$$

Il est, là encore, possible d'intégrer directement les équations. Nous verrons même que cela peut être indispensable pour prendre en compte les effets de dissipation.

Néanmoins nous allons appliquer la méthode modale à notre système : nous serons alors effectivement amenés à discuter de sa validité.

$$\begin{bmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix} [\ddot{q}(t)] + \begin{bmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & k_i & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix} [q(t)] = {}^t[\phi][F(t)]$$

Thus, since the two matrices  ${}^t[\phi][M][\phi]$  and  ${}^t[\phi][K][\phi]$  are diagonal, we get a system of decoupled differential equations of the type:

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \frac{{}^t[\phi_i][F(t)]}{m_i} = p_i(t) \quad (\text{Eq. A.1.16})$$

Vector  $[p(t)]$  is the vector of the factors of modal participations of force  $[F(t)]$ : it is the component per unit generalized mass of  $[F(t)]$  in the modal base.

This takes us back to the chapter on the SDOF oscillator: the Duhamel integral is used to obtain each  $q_i(t)$ . The vector  $[X]$  is then deduced by modal superposition, in accordance with equation (1.15).

Using the principle of modal superposition, the study of an MDOF system with  $n$  DOFs is reduced to the study of  $n$  SDOF oscillators.

Special case: For harmonic excitation we have:

$$q_i(t) = q_{i0} \cos(\omega t)$$

with:

$$q_{i0} = \frac{P_{i0}}{\omega_i^2 - \omega^2}$$

Whence

$$[X] = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \phi_i \end{bmatrix} \frac{P_{i0}}{\omega_i^2 - \omega^2} \cos(\omega t)$$

This expression clearly shows the phenomenon of resonance for each natural angular frequency.

### A.1.2.3. Damped systems

To simplify the study, only viscous damping is considered. The equation for the problem is therefore equation (1.12) above:

$$[M][\ddot{X}] + [C][\dot{X}] + [K][X] = [F]$$

Here too, it is possible to integrate the equations directly. It will even be seen that this can be indispensable for taking account of dissipation effects.

Nevertheless, we will apply the modal method to our system: we will then enter into discussion of its validity.

Dans ce qui suit, le couple  $(\omega_i, [\phi_i])$  désigne le mode  $i$  du système équivalent non-amorti. Nous allons décomposer l'équation (1.12) sur la base des vecteurs propres en suivant le même cheminement qu'au paragraphe précédent :

$${}^t[\phi][M][\phi][\ddot{q}(t)] + {}^t[\phi][C][\phi][\dot{q}(t)] + {}^t[\phi][K][\phi][q(t)] = {}^t[\phi][F(t)]$$

Si les matrices  ${}^t[\phi][M][\phi]$  et  ${}^t[\phi][K][\phi]$  sont évidemment toujours diagonales, il n'en est a priori pas de même pour la matrice  ${}^t[\phi][C][\phi]$  ; a priori les vecteurs modaux ne sont pas orthogonaux vis-à-vis de la matrice d'amortissement :

$$\gamma_{ij} = {}^t[\phi_i][C][\phi_j] \neq \text{constante} \times \delta_{ij}$$

Ainsi, la projection sur la base des modes propres ne découple pas les équations du système amorti : la méthode modale semble perdre beaucoup de son intérêt pour déterminer une solution numérique de  $[X]$ .

#### A.1.2.3.1. Hypothèse de Basile

Si le couplage dû à l'amortissement était nul, la méthode modale retrouverait tout son intérêt. Cela n'est réaliste que si la répartition de l'amortissement est semblable à celle de la masse et de la rigidité : une telle hypothèse n'est pas justifiable a priori.

En pratique, la répartition de l'amortissement est très mal connue. Cependant, lorsque la structure est faiblement dissipative et que les fréquences propres sont bien séparées, on peut montrer que l'hypothèse d'amortissement diagonal est raisonnable : c'est l'hypothèse dite de Basile.

Caughey a montré que les modes propres sont effectivement orthogonaux à toute matrice d'amortissement qui s'exprime sous la forme générale :

$$[C] = \sum_{k=1}^N a_k [M] \left( [M]^{-1} [K] \right)^{k-1}$$

Dans le cas particulier où  $N$  vaut 2, on retrouve l'amortissement proportionnel : la matrice d'amortissement s'exprime selon une combinaison linéaire de  $[K]$  et  $[M]$  ; il est alors clair que, dans ce cas particulier, les modes propres du système sont orthogonaux vis-à-vis de la matrice d'amortissement.

L'amortissement est souvent faible s'il est bien réparti. Dans ce cas, on peut également montrer que les modes de la structure sont bien approchés par les modes propres de la structure non-amortie. On appliquera donc encore le principe de superposition modale en utilisant les modes de la structure non-amortie.

Ainsi, si on pose :  $\xi_i = \frac{\gamma_i}{2\omega_i m_i}$ , on retrouve un système d'équations découplées :

$$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = p_i(t) = \frac{{}^t[\phi_i][F]}{m_i} \quad (\text{Eq. A.1.17})$$

In what follows, the couple  $(\omega_i, [\phi_i])$  designates mode  $i$  of the equivalent undamped system. We will decompose equation (A.1.12) into the eigenvector base, using the same process as in the previous paragraph:

$${}^t[\phi][M][\phi][\ddot{q}(t)] + {}^t[\phi][C][\phi][\dot{q}(t)] + {}^t[\phi][K][\phi][q(t)] = {}^t[\phi][F(t)]$$

While matrices  ${}^t[\phi][M][\phi]$  and  ${}^t[\phi][K][\phi]$  are obviously always diagonal, the same is not necessarily true for matrix  ${}^t[\phi][C][\phi]$  ; in principle the modal vectors are not orthogonal to the damping matrix:

$$\gamma_{ij} = {}^t[\phi_i][C][\phi_j] \neq \text{constant} \times \delta_{ij}$$

Thus, projection into the eigenmode base does not decouple the equations of the damped system: the modal method appears to lose much of its interest for determining a numerical solution for  $[X]$ .

### A.1.2.3.1. Modal damping assumption

If the coupling due to damping were zero, the modal method would play a useful role. But that is realistic only if the distribution of damping is comparable to that of the mass and stiffness: such an assumption is not felt to be justifiable.

In practice, the distribution of damping is very poorly appreciated. However, when a structure is only slightly dissipative and the frequencies are distinctly separated, it can be shown that the assumption of diagonal damping is reasonable: this is the modal damping assumption, also known as the Basile hypothesis.

Caughey has shown that modes are effectively orthogonal to any damping matrix taking the general form:

$$[C] = \sum_{k=1}^N a_k [M] ([M]^{-1} [K])^{k-1}$$

In the particular case where  $N$  is 2, we find proportional damping: the damping matrix is expressed in accordance with a linear combination of  $[K]$  and  $[M]$  ; it is clear that in this particular case the modes of the system are orthogonal to the damping matrix.

Damping is often slight if it is well distributed. In this case, it can also be shown that the modes of the undamped structure come close to the modes of the structure. The principle of mode superposition will therefore be applied by using the modes of the undamped structure.

Therefore, if we have:  $\xi_i = \frac{\gamma_i}{2\omega_i m_i}$  we find a system of decoupled equations:

$$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = p_i(t) = \frac{^t[\phi_i][F]}{m_i} \quad (\text{Eq. A.1.17})$$

Chacune représente l'équation du mouvement d'un oscillateur simple amorti sous excitation forcée.

En pratique, chaque taux d'amortissement critique  $\xi_i$  doit être recalé expérimentalement. En fait il est très rare de trouver une structure dont l'amortissement répond à une modélisation simple.

Il est courant de considérer que la valeur du taux d'amortissement critique ne dépend pas du mode considéré :  $\xi_i = \xi$ . Cette constante  $\xi$  est alors fixée par l'expérimentation ou le réglage.

#### A.1.2.3.2. Excitation harmonique - cas des systèmes faiblement dissipatifs

Les modes propres sont donc supposés orthogonaux vis-à-vis de la matrice d'amortissement.

On effectue une résolution par superposition modale : on cherche [X] la solution du problème à l'aide des variables modale :

$$[X] = [\phi][q]$$

Chaque variable modale  $q_i$  est alors soumise à l'équation (A.1.17). La solution cherchée et l'excitation sont, classiquement, de la forme :

$$\begin{aligned} [q] &= [q_0]e^{i\omega t} \\ [p] &= [p_0]e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (\text{Eq. A.1.18})$$

[p] étant toujours le vecteur des facteurs de participation modale à la force [F] :

$$p_i = \frac{^t[\phi_i][F]}{^t[\phi_i][M][\phi_i]} = \frac{^t[\phi_i][F]}{m_i} = p_{0i} e^{i\omega t}$$

La solution est donc :



$$[X_0] = \sum_{i=1}^n q_{0i} [\phi_i] = \sum_{i=1}^n \frac{p_{0i} [\phi_i]}{\omega_i^2 - \omega^2 + i2\xi_i \omega_i \omega} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} \frac{[\phi_i]^T [\phi_i]}{\omega_i^2 - \omega^2 + i2\xi_i \omega_i \omega} [F]$$

On reconnaît alors que chaque terme de cette somme est en fait la réponse d'un oscillateur à 1 ddl sous excitation harmonique. La réponse d'un oscillateur à n ddl s'exprime donc en fonction de la réponse de n oscillateurs à 1 ddl.

#### A.1.2.3.3. Excitation quelconque

Grâce à la méthode de superposition modale, on est ramené à l'étude d'un système à un ddl sous excitation quelconque. La solution est alors donnée par l'intégrale de Duhamel :

$$q_i(t) = \frac{1}{\omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}} \int_0^t p_i(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin(\omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} (t - \tau)) d\tau$$

Each equation represents the movement of a damped SDOF oscillator under forced excitation.

In practice, each damping ratio  $\xi_i$  must be reset by experimentation. It is in fact very rare to find a structure whose damping corresponds to a simple model.

It is commonly considered that the value of the damping ratio does not depend on the mode considered:  $\xi_i = \xi$ . This constant  $\xi$  is then set by experimentation or by regulations.

#### A.1.2.3.2. Harmonic excitation - case of slightly dissipative systems

Modes are assumed to be orthogonal to the damping matrix.

The problem is solved by mode superposition: the solution to the problem  $[X]$  is sought with the modal variables

$$[X] = [\phi] [q]$$

Each modal variable  $q_i$  is then applied to equation (1.17). The solution sought and the excitation conventionally take the form:

$$\begin{aligned} [q] &= [q_0] e^{i\omega t} \\ [p] &= [p_0] e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (\text{Eq. A.1.18})$$

$[p]$  being the vector of the factors of modal participation in the force  $[F]$ :

$$p_i = \frac{[\phi_i]^T [F]}{[\phi_i]^T [M] [\phi_i]} = \frac{[\phi_i]^T [F]}{m_i} = p_{0i} e^{i\omega t}$$

The solution is therefore:

$$[X_0] = \sum_{i=1}^n q_{0i} [\phi_i] = \sum_{i=1}^n \frac{p_{0i} [\phi_i]}{\omega_i^2 - \omega^2 + i2\xi_i \omega_i \omega} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} \frac{[\phi_i]^\dagger [\phi_i]}{\omega_i^2 - \omega^2 + i2\xi_i \omega_i \omega} [F]$$

It is recognized that each term of this sum is in fact the response of an SDOF oscillator to harmonic excitation. The response of an MDOF oscillator with n DOFs is therefore expressed as a function of the response of n SDOF oscillators.

#### A.1.2.3.3. Forced excitation

Using the mode superposition method takes us back to the study of an SDOF system under forced excitation. The solution is given by the Duhamel integral:

$$q_i(t) = \frac{1}{\omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}} \int_0^t p_i(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin(\omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} (t - \tau)) d\tau$$

ce qui conduit à la détermination de la solution, par superposition modale :

$$[X] = \sum_{i=1}^n [\phi_i] q_i(t)$$

#### A.1.2.4. Troncature modale

Une structure complexe peut être modélisée par n ddl avec n très grand. Aussi, il est courant de représenter les ddl physiques par une combinaison linéaire des N premiers modes (ils sont supposés être rangés par ordre croissant de la fréquence), avec N inférieur, voire très inférieur à n.

Une telle opération doit être pratiquée avec certaines précautions : il faut donc définir un critère fiable permettant de justifier cette troncature modale.

Cette approche va dépendre du spectre de l'excitation : s'il est limité dans une gamme de pulsation inférieure à  $\omega_N$ , cela peut se justifier. Néanmoins, pour plus de rigueur et de précision, il est alors indispensable de tenir compte de ces modes négligés. Si on estime que ces modes ont une réponse quasi-statique on peut montrer qu'il est possible d'exprimer les modes négligés en fonction des modes retenus :

$$\begin{aligned} [X] &\approx \sum_{i=1}^N q_i(t) [\phi_i] + \left( \sum_{i=N+1}^n \frac{[\phi_i]^\dagger [\phi_i]}{m_i \omega_i^2} \right) [F] \\ &\approx \sum_{i=1}^N q_i(t) [\phi_i] + \left( [K]^{-1} - \sum_{i=1}^N \frac{[\phi_i]^\dagger [\phi_i]}{m_i \omega_i^2} \right) [F] \end{aligned}$$

On appelle raideur résiduelle  $K_{res}$  et souplesse résiduelle  $S_{res}$  les matrices telles que :

$$[S_{res}] = [K_{res}]^{-1} = [K]^{-1} - \sum_{i=1}^N \frac{[\phi_i]^\dagger [\phi_i]}{m_i \omega_i^2}$$

Il est très important de noter que cette matrice ne dépend que des caractéristiques statiques ( $[K]$ ) et des  $N$  premiers modes : on tient ainsi compte des modes négligés sans avoir à les calculer !

Remarque : L'expression ci-dessus vient de la décomposition modale de l'inverse de la matrice de raideur :

$$[K]^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{[\phi_i]^\dagger [\phi_i]}{m_i \omega_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{[\phi_i]^\dagger [\phi_i]}{k_i} \quad (\text{Eq. A.1.19})$$

En effet, si le système est sollicité statiquement, les équations modales (A.1.17) deviennent

$$\omega_i^2 q_i = \frac{[\phi_i]^\dagger [F]}{m_i}$$

which leads to determination of the solution by mode superposition:

$$[X] = \sum_{i=1}^n [\phi_i] q_i(t)$$

#### A.1.2.4. Modal truncation

A complex structure can be modelled by  $n$  DOFs if  $n$  is very large. Consequently it is common to represent the physical degrees of freedom by a linear combination of the first  $N$  modes (which are assumed to be in order of increasing frequency), where  $N$  is less than or much smaller than  $n$ .

This procedure calls for some precautions: a reliable criterion for justifying the modal truncation must be defined.

This approach will depend on the excitation spectrum: if it is restricted to a range of angular frequency of less than  $\omega_N$ , truncation can be justified. Nevertheless, to be more stringent and more precise, the modes neglected must be taken into account. If it is considered that they exhibit quasi-static response, it can be shown that they can be expressed as a function of the modes adopted:

$$\begin{aligned} [X] &\approx \sum_{i=1}^N q_i(t) [\phi_i] + \left( \sum_{i=N+1}^n \frac{[\phi_i]^\dagger [\phi_i]}{m_i \omega_i^2} \right) [F] \\ &\approx \sum_{i=1}^N q_i(t) [\phi_i] + \left( [K]^{-1} - \sum_{i=1}^N \frac{[\phi_i]^\dagger [\phi_i]}{m_i \omega_i^2} \right) [F] \end{aligned}$$

The residual stiffness and residual flexibility matrices are  $K_{res}$  and  $S_{res}$  :

$$[S_{res}] = [K_{res}]^{-1} = [K]^{-1} - \sum_{i=1}^N \frac{[\phi_i] [\phi_i]^T}{m_i \omega_i^2}$$

It is very important to observe that this matrix depends only on the static characteristics ( $[K]$ ) and the first  $N$  modes: the neglected modes are thus taken into account without having to be calculated!

Observation: The above expression results from modal decomposition of the reciprocal of the stiffness matrix:

$$[K]^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{[\phi_i] [\phi_i]^T}{m_i \omega_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{[\phi_i] [\phi_i]^T}{k_i} \quad (\text{Eq. A.1.19})$$

If the system is subject to static loading, the modal equations (A.1.17) become

$$\omega_i^2 q_i = \frac{[\phi_i]^T [F]}{m_i}$$

et alors la réponse modale est :

$$[X] = \sum_{i=1}^n [\phi_i] q_i = \sum_{i=1}^n [\phi_i] \frac{[\phi_i]^T [F]}{\omega_i^2 m_i} = \left( \sum_{i=1}^n \frac{[\phi_i] [\phi_i]^T}{\omega_i^2 m_i} \right) [F] = [K]^{-1} [F]$$

Par identification, on retrouve effectivement l'équation (A.1.19).

### A.1.2.5. Méthode de Rayleigh-Ritz

#### A.1.2.5.1. Méthode de Rayleigh

Nous proposons une approche énergétique pour déterminer une estimation de la première fréquence propre d'une structure : c'est la méthode de Rayleigh.

Cette méthode repose sur un principe d'approximation du champ de déplacement du système étudié : on postule a priori la déformée de la structure, soit, ici, un vecteur déplacement  $[\tilde{X}_0]$  :  $[\tilde{X}(t)] = [\tilde{X}_0] d(t)$

Ce vecteur doit être cinématiquement admissible.

On calcule alors les énergies de déformation et cinétique associées à cette déformée. La première pulsation propre est alors estimée par le rapport :

$$\omega_1^2 = \frac{[\tilde{X}_0]^T [K] [\tilde{X}_0]}{[\tilde{X}_0]^T [M] [\tilde{X}_0]} \quad (\text{Eq. A.1.20})$$

Si le vecteur  $[\tilde{X}_0]$  correspond au premier vecteur propre, alors la solution obtenue est la première pulsation propre. Plus on se rapproche du vecteur propre, meilleure est l'estimation.

Tout le problème est de choisir un « bon » vecteur  $[\tilde{X}_0]$ , c'est-à-dire d'avoir une idée sur le vecteur propre. En général, le vecteur des déplacements obtenus sous un chargement statique proportionnel à la valeur des masses, est un vecteur proche du premier vecteur propre.

#### A.1.2.5.2. Méthode de Rayleigh-Ritz

C'est en quelque sorte une généralisation de la méthode de Rayleigh : elle permet non seulement d'obtenir une estimation des N premières fréquences propres (souvent N est très inférieur à n), mais également d'obtenir de façon approchée les vecteurs propres. Le principe est le même : on postule N vecteurs  $\{[\tilde{X}_{0i}]\}_{i=1..N}$  indépendants, cinématiquement admissibles : le vecteur déplacement  $[X(t)]$  est alors approché par :

$$[X(t)] \approx [\tilde{X}(t)] = [\tilde{X}_{01} \dots \tilde{X}_{0N}] \begin{bmatrix} d_1(t) \\ \vdots \\ d_N(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N [\tilde{X}_{0i}] d_i(t) = \underbrace{[\tilde{X}_0]}_{n \times N} [d(t)]$$

and the modal response is therefore:

$$[X] = \sum_{i=1}^n [\phi_i] q_i = \sum_{i=1}^n [\phi_i] \frac{[\phi_i]^T [F]}{\omega_i^2 m_i} = \left( \sum_{i=1}^n \frac{[\phi_i] [\phi_i]^T}{\omega_i^2 m_i} \right) [F] = [K]^{-1} [F]$$

By identification, equation (A.1.19) can indeed be found.

#### A.1.2.5. Rayleigh-Ritz method

##### A.1.2.5.1. Rayleigh method

A conservation-of-energy approach is proposed to estimate the first natural frequency of a structure: this is the Rayleigh method.

This method is based on the principle of approximation of the field of displacement of the system studied: the deflected shape of the structure—here, a displacement vector  $[\tilde{X}_0]$ —is assumed:  $[\tilde{X}(t)] = [\tilde{X}_0] d(t)$

This vector must be kinematically acceptable.

The strain and kinetic energies associated with this deflection are then calculated. The first eigen angular frequency is then assessed from the relationship:

$$\omega_1^2 = \frac{[\tilde{X}_0]^T [K] [\tilde{X}_0]}{[\tilde{X}_0]^T [M] [\tilde{X}_0]} \quad (\text{Eq. A.1.20})$$

If vector  $[\tilde{X}_0]$  corresponds to the first eigenvector, the solution obtained is the first natural angular frequency. The closer one to the eigenvector is the better estimate.

The problem lies in choosing the 'right' vector  $[\tilde{X}_0]$ , i.e. having a realistic idea of what the eigenvector might be. In general, the vector of the displacements obtained under static loading proportional to the value of the masses is a vector close to the first eigenvector.

#### A.1.2.5.2. Rayleigh-Ritz method

The Rayleigh-Ritz method amounts to a generalization of the Rayleigh method: it can be used not only to obtain an estimate of the first N frequencies (N is often much lower than n), but also to obtain the approximate eigenvectors. The principle is the same: N independent, kinematically acceptable vectors  $\{[\tilde{X}_{0i}]\}_{i=1 \dots N}$  are assumed: an approximate value of the displacement vector  $[X(t)]$  is then found by:

$$[X(t)] \approx [\tilde{X}(t)] = [\tilde{X}_{01} \dots \tilde{X}_{0N}] \begin{bmatrix} d_1(t) \\ \vdots \\ d_N(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N [\tilde{X}_{0i}] d_i(t) = \underbrace{[\tilde{X}_0]}_{n \times N} [d(t)]$$

On obtient alors une estimation des N premières fréquences propres en résolvant le problème suivant :

$$\underbrace{^t[\tilde{X}_0][K][\tilde{X}_0]}_{N \times N} - \omega_i^2 \underbrace{^t[\tilde{X}_0][M][\tilde{X}_0]}_{N \times N} = 0$$

Si on pose :

$$[\tilde{K}] = ^t[\tilde{X}_0][K][\tilde{X}_0]$$

$$[\tilde{M}] = ^t[\tilde{X}_0][M][\tilde{X}_0]$$

on est donc ramené à déterminer les valeurs et vecteurs propres associés au problème :

$$[\tilde{K}] - \omega^2 [\tilde{M}] = 0$$

Ce problème est plus intéressant à résoudre que le problème original dans la mesure où N est (très) inférieur à n.

Ainsi les  $\tilde{\omega}_i$  obtenus sont des approximations des N premières pulsations propres  $\omega_i$  du système. A chacune de ces valeurs propres correspond un vecteur propre :

$$\tilde{\Psi}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_{i1} \\ \vdots \\ \tilde{\Psi}_{iN} \end{bmatrix}$$

On obtient alors l'approximation du vecteur propre i par :

$$[\tilde{\phi}_i] = [\tilde{X}_{01} \dots \tilde{X}_{0N}] [\tilde{\psi}_i] = [\tilde{X}_0] [\tilde{\psi}_i] = \sum_{j=1}^N [\tilde{X}_{0j}] \tilde{\psi}_{ij}$$

**A.1.2.6. Conclusion**

Représenter un système à n ddl par n oscillateurs simples : voilà l'idée fondamentale de ce chapitre et de la mécanique des vibrations linéaires des systèmes discrets en général. Cela se traduit par le schéma de la figure A.1.10.

An estimate of the first N frequencies is then obtained by solving the following problem:

$$\underbrace{{}^t[\tilde{X}_0][K][\tilde{X}_0]}_{N \times N} - \omega_i^2 \underbrace{{}^t[\tilde{X}_0][M][\tilde{X}_0]}_{N \times N} = 0$$

If we take:

$$[\tilde{K}] = {}^t[\tilde{X}_0][K][\tilde{X}_0]$$

$$[\tilde{M}] = {}^t[\tilde{X}_0][M][\tilde{X}_0]$$

we find ourselves determining the values and eigenvectors associated with the problem:

$$[\tilde{K}] - \omega^2 [\tilde{M}] = 0$$

It is more interesting to solve this problem than the original problem in that N is (well) below n.

The  $\tilde{\omega}_i$  values obtained are thus approximations of the first N natural angular frequencies  $\omega_i$  of the system. To each of these eigenvalues corresponds an eigenvector:

$$\tilde{\psi}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_{i1} \\ \vdots \\ \tilde{\psi}_{iN} \end{bmatrix}$$

The approximate eigenvector  $i$  is then obtained with:

$$[\tilde{\phi}_i] = [\tilde{X}_{01} \cdots \tilde{X}_{0N}] [\tilde{\psi}_i] = [\tilde{X}_0] [\tilde{\psi}_i] = \sum_{j=1}^N [\tilde{X}_{0j}] \tilde{\psi}_{ij}$$

### A.1.2.6. Conclusion

Representing an MDOF system with  $n$  SDOF oscillators: that is the fundamental idea of this chapter and of the mechanics of linear vibration of discrete systems in general. It is shown by the diagram in figure A.1.10.

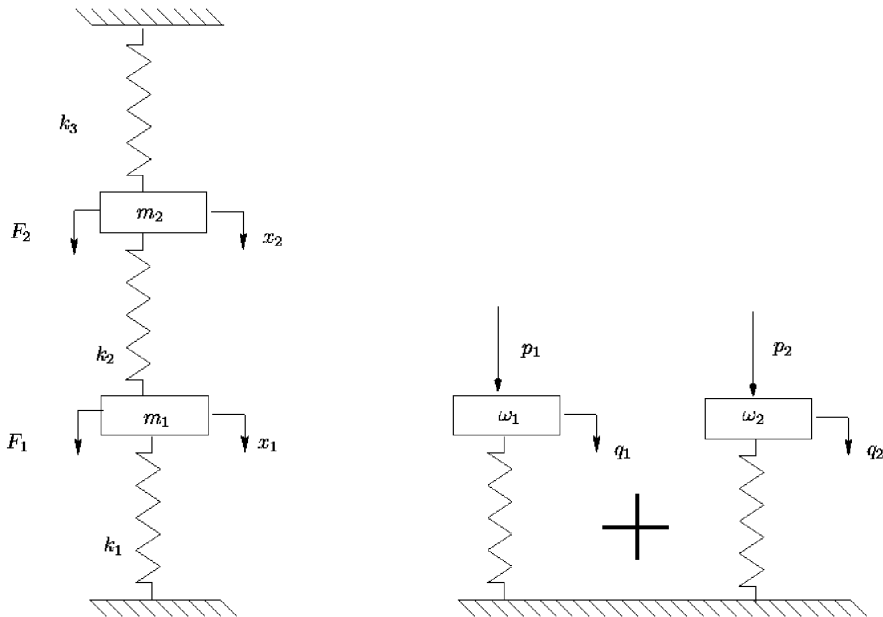


Figure A.1.10 : Approche modale d'un système à 2 ddl

## A.1.3. Systèmes élastiques continus

### A.1.3.1. Généralités



Les systèmes réels sont rarement discrets. Ainsi, une poutre est déformable en tout point, possède en tout point une certaine inertie et est apte à dissiper de l'énergie en tout point.

Nous sommes donc en présence d'un problème de dynamique des milieux continus : aux équations de la statique, il faut donc rajouter le terme qui correspond aux forces d'inertie.

Cependant il ne faut pas croire que l'étude des systèmes discrets était inutile : nous verrons que, d'un point de vue pratique, l'étude de systèmes continus se ramène finalement à l'étude de systèmes discrets. Une telle approche sera nécessairement une approximation, puisqu'un système discret a un nombre fini de ddl, alors qu'un système continu a une infinité de ddl.

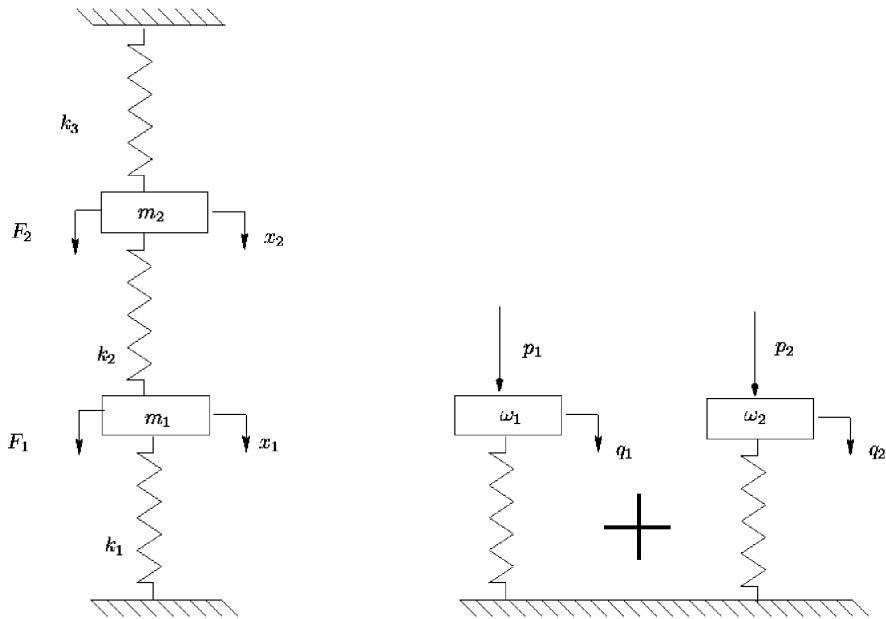


Figure 1.10: Modal approach to a 2DOF system

### A.1.3. Continuous elastic systems

#### A.1.3.1. General

*Real systems are seldom discrete. A beam, for example, is deformable at any point, has a certain inertia at any point, and can dissipate energy at any point.*

*We are therefore confronted with a problem of continuum dynamics: to the equations of the static problem must be added the term corresponding to inertia forces.*

*However, it must not be thought that the study of discrete systems served no purpose: it will be seen that, from a practical viewpoint, the study of continuous systems is in fact not that different from the study of discrete systems. This approach will necessarily be an approximation since a discrete system has a finite number of DOFs whereas a continuous system has an infinite number.*

L'étude dynamique d'un système élastique continu nécessite de :

- poser le problème vibratoire (formuler les équations) :
  - déterminer l'équation aux dérivées partielles régissant le champ de déplacement  $X(x,y,z,t)$  : c'est l'équation du mouvement,
  - donner les équations exprimant les conditions aux limites : ces équations peuvent également être des équations aux dérivées partielles,
  - donner les conditions initiales.
- résoudre le problème :
  - calcul des modes propres du système élastique continu,
  - calcul de la réponse du système élastique continu.

Pour ce faire, nous supposerons que les systèmes étudiés vérifient les hypothèses suivantes :

- le système élastique continu ne subit que des petites déformations autour de son état naturel,
- le système élastique continu a (par définition) une loi de comportement élastique linéaire ; ses caractéristiques mécaniques sont  $E$  son module de Young et  $\rho$  sa masse volumique,
- le système élastique continu vibre dans le vide.

#### A.1.3.2. Mise en équation

On étudie une poutre (à entendre ici au sens large) dans ce chapitre : c'est un milieu continu unidimensionnel rectiligne susceptible de se déformer :

- par traction-compression (barre),

- par flexion pure.

Nous étudierons successivement ces 2 cas.

Nous n'étudierons que des structures bidimensionnelles sans perte réelle de généralité : l'aspect tridimensionnel rajoute uniquement des variables supplémentaires.

D'une manière générale le champ de déplacement  $X(x,y,z,t)$  d'un point  $M(x,y,z,t)$  d'une poutre est caractérisé par ses ddl :

$$X(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} u(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \\ \theta(x, y, z, t) \end{bmatrix}$$

où :

- $u$  est le déplacement longitudinal i.e. selon la direction de la poutre,
- $w$  est le déplacement transverse (flèche) i.e. selon la direction perpendiculaire à la poutre,
- $\theta$  est la rotation autour d'un axe orthogonal au plan de la structure :  $c$  est la pente prise par la poutre, due au moment fléchissant.

*Dynamic study of a continuous elastic system requires:*

- *setting the vibration problem (formulating the equations):*
  - *determine the partial derivative equation determining the field of displacement  $X(x,y,z,t)$ : this is the movement equation,*
  - *give the equations expressing boundary conditions: these equations can also be partial derivative equations,*
  - *give the initial conditions.*
- *solve the problem:*
  - *calculation of the modes of the continuous elastic system,*
  - *calculation of the response of the continuous elastic system.*

*To do this, it is assumed that the systems studied verify the following assumptions:*

- *the continuous elastic system undergoes only small deformations about its natural status,*
- *the continuous elastic system has (by definition) a linear-elastic behavioural law; its mechanical characteristics are its modulus of elasticity  $E$  and its density  $\rho$ ,*
- *the continuous elastic system vibrates in a vacuum.*

### A.1.3.2. Model

*A beam (in the broad sense) is studied in this chapter: it is a straight one-dimensional continuum that can deform:*

- *as a result of tension-compression (bar),*
- *as a result of pure bending.*

*Both these cases will be studied.*

Only two-dimensional structures will be studied here, which does not imply any loss of general applicability: the three-dimensional aspect only adds extra variables.

Generally speaking, the field of displacement  $X(x,y,z,t)$  of a point  $M(x,y,z,t)$  on a beam is characterized by its DOFs:

$$X(x,y,z,t) = \begin{bmatrix} u(x,y,z,t) \\ w(x,y,z,t) \\ \theta(x,y,z,t) \end{bmatrix}$$

where:

- $u$  is longitudinal displacement, i.e. in the direction of the beam,
- $w$  is the lateral displacement (deflection) i.e. perpendicular to the direction of the beam,
- $\theta$  is the rotation about an axis orthogonal to the plane of the structure: this is the slope assumed by the beam as a result of its bending moment.

En outre, on travaille dans un repère lié à la poutre : l'axe de la poutre est confondu avec  $(x',x)$  et le système est dans le plan  $(x,z)$

#### A.1.3.2.1. Mouvement longitudinal d'une barre

On ne s'intéresse donc qu'à la composante  $u(x,t)$  de  $X(x,t)$ . L'équilibre d'un tronçon de poutre d'épaisseur (supposée infinitésimale)  $dx$  et de section  $S$ , soumis à :

- l'effort normal en  $x$ ,
- l'opposé de l'effort normal en  $x+dx$ ,
- un effort extérieur réparti (précontrainte)  $p(x) dx$ .

conduit à l'équation du mouvement d'une barre de section constante :

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = p(x,t) \quad (\text{Eq. A.1.21})$$

#### A.1.3.2.2. Mouvement transverse

On étudie une poutre en flexion pure. On prend l'hypothèse de Navier : les sections droites restent droites. On supposera en outre que le cisaillement transverse est négligeable (poutre de Euler-Bernoulli).

On ne s'intéresse donc qu'à la composante  $w(x,t)$  de  $X(x,t)$ . L'équilibre d'un tronçon de poutre d'épaisseur  $dx$ , de section  $S$  et d'inertie  $I$ , soumis à :

- l'effort tranchant et au moment fléchissant en  $x$ ,
- l'opposé de l'effort tranchant et du moment fléchissant en  $x+dx$ ,
- un effort extérieur réparti  $F(x,t)$ .

conduit à l'équation du mouvement d'une poutre en flexion à section constante est :

$$\rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = F(x, t) \quad (\text{Eq. A.1.22})$$

### A.1.3.2.3. Equations aux limites

Pour résoudre les équations de mouvement, il faut des conditions initiales (temporelles) et des conditions aux limites (spatiales).

Les conditions aux limites sont des données très importantes, car elles fixent les fréquences de résonance de la structure. Elles sont associées à :

- des déplacements imposés (condition géométrique) : encastrement, appuis, rotules,...
- des efforts imposés :
  - extrémités libres (condition naturelle) : effort normal, tranchant nul, moment fléchissant nul,...
  - des masses localisées,
  - des raideurs localisées.

*In addition, a coordinate system linked to the beam is used: the centreline of the beam is the same as (x',x) and the system is in plane (x,z)*

### A.1.3.2.1. Longitudinal movement of a bar

*Only the u(x,t) component of X(x,t) is of interest here. The equilibrium of a section of beam of thickness dx (assumed to be infinitesimal) and of section S, subject to:*

- normal force on x,
- the opposite of the normal force on x+dx,
- a distributed external force (prestress) p(x) dx.

*leads to the movement equation for a bar of constant section:*

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = p(x, t) \quad (\text{Eq. A.1.21})$$

### A.1.3.2.2. Lateral movement

*A beam is studied in pure bending. Bernoulli's assumption is used: plane sections remain plane. In addition, it is assumed that lateral shear is negligible (Euler-Bernoulli beam).*

*Only the w(x,t) component of X(x,t) is therefore of interest. The equilibrium of a section of beam of thickness dx, sectional area S and inertia I subject to:*

- shearing force and bending moment on x,
- the opposite of the shearing force and bending moment on x+dx,
- a distributed external force F(x,t).

leads to the movement equation for a beam of constant section subject to bending:

$$\rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = F(x, t) \quad (\text{Eq. A.1.22})$$

#### A.1.3.2.3. Boundary-condition equations

To solve movement equations, initial conditions (time domain) and boundary conditions (space domain) must be known.

The boundary conditions are very important data, for they determine the resonant frequencies of the structure. They are associated with:

- imposed displacements (geometrical condition): end-fixing, supports, hinges, etc.
- imposed forces and moments:
  - free ends (natural condition): normal force, zero shear, zero bending moment, etc.
  - localized masses,
  - localized stiffnesses.

Exemple 1 :

Poutre en flexion-traction-compression encastree en  $x = 0$  et libre en  $x = L$  :

$x = 0$	$x = L$
$u = 0$	$N = 0$
$w = 0$	$T = 0$
$\theta = 0$	$M = 0$

Exemple 2 :

Poutre en flexion-traction-compression appuyee en  $x = 0$  et appuyee en  $x = L$  :

$x = 0$	$x = L$
$N = 0$	$N = 0$
$w = 0$	$w = 0$
$M = 0$	$M = 0$

Exemple 3 :

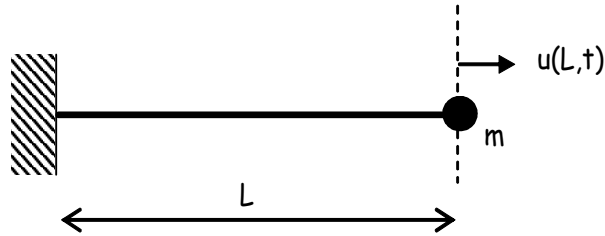


Figure A.1.11 : Barre ( $E, S, L$ ) en traction-compression encastrée en  $x = 0$  avec une masse localisée  $m$  en  $x = L$ .

Pour obtenir la condition aux limites en  $x = L$ , on écrit l'équilibre de la masse  $m$  :

$$N(L, t) = m\ddot{u}(L, t)$$

Soit :

$$-ESu'(L, t) = m\ddot{u}(L, t)$$

Example 1:

Beam in flexion-tension-compression end-fixed at  $x = 0$  and free at  $x = L$ :

$x = 0$	$x = L$
$u = 0$	$N = 0$
$w = 0$	$T = 0$
$\theta = 0$	$M = 0$

Example 2:

Beam in flexion-tension-compression simply supported at both  $x = 0$  and  $x = L$ :

$x = 0$	$x = L$
$N = 0$	$N = 0$
$w = 0$	$w = 0$

$M = 0$	$M = 0$
---------	---------

Exemple 3:

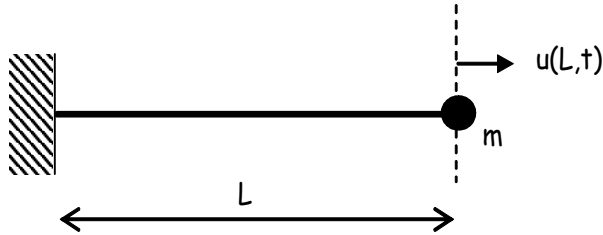


Figure A.1.11: Bar ( $E, S, L$ ) in tension-compression end-fixed at  $x = 0$  with a localized mass  $m$  at  $x = L$ .

To obtain the boundary conditions at  $x = L$ , the equilibrium of mass  $m$  is written:

$$N(L, t) = m\ddot{u}(L, t)$$

giving:

$$-ESu'(L, t) = m\ddot{u}(L, t)$$

Exemple 4 :

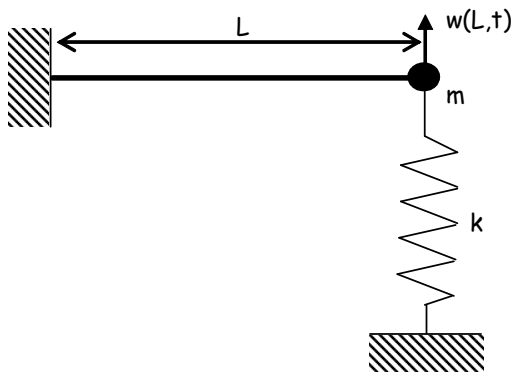


Figure A.1.12 : Poutre ( $E, I, L$ ) en flexion pure encadrée en  $x = 0$  avec une masse localisée  $m$  en  $x = L$  et une raideur localisée  $k$  transverse en  $x = L$ .



Pour obtenir la condition aux limites en  $x = L$ , on écrit l'équilibre de la masse  $M$  :

$$\begin{aligned} T(L,t) - kw(L,t) &= m\ddot{w}(L,t) \\ M(L,t) &= 0 \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} EIw^{(3)}(L,t) - kw(L,t) &= m\ddot{w}(L,t) \\ w^{(2)}(L,t) &= 0 \end{aligned}$$

On remarque que dans les deux exemples ci-dessus on a 6 conditions aux limites : 2 associées à la traction-compression (équation du second ordre) et 4 associées à la flexion (équation du quatrième ordre).

### A.1.3.3. Modes propres d'un système élastique continu

#### A.1.3.3.1. Méthodologie

Pour déterminer les modes propres d'un système élastique continu, on dispose de :

- l'équation d'équilibre,
- des conditions aux limites.

Un mode propre d'un système élastique continu est une solution  $u(x,t)$  du problème qui s'écrit sous la forme :

$$u(x,t) = \phi(x) a(t) \tag{Eq. A.1.23}$$

En outre, on peut montrer que la fonction temporelle est harmonique :

$$a(t) = a_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

Example 4:

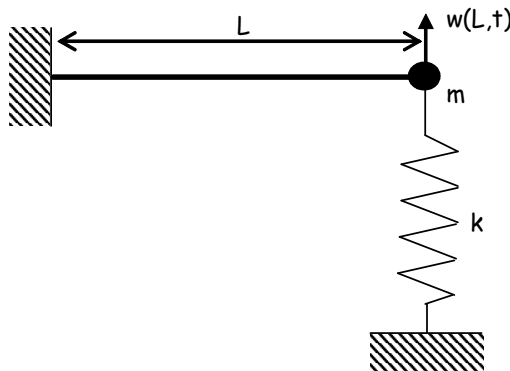


Figure A.1.12: Beam ( $E, I, L$ ) in pure bending end-fixed at  $x = 0$  with a localized mass  $m$  at  $x = L$  and a localized lateral stiffness  $k$  at  $x = L$ .

To obtain the boundary conditions at  $x = L$ , the equilibrium of mass  $M$  is written:

$$\begin{aligned} T(L, t) - kw(L, t) &= m\ddot{w}(L, t) \\ M(L, t) &= 0 \end{aligned}$$

giving:

$$\begin{aligned} EIw^{(3)}(L, t) - kw(L, t) &= m\ddot{w}(L, t) \\ w^{(2)}(L, t) &= 0 \end{aligned}$$

It can be seen that in the two examples above, there are 6 boundary conditions: 2 associated with tension-compression (second-order equation) and 4 associated with bending (fourth-order equation).

### A.1.3.3 Modes of a continuous elastic system

#### A.1.3.3.1. Methodology

The following elements used to determine the modes of a continuous elastic system have already been found:

- the equilibrium equation,
- the boundary conditions.

An eigenmode of a continuous elastic system is a solution  $u(x, t)$  to the problem written in the form:

$$u(x, t) = \phi(x) a(t) \quad (\text{Eq. 1.23})$$

In addition, it can be shown that the time-domain function is harmonic:

$$a(t) = a_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

Un mode est constitué de la donnée d'une forme propre  $\phi(x)$  (déformée de la structure) et d'une pulsation propre  $\omega$ . Un mode est donc une onde stationnaire : tous les points du système vibrent en phase.

Pour déterminer les modes propres du système la méthode est la suivante :

- on injecte la solution (A.1.23) dans l'équation d'équilibre sans second membre et sans amortissement,
- on sépare les variables de temps et d'espace : il apparaît alors une constante dont le signe est clair pour avoir une solution physiquement acceptable,
- on résout alors l'équation (a priori différentielle) associée à la grandeur spatiale : des constantes d'intégration apparaissent. La solution générale obtenue permettra ensuite de déterminer les formes propres  $\phi(x)$  du système,
- on détermine les constantes d'intégration à l'aide des conditions aux limites : on obtient un système d'équations homogène. Sa solution ne pouvant pas être la solution nulle (toutes les constantes nulles), pour déterminer les constantes il est

nécessaire d'imposer la nullité du déterminant du système : cette condition donne l'équation caractéristique du système,

- la solution de l'équation caractéristique fournit alors les pulsations propres du système.

Appliquons ces principes aux deux cas classiques : vibration longitudinale d'une barre et vibration en flexion d'une poutre.

#### A.1.3.3.2. Vibrations longitudinales

On injecte la solution suivante :  $u(x,t) = \phi(x) a(t)$  dans l'équation d'équilibre d'une barre ( $E, S, L, \rho$ ) :

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Après simplifications et séparation des variables, on a :

$$\frac{E}{\rho} \frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = \text{constante} = -\omega^2$$

La constante est nécessairement négative, sinon on obtient une solution qui croît exponentiellement dans le temps et donc physiquement inacceptable. On retrouve donc que  $a(t)$  est sinusoïdale :  $a(t) = a_0 \cos(\omega t + \alpha)$

De même, on obtient la forme générale des déformées propres d'une barre :

$$\phi(x) = A \sin\left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} x\right) + B \cos\left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} x\right)$$

*A mode consists of the data for an eigenform  $\phi(x)$  (structural deformation) and of a natural angular frequency  $\omega$ . A mode is therefore a standing wave: all points in the system vibrate in phase.*

*The following method is used to determine the modes of the system:*

- *solution (1.23) is injected into the equilibrium equation without the second side and without damping,*
- *time and space variables are separated: this reveals a constant whose sign will determine whether a physically acceptable solution is obtained,*
- *the equation (in principle differential) associated with the space-domain quantity is then solved: integration constants are found. The general solution obtained can then be used to determine the eigenforms  $\phi(x)$  of the system,*
- *the integration constants are determined using the boundary conditions: this gives a uniform system of equations. Since its solution cannot be zero (all zero constants), to determine the constants it is necessary to impose a zero value on*

the determinant of the system: this condition gives the characteristic equation of the system,

- the solution of the characteristic equation then gives the natural angular frequencies of the system.

Let us now apply these principles to two conventional cases: longitudinal vibration of a bar and flexural vibration of a beam.

### A.1.3.3.2. Longitudinal vibration

The solution  $u(x,t) = \phi(x) a(t)$  is injected into the equilibrium equation of a bar ( $E, S, L, \rho$ ):

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

After simplification and separation of variables we have:

$$\frac{E \phi''(x)}{\rho \phi(x)} = \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = \text{constant} = -\omega^2$$

The constant is necessarily negative, otherwise the solution increases exponentially over time and is therefore physically unacceptable. It is therefore found that  $a(t)$  is a sine form:  $a(t) = a_0 \cos(\omega t + \alpha)$

Similarly, the general form of the mode shapes of a bar is found:

$$\phi(x) = A \sin\left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} x\right) + B \cos\left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} x\right)$$

Ainsi, la solution modale est :

$$u(x, t) = a_0 \cos(\omega t + \alpha) \left( A \sin\left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} x\right) + B \cos\left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} x\right) \right)$$

Il reste donc à déterminer les constantes d'intégration et la pulsation  $\omega$  :

- $a_0$  et  $\alpha$  se déterminent avec les conditions initiales,
- $A, B$  et  $\omega$  s'obtiennent avec les conditions aux limites.

Exemple : Barre encastree-libre : les conditions aux limites s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0, t) = 0 = a(t) \phi(0) \\ N(L, t) = 0 = ES \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = ES a(t) \phi'(L) \end{array} \right|$$

On en déduit le système suivant :

$$\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} A \cos\left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} L\right) = 0$$

B étant nulle, pour obtenir une solution non nulle, il faut :

$$\cos\left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} L\right) = 0$$

On en déduit donc les pulsations propres :

$$\omega_n = \frac{(2n-1)}{2L} \pi \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad n = 1, 2, \dots$$

Les déformées propres (définies à une constante multiplicative près) sont donc :

$$\phi_n(x) = A \sin\left(\frac{2n-1}{2L} \pi x\right)$$

De même que dans le cas discret, on peut définir une raideur généralisée  $k_n$  et une masse généralisée  $m_n$  :

$$m_n = \int_0^L \rho S \phi_n^2(x) dx$$

$$k_n = \int_0^L E S \phi_n'^2(x) dx$$

On retrouve la relation :  $\omega_n^2 = \frac{k_n}{m_n}$

#### A.1.3.3.3. Vibrations transversales (flexion pure)

On injecte la solution suivante :  $w(x,t) = \phi(x) a(t)$  dans l'équation d'équilibre :

$$\rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0$$

The modal solution is thus:

$$u(x,t) = a_0 \cos(\omega t + \alpha) \left( A \sin\left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} x\right) + B \cos\left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} x\right) \right)$$

It then remains to determine the integration constants and the angular frequency  $\omega$ :

- $a_0$  and  $\alpha$  are determined with the initial conditions,
- $A$ ,  $B$  and  $\omega$  are obtained with the boundary conditions.

Example: Bar end-fixed at one end, free at the other: the boundary conditions are written thus:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0,t) = 0 = a(t)\phi(0) \\ N(L,t) = 0 = ES \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = ES a(t)\phi'(L) \end{array} \right\}$$

From this is deduced the following system:

$$\begin{aligned} B &= 0 \\ \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} A \cos\left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} L\right) &= 0 \end{aligned}$$

Since B is zero, the following is needed to obtain a non-zero solution:  $\cos\left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} L\right) = 0$

From this are deduced the natural angular frequencies:

$$\omega_n = \frac{(2n-1)}{2L} \pi \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad n=1,2,\dots$$

The mode shapes (defined to within one multiplicative constant) are therefore:

$$\phi_n(x) = A \sin\left(\frac{2n-1}{2L} \pi x\right)$$

In the same way as for the discrete case, a generalized stiffness  $k_n$  and a generalized mass  $m_n$  can be defined:

$$\begin{aligned} m_n &= \int_0^L \rho S \phi_n^2(x) dx \\ k_n &= \int_0^L E S \phi_n'^2(x) dx \end{aligned}$$

From this is found the relation:  $\omega_n^2 = \frac{k_n}{m_n}$

#### A.1.3.3.3. Lateral vibration (pure bending)

The solution  $w(x,t) = \phi(x) a(t)$  is injected into the equilibrium equation:

$$\rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0$$

Après simplifications et séparation des variables, on a :

$$\frac{EI \phi^{(4)}(x)}{\rho S \phi(x)} = -\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = \text{constante} = \omega^2$$

Là encore, le signe de la constante découle d'une solution physiquement acceptable ; on retrouve que  $a(t)$  est sinusoïdale. En outre l'équation différentielle régissant  $\phi$  est du quatrième ordre :

$$\frac{d^4 \phi}{dx^4}(x) - \frac{\rho S}{EI} \omega^2 \phi(x) = 0$$

Si on pose  $k = \sqrt[4]{\frac{\rho S \omega^2}{EI}}$ , la solution générale de l'équation ci-dessus (donc la déformée)

$$\text{est : } \phi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) + C \sinh(kx) + D \cosh(kx)$$

On utilise les conditions aux limites pour déterminer les constantes d'intégration et la pulsation.

Exemple : Poutre appuyée-appuyée : les conditions aux limites s'écrivent :

$$w(0, t) = 0$$

$$M(0, t) = 0 = EI w''(0, t)$$

$$w(L, t) = 0$$

$$M(L, t) = 0 = EI w''(L, t)$$

d'où le système :

$$B + D = 0$$

$$-B + D = 0$$

$$A \sin(kL) + B \cos(kL) + C \sinh(kL) + D \cosh(kL) = 0$$

$$-A k^2 \sin(kL) - B k^2 \cos(kL) + C k^2 \sinh(kL) + D k^2 \cosh(kL) = 0$$

Ce système étant homogène, on ne peut avoir une solution non-nulle que si le déterminant du système est nul ; on en déduit l'équation caractéristique qui se ramène à :  $\sin(kL) = 0$ .

La résolution de cette équation conduit aux pulsations propres :  $\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$

et finalement aux déformées modales :  $\phi_n = A \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right)$

On peut également définir une masse et une raideur généralisée :

$$m_n = \int_0^L \rho S \phi_n^2(x) dx$$

$$k_n = \int_0^L EI \phi_n''^2(x) dx$$

*After simplifications and separation of variables, we have:*

$$\frac{EI}{\rho S} \frac{\phi^{(4)}(x)}{\phi(x)} = -\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = \text{constant} = \omega^2$$

*Here too, the sign of the constant is the consequence of a physically acceptable solution; again, it is found that  $a(t)$  has a sine form. In addition, the differential equation governing  $\phi$  is a fourth-order equation:*

$$\frac{d^4 \phi}{dx^4}(x) - \frac{\rho S}{EI} \omega^2 \phi(x) = 0$$

If we set  $k = \sqrt[4]{\frac{\rho S \omega^2}{EI}}$ , the general solution of the equation above (and therefore the mode shape) is:  $\phi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) + C \sinh(kx) + D \cosh(kx)$

The boundary conditions are used to determine the integration constants and the angular frequency.

Example: Beam simply supported at both ends: the boundary conditions are written:

$$w(0, t) = 0$$

$$M(0, t) = 0 = EI w''(0, t)$$

$$w(L, t) = 0$$

$$M(L, t) = 0 = EI w''(L, t)$$

Whence we get the system:

$$B + D = 0$$

$$-B + D = 0$$

$$A \sin(kL) + B \cos(kL) + C \sinh(kL) + D \cosh(kL) = 0$$

$$-A k^2 \sin(kL) - B k^2 \cos(kL) + C k^2 \sinh(kL) + D k^2 \cosh(kL) = 0$$

Since this system is uniform, a non-zero solution can be found only if the determinant of the system is zero: from this is deduced the characteristic equation which amounts to:  $\sin(kL) = 0$

Solving this equation gives the natural angular frequencies:  $\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$

and finally the mode shape:  $\phi_n = A \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right)$

A mass and a generalized stiffness can also be defined:

$$m_n = \int_0^L \rho S \phi_n^2(x) dx$$

$$k_n = \int_0^L EI \phi_n''^2(x) dx$$

## A.1.4. Discrétisation des systèmes continus

### A.1.4.1. Introduction

Ainsi que cela a été mentionné, peu de problèmes d'analyse modale de systèmes élastiques continus ont une solution analytique. C'est pourquoi il est nécessaire d'avoir recours à des méthodes d'approximations :



- méthode de discrétisation directe des masses : la structure est approchée par des masses et des ressorts,
- méthode de Rayleigh-Ritz : la variation spatiale des fonctions est postulée a priori,
- méthode des éléments finis : la structure est découpée en sous-partie, sur lesquelles on applique une méthode de Rayleigh-Ritz.

Ces méthodes sont des méthodes de discrétisation : on passe d'un nombre infini de ddl pour les systèmes continus, à un nombre fini de ddl.

#### A.1.4.2. Discrétisation directe des masses

Cette méthode peut dépendre fortement de l'aptitude du « modélisateur » à discrétiser une structure : elle est néanmoins très importante car elle est largement utilisée pour effectuer des modélisations en génie civil (notamment en calcul parasismique). Elle permet d'obtenir très simplement les matrices de masse et de raideur.

Cette méthode consiste à :

- réaliser un découpage géométrique de la structure,
- concentrer la masse de chaque partie découpée au niveau d'un nœud (en général son centre de gravité) sous forme de :
  - masse agissant en translation,
  - inertie massique agissant en rotation.

En conséquence les ddl du système discret sont les ddl « physiques » associés au point où on a concentré la masse : on suppose donc que chaque partie « suit rigidement » les ddl du nœud d'où l'importance du choix des découpages. Une telle méthode conduit à une matrice de masse diagonale. En ce qui concerne la rigidité, on détermine la raideur en reliant 2 ddl entre eux : la matrice de rigidité n'est pas forcément diagonale.

Exemple :

Discrétisation d'une barre encastree libre (figure A.1.13) : le premier nœud est situé au 1/3 de la longueur, le deuxième au 2/3 de la longueur et le dernier à l'extrémité. Pour chaque nœud, on affecte la moitié de la masse de chaque élément avec lequel il est connecté ; la raideur de chaque ressort est calculée à partir de la rigidité d'un élément de barre.

Le choix des  $k_i$  et  $m_i$  est important et détermine la précision que l'on aura sur les fréquences propres. On peut choisir un découpage en trois parties de même longueur :

### A.1.4. Discretization of continuous systems

#### A.1.4.1. Introduction

As already mentioned, few continuous elastic system modal analysis problems have an analytical solution. For this reason means of approximating are required:

- *lumped-mass discretization method: the structure is represented by masses and springs,*
- *Rayleigh-Ritz method: the spatial variation of functions is assumed from the outset,*
- *finite-element method: the structure is discretized into subunits to which a Rayleigh-Ritz method is applied.*

*These are discretization methods: they reduce the problem from an infinite number of DOFs in continuous systems to a finite number of DOFs.*

#### *A.1.4.2. Lumped-mass discretization method*

*This method can be highly dependent on the ability of the 'modeller' to discretize a structure: it is nevertheless very important for it is broadly used for civil-engineering modelling (especially for seismic analysis). It is a very easy means of obtaining the mass and stiffness matrices.*

*The method consists in:*

- *breaking the structure down into geometrical units,*
- *concentrating ('lumping') the mass of each unit at a node (generally its centre of gravity) in the form of:*
  - *mass acting in translation,*
  - *rotational inertia per unit mass.*

*Consequently the DOFs of the discrete system are the 'physical' DOFs associated with a point where the mass has been 'lumped': it is therefore assumed that each part 'rigidly' follows the DOFs of the node, whence the importance of how the structure is discretized. This method results in a diagonal mass matrix. The stiffness is determined by connecting 2 DOFs together: the stiffness matrix is not necessarily diagonal.*

*Example: Discretization of an end-fixed/free bar (figure 1.13): the first node is located one-third of the way along the length, the second node at the two-thirds point, and the last node at the end. Each node is given half of the mass of each element to which it is connected; the stiffness of each spring is calculated from the stiffness of a bar element.*

*The choice of  $k_i$  and  $m_i$  values is important and determines the accuracy of the natural frequencies determined. The elemental breakdown may consist of three parts of equal length:*

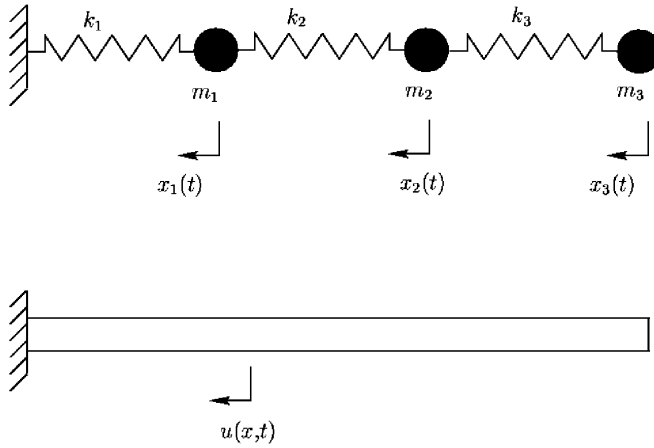


Figure A.1.13: Discretisation directe de la masse d'une barre

### A.1.4.3. Méthode de Rayleigh-Ritz

Le système à calculer étant continu, il est déterminé dès que l'on connaît les fonctions continues décrivant les ddl de chaque point : translations, rotations. On se propose donc de ramener la connaissance de ces fonctions continues  $u(M, t)$  par la détermination d'un nombre fini de paramètres  $\{a_i(t)\}_{i=1, \dots, N}$  (constituant le vecteur  $[a(t)]$ ) grâce aux fonctions d'approximation  $\psi_i(M)$  :

$$u(M, t) \cong \tilde{u}(M, t) = \sum_{i=1}^N \psi_i(M) a_i(t) = {}^t[\psi][a(t)]$$

avec :

- $a_i(t)$  : coordonnée généralisée. Ce sont nos inconnues à déterminer : on les regroupe dans le vecteur des coordonnées généralisées  $[a(t)]$  ; la dimension  $n$  du vecteur  $[a(t)]$  donne le nombre de ddl du système discrétisé,
- $\psi_i(M)$  : fonction spatiale donnée. Elle doit être cinématiquement admissible et définie sur toute la structure, qui occupe le domaine  $V$ .

Ainsi, lorsque l'on connaît les coordonnées généralisées, à l'aide des fonctions d'approximation  $\psi_i(M)$ , on a  $u$  en n'importe quel point du système.

La méthode générale consiste à :

- Ecrire l'énergie cinétique, l'énergie de déformation du système ainsi que le travail des efforts extérieurs en fonction du champ approché  $\tilde{u}$ .
- Réécrire ces énergies sous forme matricielle en mettant en évidence les vecteurs des coordonnées généralisées :

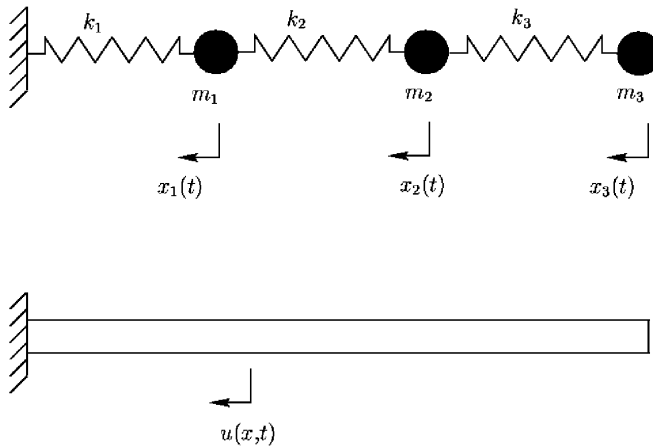


Figure A.1.13: Lumped-mass discretization of a bar

#### A.1.4.3. Rayleigh-Ritz method

Since the system to be analyzed is continuous, it can be calculated when the continuous functions determining the DOFs of each point (translations and rotations) are known. It is proposed to represent these continuous functions  $u(M, t)$  as a finite number of parameters  $\{a_i(t)\}_{i=1, \dots, N}$  (constituting the vector  $[a(t)]$ ) obtained with approximation functions  $\psi_i(M)$ :

$$u(M, t) \cong \tilde{u}(M, t) = \sum_{i=1}^N \psi_i(M) a_i(t) = {}^t[\Psi][a(t)]$$

with:

- $a_i(t)$ : generalized coordinate. These are the unknowns to be determined: they are grouped in the vector of generalized coordinates  $[a(t)]$ ; the dimension  $n$  of vector  $[a(t)]$  gives the number of DOFs of the discretized system,
- $\psi_i(M)$ : given spatial function. This must be kinematically acceptable and defined over the entire structure occupying the field  $V$ .

Thus, when the generalized coordinates are known, the approximation functions  $\psi_i(M)$  will give  $u$  at any point of the system.

The general method consists in:

- writing the kinetic energy, the strain energy of the system, and the work of external forces in accordance with the approximate field  $\tilde{u}$ .
- rewriting these energies in matrix form, revealing the vectors of the generalized coordinates:

$$T = 1/2 \dot{a}^T [M] \dot{a}$$

$$J = 1/2 a^T [K] a$$

$$W_{ext} = a^T [F] = F^T a$$

Les matrices [M] et [K] qui apparaissent alors sont les matrices de masse et de raideur du système discrétisé : l'équation régissant [a(t)] est alors :

$$[M][\ddot{a}(t)] + [K][a(t)] = [F(t)]$$

Pour déterminer les modes propres ( $\omega, [\phi(x)]$ ), on utilise alors la procédure décrite dans le chapitre sur les systèmes discrets à n ddl ; on résout :

$$[K][\phi(x)] = -\omega^2 [M][\phi(x)]$$

Suivons la procédure décrite dans l'introduction de ce chapitre :

- Calcul de l'énergie cinétique :

$$T = 1/2 \int_V \rho \dot{u}^2(M, t) dV = 1/2 \dot{a}^T \underbrace{\left( \int_V \rho [\psi]^T [\psi] dV \right)}_{[M]} \dot{a}$$

On en déduit l'expression de la matrice de masse du système discrétisé :

$$[M] = \int_V \rho [\psi]^T [\psi] dV$$

Dans le cas simple d'une barre ou d'une poutre, la matrice de masse devient donc :

$$[M] = \rho S \int_0^L [\psi(x)]^T [\psi(x)] dx$$

- Calcul de l'énergie de déformation :

On ne fait pas ici le calcul général de l'énergie de déformation : en fonction des hypothèses RDM, on obtient des expressions « simplifiées » différentes, selon si le système est modélisé par une poutre, une barre, ... On rappelle toutefois les énergies les plus courantes :

Traction-compression	$1/2 ES \int_0^L (u'(x))^2 dx$
Flexion	$1/2 EI \int_0^L (w''(x))^2 dx$

On en déduit alors, les matrices de raideurs :

Traction-compression	$[K] = ES \int_0^L [\psi'(x)]^T [\psi'(x)] dx$
Flexion	$[K] = EI \int_0^L [\psi''(x)]^T [\psi''(x)] dx$

$$\begin{aligned}
 T &= 1/2 \dot{a}^T [M] \dot{a} \\
 J &= 1/2 a^T [K] a \\
 W_{ext} &= a^T [F] = F^T a
 \end{aligned}$$

Matrices  $[M]$  and  $[K]$  which are then determined are the mass and stiffness matrices of the discretized system: the equation governing  $[a(t)]$  is therefore:

$$[M][\ddot{a}(t)] + [K][a(t)] = [F(t)]$$

To determine the modes  $(\omega, [\phi(x)])$ , the procedure described in the chapter on discrete MDOF systems is used to solve:

$$[K][\phi(x)] = -\omega^2 [M][\phi(x)]$$

The procedure described in the introduction to this chapter is now followed:

- Calculation of kinetic energy:

$$T = 1/2 \int_V \rho \dot{u}^2(M, t) dV = 1/2 \dot{a}^T \underbrace{\left( \int_V \rho [\psi]^T [\psi] dV \right)}_{[M]} \dot{a}(t)$$

From this is deduced the expression of the mass matrix of the discretized system:

$$[M] = \int_V \rho [\psi]^T [\psi] dV$$

In the simple case of a bar or beam, the mass matrix becomes:

$$[M] = \rho S \int_0^L [\psi(x)]^T [\psi(x)] dx$$

- Calculation of strain energy:

No general calculation of the strain energy is done here: in accordance with Strength of Materials assumptions, different 'simplified' expressions are obtained, depending on whether the system is modelled by a beam, a bar, etc. The most common energies are given below nevertheless:

Tension-compression	$1/2 E S \int_0^L (u'(x))^2 dx$
Bending	$1/2 E I \int_0^L (w''(x))^2 dx$

From this are deduced the stiffness matrices:

Tension-compression	$[K] = E S \int_0^L [\psi'(x)]^T [\psi'(x)] dx$
Bending	$[K] = E I \int_0^L [\psi''(x)]^T [\psi''(x)] dx$

- Calcul du travail :

$$W_{ext} = \int_V \mathbf{u}^T(\mathbf{M}, t) [\mathbf{f}(\mathbf{M}, t)] dV \equiv \mathbf{a}^T(t) [\mathbf{F}(t)] = \mathbf{F}^T(t) [\mathbf{a}(t)]$$

Connaissant toutes ces matrices, on en déduit alors l'équation d'équilibre :

$$[\mathbf{M}][\ddot{\mathbf{a}}(t)] + [\mathbf{K}][\mathbf{a}(t)] = [\mathbf{F}(t)]$$

On peut alors appliquer tout l'arsenal développé pour les systèmes à n ddl :

- calcul des modes propres du système discret,
- réponse à une sollicitation extérieure,...

Une fois le problème discret résolu, il est immédiat de revenir au système continu. Ainsi, si on a déterminé les vecteurs propres  $[\phi_i]$  du système discret associé aux pulsations propres  $\omega_i$ , les n premiers modes (approchés) du système continu sont déterminés par la même pulsation propre  $\omega_i$  et par la déformée modale  $u_i(x)$  :

$$\psi_i(x) = \mathbf{u}_i^T(x) [\phi_i]$$

Remarque 1 : On détermine autant de modes qu'il y a de ddl. En pratique on peut estimer que seuls les n/2 premiers modes sont déterminés avec une précision suffisante.

Remarque 2 : La précision est améliorée lorsque l'on augmente le nombre de ddl. L'estimation des pulsations propres par la méthode de Rayleigh-Ritz se fait toujours par excès.

Remarque 3 : Lorsque le système étudié est constitué de poutres, il est courant de prendre pour les fonctions  $\psi_i(x)$  des polynômes. Par exemple pour une poutre Encastree-Libre, on choisit :  $\psi_i(x) = x^i$  avec  $i \geq 2$ . On vérifie aisément que ces fonctions sont toutes cinématiquement admissibles.

Remarque 4 : Lorsque  $n = 1$ , cette méthode est connue sous le nom de méthode de Rayleigh.

Remarque 5 : La déformée statique de la structure soumise à une charge proportionnelle à son poids propre donne en général une bonne approximation de la déformée modale du premier mode.

#### A.1.4.4. Méthode des éléments finis

##### A.1.4.4.1. Faiblesse de la méthode de Rayleigh-Ritz

Si pour une poutre droite Encastree-Libre il est facile de déterminer des fonctions  $\psi_i(x)$ , il n'en est pas forcément de même pour des systèmes à peine plus complexe, comme par exemple deux poutres rigidement liées à une extrémité mais non-colinéaire : dans ce cas, comment choisir les fonctions d'interpolation ? La solution simple est alors de « casser » le système : on se ramène donc à la méthode des éléments finis.

- Calculation of work:

$$W_{\text{ext}} = \int_V \mathbf{u}^T(\mathbf{M}, t) [\mathbf{f}(\mathbf{M}, t)] dV \cong \mathbf{a}^T(\mathbf{a}, t) [\mathbf{F}(t)] = \mathbf{F}^T(\mathbf{a}, t) [\mathbf{a}(t)]$$

When all these matrices are known, the equilibrium equation can be deduced:

$$[\mathbf{M}][\ddot{\mathbf{a}}(t)] + [\mathbf{K}][\mathbf{a}(t)] = [\mathbf{F}(t)]$$

All the means developed for multi-DOF systems can now be used:

- calculation of the modes of the discrete system,
- response to external action effects, etc.

Once the discrete problem has been solved, it is easy to return to the continuous system. Thus, if the eigenvectors  $[\phi_i]$  of the discrete system associated with the angular frequencies  $\omega_i$  have been determined, the first  $n$  modes (approximate) of the continuous system are determined from the same natural angular frequency  $\omega_i$  and from the modal deformation  $u_i(x)$ :

$$u_i(x) = \mathbf{a}^T[\psi(x)][\phi_i]$$

Observation 1: As many modes are determined as there are DOFs. In practice it can be assumed that only the first  $n/2$  modes are determined with sufficient accuracy.

Observation 2: Accuracy is improved when the number of DOFs increases. The natural angular frequencies obtained with the Rayleigh-Ritz method are always overestimated.

Observation 3: If the system studied consists of beams, it is common to use polynomials for functions  $\psi_i(x)$ . For example for an end-fixed/free beam, the choice is:  $\psi_i(x) = x^i$  with  $i \geq 2$ . It is easy to check that all these functions are kinematically acceptable.

Observation 4: If  $n = 1$ , this method is known as the Rayleigh method.

Observation 5: The static deformation of a structure subject to a load proportional to its selfweight generally gives a good approximation of the modal deformation for the first mode.

#### A.1.4.4. Finite-element method

##### A.1.4.4.1. Weakness of the Rayleigh-Ritz method

While it is easy to determine the functions  $\psi_i(x)$  for a straight end-fixed/free beam, it is not necessarily so easy for systems that are barely any more complex, such as two colinear beams rigidly connected at one end: how are the interpolation functions chosen in this case? The easy solution is to 'break' the system: this takes us to the finite-element method.



#### *A.1.4.4.2. Brefs rappels*

La structure est subdivisée en domaines de forme géométrique simple (on en connaît l'expression analytique) dont le contour s'appuie sur des points (les nœuds) : ce sont les éléments.

Ces éléments ont une forme suffisamment simple pour que l'on puisse déterminer des fonctions cinématiquement admissibles sur chacun de ces éléments : ce sont généralement des polynômes. On applique alors la méthode de Rayleigh-Ritz sur chacun des éléments : on calcule les énergies cinétique et de déformation de chaque élément. On en déduit alors les énergies cinétique et de déformation de toute la structure : on utilise l'additivité de l'énergie. On en déduit alors les matrices de masse et de raideur de la structure : on est donc à nouveau ramené à l'étude d'un système à  $n$  ddl.

Nota bene : Les fonctions de l'approximation, appelées ici fonctions d'interpolation, sont choisies de sorte que les coordonnées généralisées soient les valeurs des déplacements des nœuds : les coordonnées généralisées ont donc un sens physique qui permet d'obtenir un champ de déplacement continu sur la structure.

On peut également déterminer un vecteur chargement en écrivant sous forme matricielle le travail des forces extérieures appliquées au système. On peut donc étudier la réponse d'un système continu soumis à un chargement quelconque.

#### A.1.4.4.2. Brief background

*The structure is subdivided into fields of simple geometrical shape (for which the analytical expression is known) whose edges meet at points (nodes): these are what are called elements.*

*These elements are of a shape simple enough for kinematically acceptable functions to be determined for each of them: they are generally polynomials. The Rayleigh-Ritz method is then applied to each element: the kinetic and strain energies are calculated for each element. The kinetic and strain energies of the entire structure are then calculated applying the principle of energy additivity. The mass and stiffness matrices are then calculated: this again amounts to the study of a multi-DOF system.*

*NB: The approximation functions, which here are called interpolation functions, are chosen such that the generalized coordinates are the values of node displacements: the generalized coordinates therefore have a physical sense that makes it possible to determine the field of continuous displacement over the entire structure.*

*A loading vector can also be determined by writing the work of external forces applied to the system in matrix form. This enables the response of a continuous system with a given loading to be studied.*

## ANNEXE 2 : MODÉLISATION DE LA CHARGE PIÉTONNE

Les passerelles piétonnes peuvent être sollicitées principalement par la marche et la course des piétons les empruntant. Ces deux types d'activités doivent être traités de manière séparée car ils se différencient par le fait que, si lors de la marche, il y a toujours un pied en contact avec le sol, il n'en est plus de même lorsqu'une personne se met à courir (figure A.2.1).

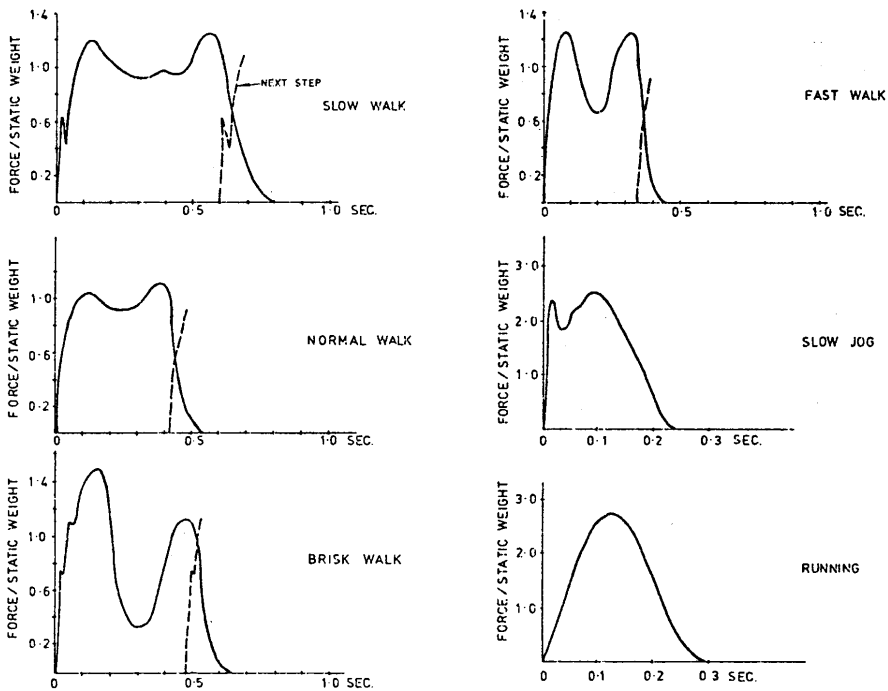


Figure A.2.1 : Evolution de la force en fonction du temps pour différents types de pas (Ref. [17])

Quel que soit le type de sollicitation (marche ou course), la force engendrée comporte une composante verticale et une composante horizontale, cette dernière pouvant être décomposée en une composante longitudinale (selon l'axe de la passerelle) et une composante transversale (perpendiculaire à l'axe de la passerelle). De plus, outre l'action individuelle d'un piéton, nous allons envisager la prise en compte d'un ensemble de personnes (foule) ainsi que les sollicitations liées à des chargements exceptionnels (inaugurations, excitation délibérée...). Enfin, lorsqu'elles existent, nous signalerons les recommandations prévues par les Eurocodes consacrés aux modèles dynamiques de chargement piétonnier.

## APPENDIX 2: MODELLING PEDESTRIAN LOAD

Footbridges are chiefly loaded by the walking and running actions of pedestrians using them. These two kinds of activities must be dealt with separately, for they differ by the fact that when marching one always has one foot in contact with the ground, which is not the case when one is running (figure A.2.1).

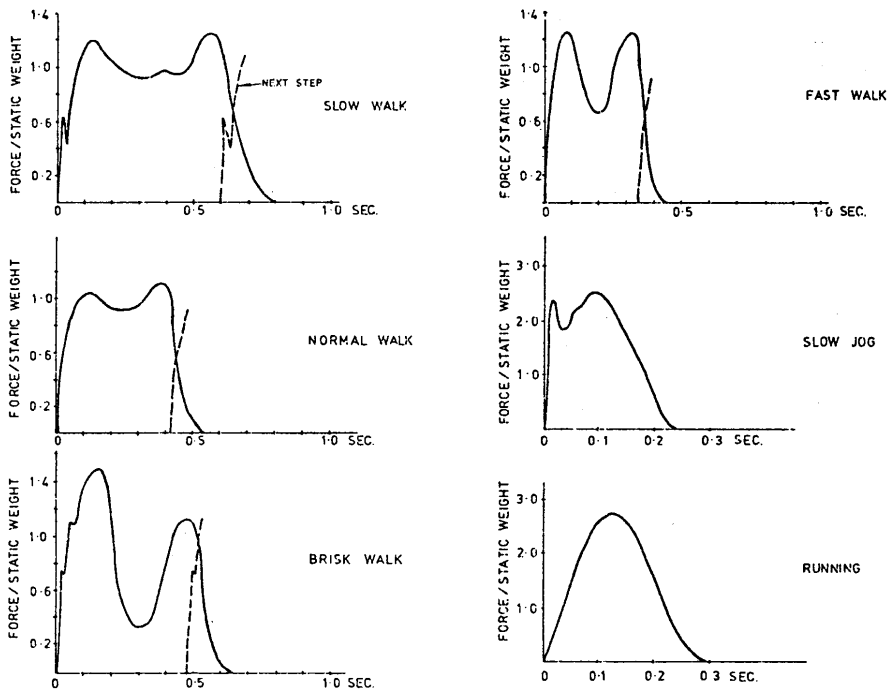


Figure A.2.1: evolution of force against time for different kinds of step (Ref. [17])

Irrespective of the type of action effect (walking or running), the force engendered has a vertical component and a horizontal component. The horizontal component can be further broken down into a longitudinal component (along the bridge axis) and a lateral component (perpendicular to the bridge axis). In addition, apart from the individual action of a pedestrian, we shall consider a group of persons (crowd) and the action effects associated with exceptional loadings (inaugurations, deliberate excitation, etc.). Lastly, whenever they exist, we shall point to the recommendations of the Eurocodes addressing dynamic pedestrian loading models.

Pour les activités sans déplacement (saut, balancement...), les mesures expérimentales montrent qu'il est préférable de prendre en compte au moins les trois premières harmoniques pour représenter correctement la sollicitation, alors que pour la composante verticale de la marche, on peut se limiter à la première harmonique qui suffit à bien décrire  $F(t)$ . Les valeurs des amplitudes et des déphasages, issues de mesures expérimentales, sont précisées ci-dessous pour les différentes composantes de  $F$  dans le cas de la marche et de la course. Il faut noter cependant que les valeurs que l'on peut trouver dans la littérature sont approximatives, en particulier pour ce qui est des déphasages ( $\phi_i$ ) ; les valeurs fournies sont donc des ordres de grandeur correspondant à un déplacement moyen.

Comme nous pouvons le constater sur la figure A2.1, la forme de la sollicitation change de la marche à la course ainsi que selon le type de marche ou de course (lente, rapide...). Les amplitudes  $G_i$  sont donc liées à la fréquence  $f_m$  et les valeurs indiquées par la suite sont donc des valeurs moyennes, correspondant à une marche ou une course « normale ».

### A.2.1. Marche

La marche est caractérisée par un contact continu sur la surface du sol, puisque le second pied touche le sol avant que le premier ne le quitte (à la différence de la course).

#### A.2.1.1. Composante verticale

En marche normale, la composante verticale, pour un pied, a une forme en selle de cheval, le premier maximum correspondant au choc du talon sur le sol et le second à la poussée de la plante du pied (cf. figure A.2.2). Cette forme tend à disparaître lorsque la fréquence de la marche augmente, jusqu'à se réduire à une allure de demi sinusoïde lors de la course (cf. figure A.2.1).

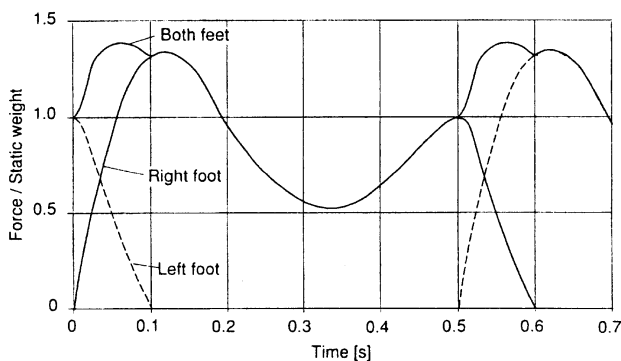


Figure A.2.2 : Force résultant de la marche ( $f_m = 2$  Hz) (Ref. [3])

Pour la marche normale (non gênée), la fréquence peut être décrite par une distribution gaussienne de moyenne 2 Hz et d'écart type 0,20 Hz environ (de 0,175 à 0,22 selon les auteurs).

For activities without displacement (jumping, swinging, etc.), test measurements show that it is preferable to take account of at least the first three harmonics in order to correctly represent loading, whereas for the vertical component of walking the first harmonic alone is sufficient for proper description of  $F(t)$ . The values of amplitudes and of phase offset determined by test measurements are specified below for the different components of  $F$  corresponding to walking and running. It should be noted, however, that the values that can be found in the literature are approximate, particularly with regard to phase offset ( $\phi_i$ ); the values given are therefore merely orders of magnitude corresponding to a mean displacement.

As can be seen on figure A.2.1, the form of the action effect changes between walking and running and between the different types of walking and running (slow, fast, etc.). The amplitudes  $G_i$  are therefore linked to the frequency  $f_m$  and the values given in what follows are therefore mean values corresponding to 'normal' walking or running.

### A.2.1. Walking

Walking is characterized by continuous contact with the ground, since one foot touches the ground before the other leaves it (contrary to running).

#### A.2.1.1. Vertical component

In normal walking, the vertical component for one foot has a 'saddle' shape: the first peak corresponds to the impact of the heel on the ground and the second to the thrust of the sole of the foot (cf. figure A.2.2). This shape tends to change as the stepping frequency increases, reducing to a half-sine wave for running (cf. figure A.2.1).

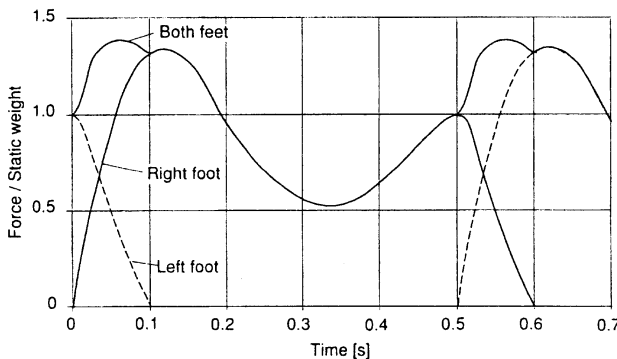


Figure A.2.2: force resulting from walking ( $f_m = 2$  Hz) (Ref. [3])

For normal walking (unhindered), the stepping frequency is that of a normal distribution with a mean of 2 Hz and a standard deviation of about 0.20 Hz (from 0.175 to 0.22, depending on the author).

À la fréquence moyenne de 2 Hz ( $f_m = 2$  Hz), les valeurs des coefficients de la décomposition de Fourier de  $F(t)$  sont les suivantes (comme remarqué précédemment, on prend en compte les trois premiers termes, c'est-à-dire  $n = 3$ , les coefficients des termes d'ordre supérieur étant inférieurs à  $0,1 G_0$ ) :

$$G_1 = 0,4 G_0 ; G_2 = G_3 \approx 0,1 G_0 ;$$

$$\varphi_2 = \varphi_3 \approx \pi/2.$$

Comme on peut le constater ci-dessus, les valeurs de  $G_i$  et de  $\varphi_i$  pour les termes au-delà du premier sont peu précises, ceci étant dû, d'une part, aux incertitudes lors des mesures et, d'autre part, aux différences d'une personne à l'autre.

Remarque : pour une fréquence de marche de 2,4 Hz, la valeur de  $G_1$  conseillée est de  $0,5 G_0$ , les autres valeurs étant inchangées. De même, pour une marche lente (1Hz), on a  $G_1 = 0,1G_0$ .

Nous avons tracé sur la figure 2.3, pour une personne de 700 newtons marchant à une fréquence  $f_m$  de 2 Hz et sur 1 seconde, l'évolution de  $F(t)$  en prenant en compte une, deux ou trois harmoniques dans le développement précédent. Nous constatons que seule la prise en compte des trois premières harmoniques permet de retrouver la forme en selle de cheval. Au-delà de la forme du signal, la différence réside dans le contenu fréquentiel de l'excitation, aspect fondamental lors du calcul de la réponse.

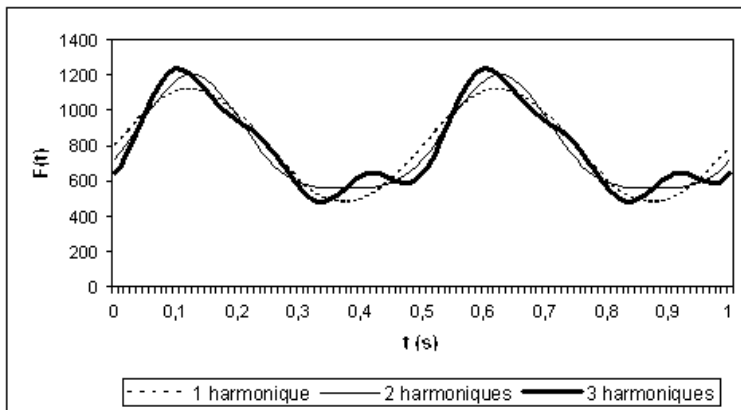


Figure A.2.3 : Marche - composante verticale ( $f_m = 2$  Hz)

Il est à noter que, dans l'annexe de l'Eurocode 1 consacrée aux modèles dynamiques de charge piétonne, la charge préconisée était (DLM1):  $Q_{pv} = 280 \sin(2\pi f_m t)$

ce qui correspondait en fait à  $0,4 G_0$  avec  $G_0 = 700$  newtons, poids du piéton. Il s'agissait donc du premier terme (dynamique) de la décomposition de Fourier. Ce modèle a depuis été supprimé de l'Eurocode, mais sa réalité physique n'en reste pas moins pertinente.

#### A.2.1.2. Composante horizontale

La composante horizontale du chargement est certes de plus faible intensité mais ne peut cependant être négligée car elle peut être source de problèmes. En effet, l'homme est très sensible à sa projection transversale et la marche peut être rapidement perturbée, conduisant par exemple à se rapprocher de la rambarde, à un sentiment d'insécurité voire à la fermeture de la passerelle...

At the mean frequency of 2 Hz ( $f_m = 2$  Hz), the values of the coefficients of the Fourier decomposition of  $F(t)$  are as follows (as observed previously, the first three terms, i.e.  $n = 3$ , are taken into account, the coefficients of terms or higher orders being less than  $0.1 G_0$ ):

$$G_1 = 0.4 G_0 ; G_2 = G_3 \approx 0.1 G_0 ;$$

$$\varphi_2 = \varphi_3 \approx \pi/2.$$

As can be seen above, the values of  $G_i$  and  $\varphi_i$  for terms beyond the first are not very precise, due on one hand to measurement uncertainties and on the other to differences from one person to another.

Observation: for a stepping frequency of 2.4 Hz, the recommended  $G_1$  value is  $0.5 G_0$ , the other values remaining unchanged. Similarly, for slow walking (1 Hz),  $G_1 = 0.1 G_0$ .

For a person of 700 newtons walking at a frequency  $f_m$  of 2 Hz, Figure 2.3 shows the evolution of  $F(t)$  over a one-second period, taking account of one, two, or three harmonics in the previous development. It can be seen that only if the first three harmonics are taken into account is the saddle shape found. Apart from the shape of the signal, the difference lies in the frequency content of the excitation, the fundamental aspect of response analysis.

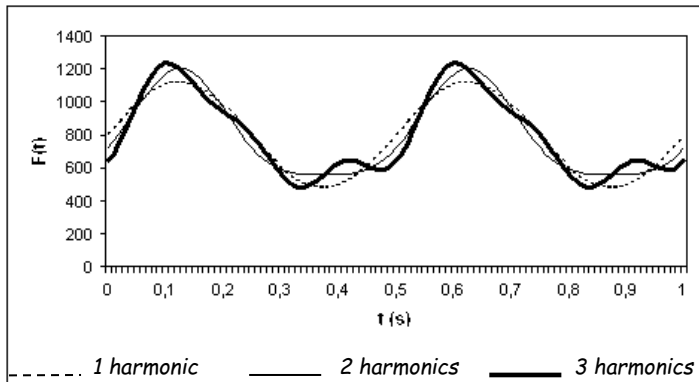


Figure A.2.3: walking -vertical component ( $f_m = 2$  Hz)

It should be noted that in the appendix to Eurocode 1 devoted to dynamic pedestrian load models, the recommended load was (DLM1):

$$Q_{pv} = 280 \sin(2\pi f_v t)$$

This in fact corresponds to  $0.4 G_0$  with  $G_0 = 700$  newtons, the weight of the pedestrian. This was therefore the first term (dynamic) of the Fourier decomposition. This model has since been deleted from the Eurocode, but its physical attributes are nonetheless relevant.

#### A.2.1.2. Horizontal component

Although the horizontal component of loading is of lesser intensity, it cannot be overlooked for it can be a source of problems. This is because man is highly sensitive to the lateral aspect of the horizontal component, and walking can soon be disturbed, causing the walker to move closer to



the side railing, for example, causing a feeling of unease, and possibly leading to closure of the bridge for 'safety' reasons.

Comme annoncé auparavant, nous allons nous intéresser successivement à ses projections transversale et longitudinale (bien que cette dernière pose plus rarement des problèmes sur les passerelles). La composante transversale, correspondant au balancement d'un pied sur l'autre lors de la marche, se produit donc à une fréquence moitié de la fréquence de marche (1 Hz pour  $f_m = 2$  Hz). Par contre, la composante longitudinale est principalement liée à la fréquence de marche (cf. figure A.2.4).

Afin de présenter la décomposition de Fourier de la composante transversale (aux fréquences  $f_m/2, f_m, 3f_m/2$ ) en fonction de la fréquence fondamentale de la marche  $f_m$ , la solution généralement retenue est de modifier la présentation sous la forme suivante :

$$F(t) = \sum_{i=1/2}^n G_i \sin 2\pi i f_m t$$

i pouvant donc prendre les valeurs (non entières) 1/2, 1, 3/2, 2... De plus, les déphasages étant proches de 0, ils n'apparaissent donc plus dans l'expression précédente. Enfin, à la différence de la force verticale, les composantes transversale et longitudinale ne présentent bien sûr pas de partie statique (pas de terme constant dans l'expression de F(t)).

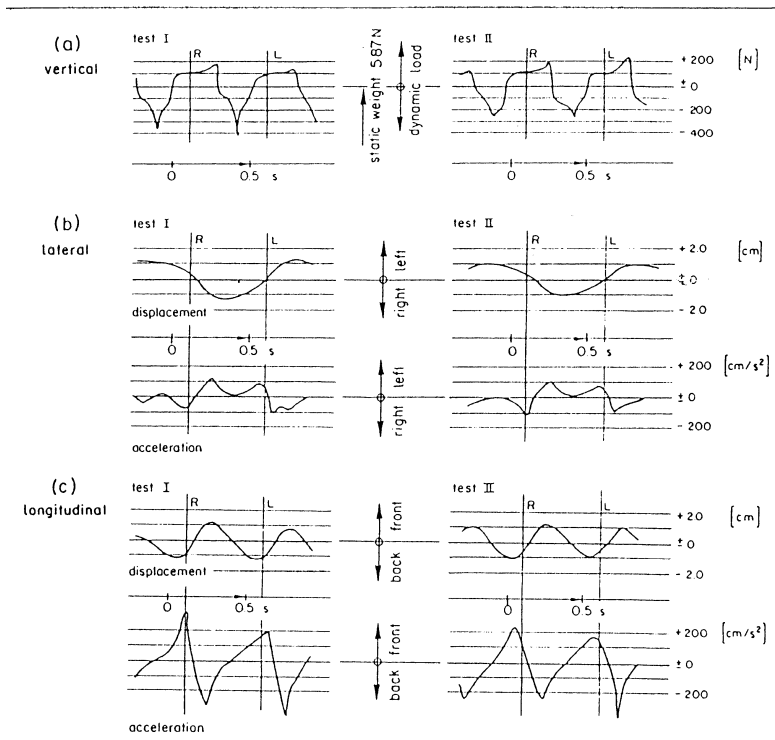


Figure A.2.4: Evolutions de la force verticale (a), des composantes transversale (b) et longitudinale (c) du déplacement (et de l'accélération) mesurées - marche à 2 Hz Ref. [22]

As stated previously, we shall successively examine the lateral and longitudinal aspects (even if the latter more rarely causes problems for footbridges). The lateral component, which corresponds to the change of balance from one foot to the other while walking, is therefore produced at half the stepping frequency (1 Hz for  $f_m = 2$  Hz). On the other hand, the longitudinal component is chiefly linked to the stepping frequency (cf. figure A.2.4).

To present the Fourier transform of the lateral component (at frequencies  $f_m/2$ ,  $f_m$ ,  $3f_m/2$ ) in accordance with the fundamental stepping frequency  $f_m$ , the solution generally adopted is to modify the presentation as follows:

$$F(t) = \sum_{i=1/2}^n G_i \sin 2\pi i f_m t$$

$i$  being able to have the values (not only whole)  $1/2$ ,  $1$ ,  $3/2$ ,  $2$ , etc. In addition, since the phase offset is close to 0, it no longer appears in the expression above. Finally, contrary to the vertical force, the lateral and longitudinal components of course have no static part (no constant term in the expression of  $F(t)$ ).

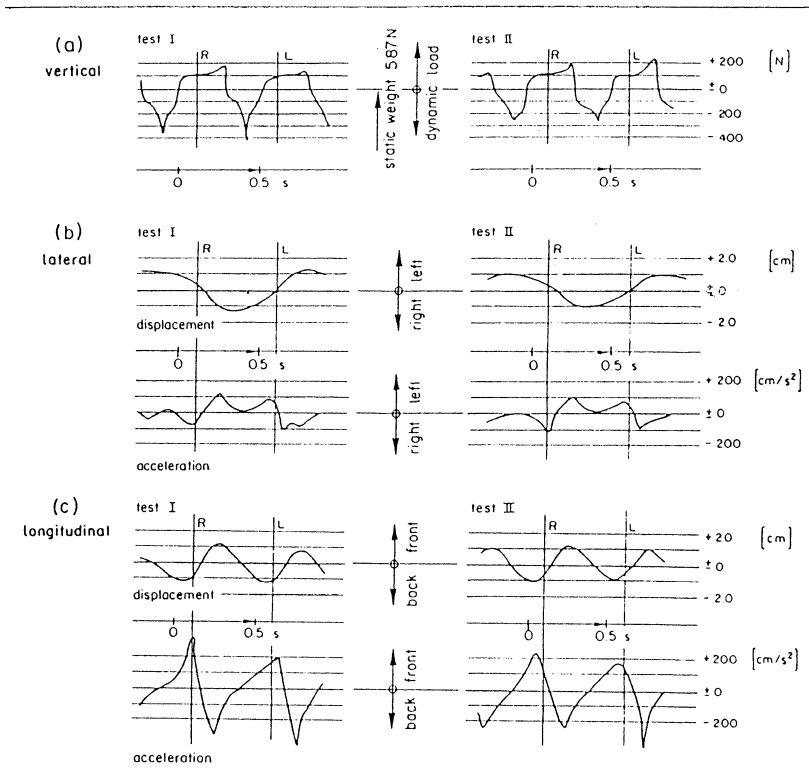


Figure A.2.4: evolution of the vertical force (a) and of the lateral (b) and longitudinal (c) components of displacement (and of acceleration) measured - walking at 2 Hz. Ref. [22]

A.2.1.2.1. Composante transversale

Comme indiqué ci-dessus, les essais ont montré que les amplitudes principales de cette composante se situent à une fréquence d'environ la moitié de celle de la composante verticale, fréquence correspondant aux oscillations latérales du centre de gravité du corps lors de la marche. Les valeurs correspondantes des coefficients de Fourier sont alors les suivantes :

$$G_{1/2} = G_{3/2} \approx 0,05 G_0 ; G_1 = G_2 \approx 0,01 G_0.$$

Comme pour la composante verticale ( $G_0 = 700$  newtons,  $f_m = 2$  Hz), nous avons tracé sur la figure 2.5 la composante transversale en prenant en compte de une à quatre harmoniques. Comme attendu, on remarque que, d'une part, la fréquence est moitié de celle de la composante verticale (c'est-à-dire que la période est double) et, d'autre part, que la prise en compte des quatre premiers termes permet d'obtenir une allure proche de celles mesurées sur la figure 2.4 (b).

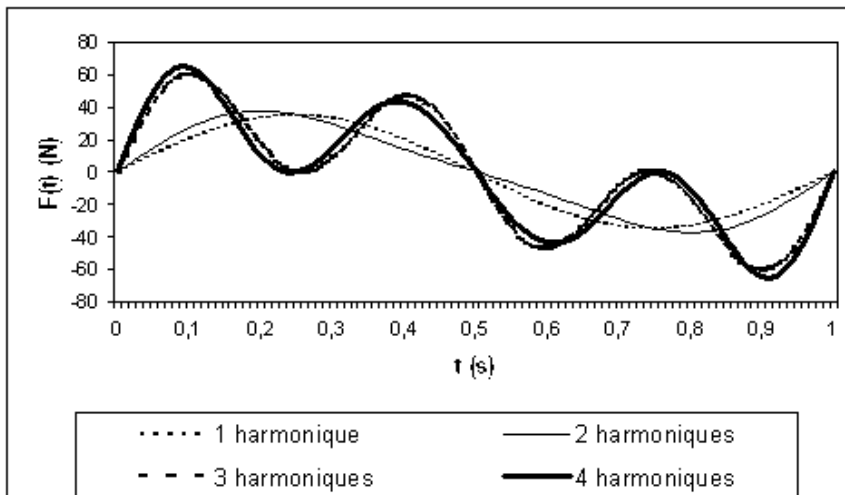


Figure A.2.5 : Marche - composante transversale ( $f_m = 2$  Hz)

A.2.1.2.2. Composante longitudinale

La fréquence principale associée à cette composante est environ la même que pour la composante verticale ( $f_m = 2$  Hz). Ses oscillations correspondent, pour chaque pas, dans un premier temps au contact entre le pied et le sol, puis à la poussée exercée dans un second temps. Pour cette composante, les valeurs des coefficients de Fourier sont :

$$G_{1/2} \approx 0,04 G_0 ; G_1 \approx 0,2 G_0 ; G_{3/2} \approx 0,03 G_0 ; G_2 \approx 0,1 G_0 .$$

Nous avons représenté sur la figure A.2.6, dans les mêmes conditions que pour les autres composantes ( $G_0 = 700$  newtons,  $f_m = 2$  Hz), l'évolution de cette composante, selon le nombre d'harmoniques prises en compte, les remarques précédentes restant valables.

#### A.2.1.2.1. Lateral component

As stated above, tests have shown that the main amplitudes of the lateral component are situated at a frequency of about half that of the vertical component, the frequency corresponding to the lateral oscillations of the centre of gravity of the human body during walking. The corresponding values of the Fourier coefficients are as follows:

$$G_{1/2} = G_{3/2} \approx 0.05 G_0 ; G_1 = G_2 \approx 0.01 G_0.$$

As for the vertical component ( $G_0 = 700$  newtons,  $f_m = 2$  Hz), the lateral component has been plotted on figure 2.5, taking account of between one and four harmonics. As expected, it can be seen that, on one hand, the frequency is half that of the vertical component (i.e. the period is double) and, on the other hand, taking account of the first four harmonics obtains a shape similar to that on figure 2.4 (b) representing measured values.

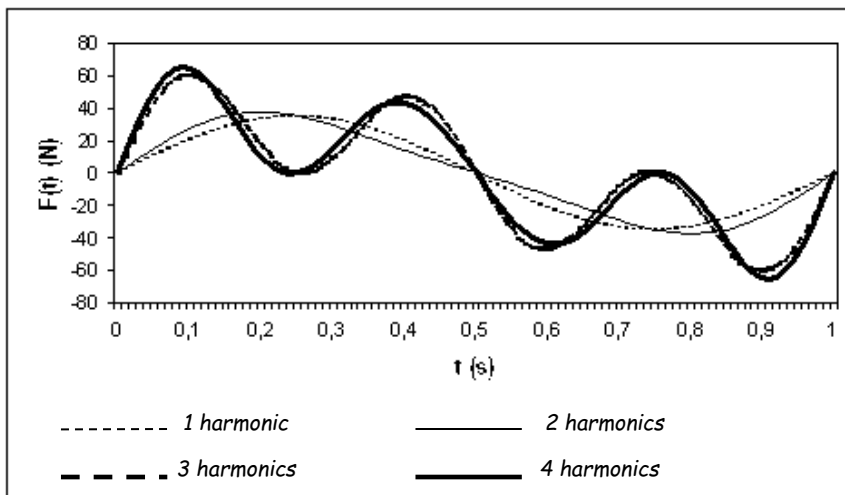


Figure A.2.5: walking - lateral component ( $f_m = 2$  Hz)

#### A.2.1.2.2. Longitudinal component

The principal frequency associated with the longitudinal component is roughly the same as for the vertical component ( $f_m = 2$  Hz). For each step, its oscillations correspond firstly to the foot's initial contact with the ground, then to the thrust exerted. The values of the Fourier coefficients for this component are:

$$G_{1/2} \approx 0.04 G_0 ; G_1 \approx 0.2 G_0 ; G_{3/2} \approx 0.03 G_0 ; G_2 \approx 0.1 G_0 .$$

For the same conditions as for the other components ( $G_0 = 700$  newtons,  $f_m = 2$  Hz), figure 2.6 shows the evolution of this component, depending on the number of harmonics considered. The remarks made above apply here also.

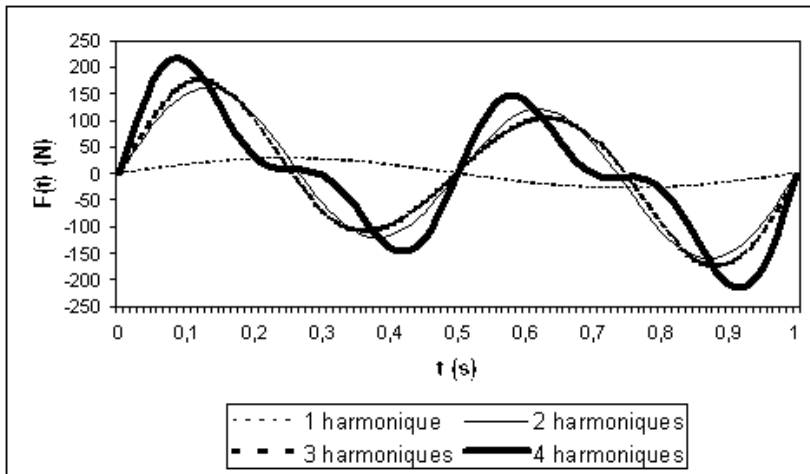


Figure A.2.6 : Marche - composante longitudinale ( $f_m = 2$  Hz)

Il faut noter qu'en pratique la composante longitudinale de la force de marche du piéton a en général peu d'influence sur la plupart des passerelles. L'influence est plus forte quand la passerelle repose sur des piles élancées et souples, pour lesquelles la composante longitudinale du piéton entraîne la flexion de la pile.

### A.2.2. Course

Comme indiqué en introduction, la course est caractérisée par un contact discontinu avec le sol (cf. figure 2.7 (a)), la fréquence  $f_m$  étant généralement comprise entre 2 et 3,5 Hz.

#### A.2.2.1. Composante verticale

En première approximation, la composante verticale du chargement peut être approchée par une simple séquence de demi-sinusoides, représentée à l'aide de l'expression suivante :

$$F(t) = k_p G_0 \sin(\pi t / t_p) \quad \text{pour } (j-1)T_m \leq t \leq (j-1)T_m + t_p$$

$$F(t) = 0 \quad \text{pour } (j-1)T_m + t_p < t \leq jT_m$$

- avec
- $k_p$  : le facteur d'impact ( $k_p = F_{\max} / G_0$ ),
  - $j$  : le numéro du pas ( $j = 1, 2, \dots$ ),
  - $F_{\max}$  : la charge maximale,
  - $G_0$  : le poids du piéton,
  - $t_p$  : la durée du contact,

$T_m$  : la période ( $T_m = 1/f_m$ , notée  $T_p$  sur la fig.A.2.7(b)),  $f_m$  étant la fréquence de course.

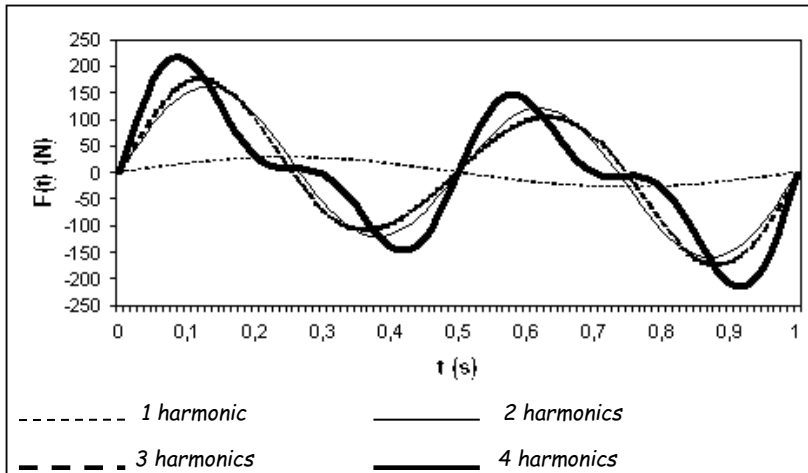


Figure A.2.6: walking - longitudinal component ( $f_m = 2$  Hz)

It should be noted that in practice the longitudinal component of the pedestrian walking force generally has little effect on most footbridges. The effect is greater when the bridge is supported by slender, flexible piers, in which case the longitudinal component of walking causes bending of the piers.

### A.2.2. Running

As stated in the introduction, running is characterized by discontinuous contact with the ground (cf. figure 2.7 (a)), generally at a frequency  $f_m$  between 2 and 3.5 Hz.

#### A.2.2.1. Vertical component

As a first approximation, the vertical component of loading can be roughly estimated by a simple sequence of half-sine waves represented by the following expression:

$$F(t) = k_p G_0 \sin(\pi t / t_p) \quad \text{for } (j-1)T_m \leq t \leq (j-1)T_m + t_p$$

$$F(t) = 0 \quad \text{for } (j-1)T_m + t_p < t \leq jT_m$$

where  $k_p$  : impact factor ( $k_p = F_{\max} / G_0$ ),  
 $j$  : step number ( $j = 1, 2, \dots$ ),  
 $F_{\max}$  : maximum load,  
 $G_0$  : pedestrian weight,  
 $t_p$  : duration of contact,

$T_m$  : the period ( $T_m = 1/f_m$ , designated  $T_p$  on fig.A.2.7(b)),  $f_m$  being the running frequency.

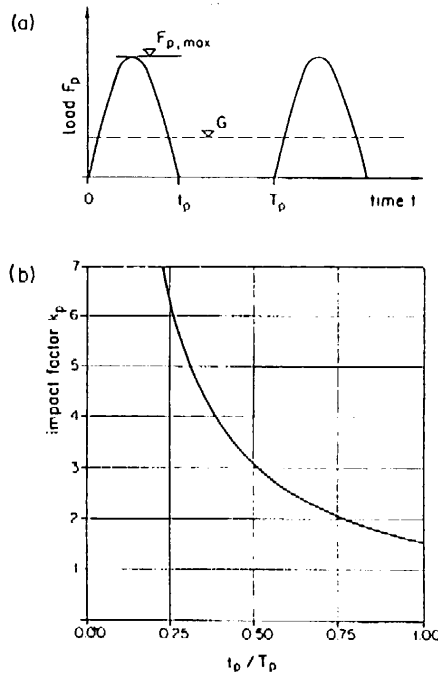


Figure A.2.7 : Course - évolution de la force en fonction du temps (a) ; facteur d'impact fonction de la durée relative de contact (b) Ref [3]

La durée de contact  $t_p$  dans ce modèle est simplement la demi-période  $T_m$ , ce qui permet d'écrire l'expression de  $F(t)$  également sous la forme suivante :

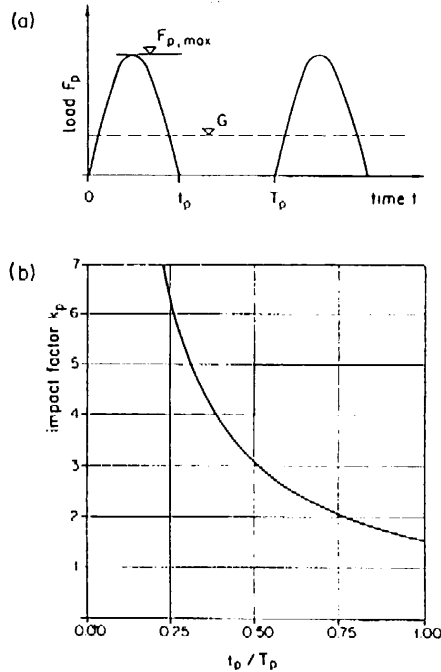
$$F(t) = k_p G_0 \sin(2\pi f_m t) \quad \text{pour } (j-1)T_m < t \leq (j - \frac{1}{2})T_m$$

$$F(t) = 0 \quad \text{pour } (j - \frac{1}{2})T_m < t \leq jT_m$$

Cette approximation de la durée de contact  $t_p$  correspond en fait à une surestimation des valeurs mesurées expérimentalement, qui sont représentées en fonction de la fréquence de course sur le graphe de la figure 2.8. Les valeurs du facteur d'impact  $k_p$  sont quant à elles déduites de la figure 2.7 (b), en fonction de la durée relative de contact ( $t_p/T_m$ ). À titre d'exemple, pour une course à une fréquence de 3 Hz (donc une période  $T_m = 0,33$ ), on trouve  $t_p = 0,17$  s et  $k_p = 3$  pour  $t_p/T_p = 0,5$  (au lieu de  $k_p = 2,4$  pour  $t_p/T_p = 0,61$ ). Comme annoncé, nous pouvons donc constater sur cet exemple que l'approximation demi-sinusoïde est conservative.

Il est également possible d'utiliser pour la course une décomposition de Fourier, qui présente l'avantage de ne pas faire apparaître explicitement le facteur d'impact  $k_p$  dont

la détermination est délicate. Afin de tenir compte du contact discontinu propre à la course, on ne conserve que la partie positive de la décomposition, ce qui peut s'écrire, avec les notations précédentes :



FigureA. 2.7: running - evolution of force versus time (a); impact factor versus relative contact time (b). Ref [3]

The contact time  $t_p$  in this model is simply the half-period  $T_m$ , which enables the expression of  $F(t)$  to be written in the following form:

$$F(t) = k_p G_0 \sin(2\pi f_m t) \quad \text{for } (j-1)T_m < t \leq (j - \frac{1}{2})T_m$$

$$F(t) = 0 \quad \text{for } (j - \frac{1}{2})T_m < t \leq jT_m$$

This approximation of the contact time  $t_p$  in fact corresponds to an overestimation of the values measured experimentally, represented versus the running frequency on the graph in figure 2.8. The values for the impact factor  $k_p$  are deduced on figure 2.7 (b), versus the relative contact time ( $t_p/T_m$ ). To give an example, for a running with frequency of 3 Hz (i.e. one period  $T_m = 0.33$ ), we get  $t_p = 0.17$  s and  $k_p = 3$  for  $t_p/T_p = 0.5$  (instead of  $k_p = 2.4$  for  $t_p/T_p = 0.61$ ). As observed, we can see from this example that the half-sine approximation is conservative.



For running, it is also possible to use a Fourier decomposition, an advantage of which is that it does not explicitly involve the impact factor  $k_p$  which is tricky to determine. To take account of the discontinuous ground contact of running, only the positive part of the decomposition is retained. Using the previous notation, this can be written:

$$F(t) = G_0 + \sum_{i=1}^n G_i \sin 2\pi i f_m t \quad \text{pour } (j-1)T_m \leq t \leq (j - \frac{1}{2})T_m$$

$$F(t) = 0 \quad \text{pour } (j - \frac{1}{2})T_m < t \leq jT_m$$

Dans ce cas, les déphasages sont supposés négligeables et les amplitudes des trois premières harmoniques sont des valeurs moyennes, ces coefficients étant, en toute rigueur, comme  $k_p$ , fonction de la fréquence de course (figure A.2.9) :

$$G_1 = 1,6 G_0 ; G_2 = 0,7 G_0 ; G_3 \approx 0,2 G_0.$$

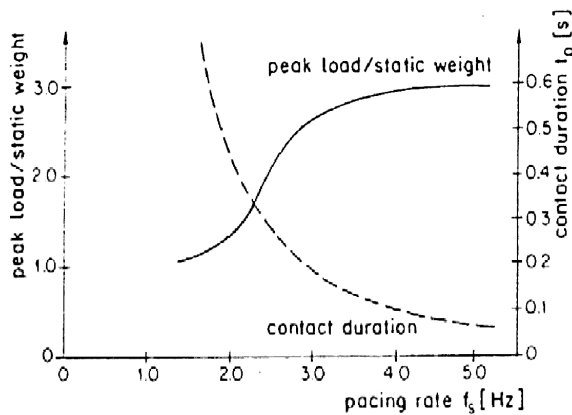


Figure A.2.8 : Evolution de la durée de contact en fonction de la fréquence

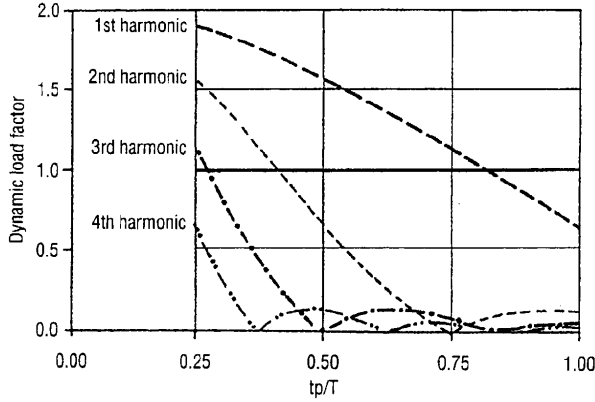


Figure A.2.9 : Amplitude des différentes harmoniques

$$F(t) = G_0 + \sum_{i=1}^n G_i \sin 2\pi i f_m t \quad \text{for } (j-1)T_m \leq t \leq (j - \frac{1}{2})T_m$$

$$F(t) = 0 \quad \text{for } (j - \frac{1}{2})T_m < t \leq jT_m$$

In this case, the phase offset is assumed to be negligible and the amplitudes of the first three harmonics are mean values; in all strictness, these coefficients are, like  $k_p$ , a function of the running pacing rate (figure A.2.9):

$$G_1 = 1.6 G_0 ; G_2 = 0.7 G_0 ; G_3 \approx 0.2 G_0.$$

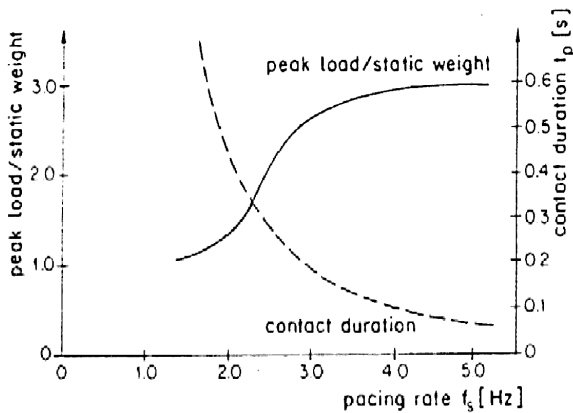


Figure A.2.8: Evolution of the duration of contact versus frequency

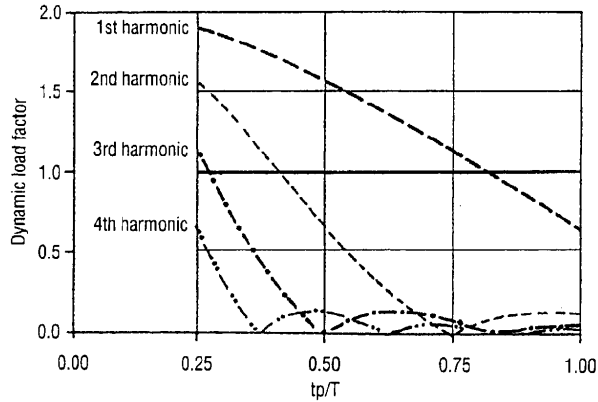


Figure A.2.9: Amplitude of the different harmonics

Sur la figure A.2.10 sont représentées (toujours sur 1 seconde avec  $G_0 = 700$  newtons, mais une fréquence  $f_m = 3$  Hz), d'une part l'approximation demi-sinus et d'autre part, la décomposition en série de Fourier, en prenant en compte de 1 à 3 harmoniques. Nous pouvons remarquer que les différentes courbes sont proches. Plus précisément, l'approximation demi-sinus conduit à un signal d'amplitude plus faible (avec la valeur de  $k_p$  retenue) que la prise en compte d'une seule harmonique dans la série de Fourier.

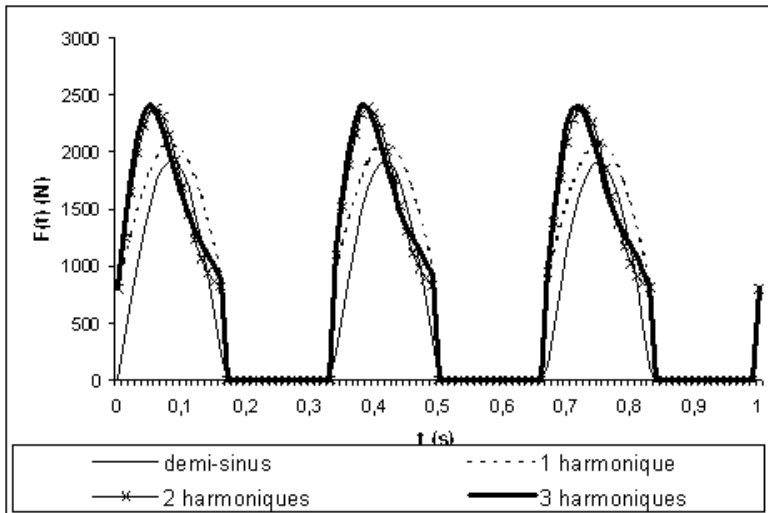


Figure A.2.10 : course - composante verticale ( $f_m = 3$  Hz)

Ce chargement fonction du temps peut se décomposer en une série de Fourier, faisant apparaître une partie constante à environ 1250 newtons et une partie variable de même

fréquence que la course pour la première harmonique et d'amplitude 1250 newtons. C'est cette valeur que l'on pourrait retenir si une analyse spécifique de coureurs devait être réalisée. Le présent guide n'a cependant pas prévu de cas de charge spécifiques de coureurs sur une passerelle, car on considère que les effets d'une foule de piétons sont nettement plus défavorables.

#### A.2.2.2. Composante horizontale

À notre connaissance, il n'a pas été fait de mesure de la composante horizontale lors de la course, ni pour sa projection longitudinale, ni pour sa projection transversale. Cependant, il est raisonnable de penser, d'une part, que lors de la course, la composante transversale (celle à laquelle le public est le plus sensible) présente une amplitude relative faible comparée à la composante verticale (la course correspondant a priori à une progression plus « dirigée »), alors que la composante longitudinale sera plus importante (plus grand effort moteur). D'autre part, comme pour la marche, il est logique d'estimer que la fréquence de la composante transversale sera la moitié de la composante verticale, alors que celle de la composante longitudinale sera du même ordre de grandeur.

Figure 2.10 shows (for one second, with  $G_0 = 700$  newtons, but with a frequency of  $f_m = 3$  Hz), on one hand, the half-sine approximation and, on the other hand, the Fourier series decomposition, for harmonics 1 to 3. It can be seen that the different curves are similar. More precisely, the half-sine approximation results in a weaker amplitude signal (with the value  $k_p$  adopted) than taking account of a single harmonic in the Fourier series.

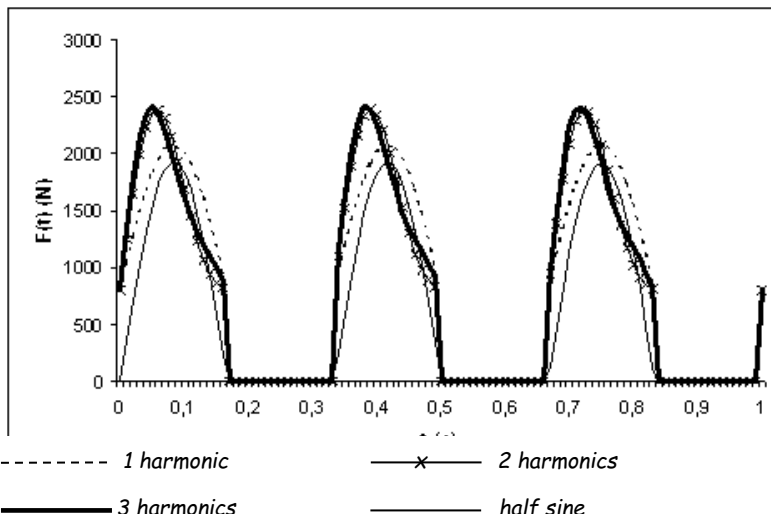


Figure A.2.10: running - vertical component ( $f_m = 3$  Hz)

This loading versus time can be decomposed into a Fourier series, showing a constant part at about 1250 newtons and a variable part of the same frequency as running for the

first harmonic and with an amplitude of 1250 newtons. It is this value that could be used if a running-specific analysis were carried out. However, this guide has not examined specific load cases for runners on a footbridge for it is considered that a crowd of pedestrians is much more unfavourable.

#### A.2.2.2. Horizontal component

To our knowledge, no measurement of the horizontal component has been made for running, for neither its longitudinal nor its lateral aspect. It is reasonable to think, however, that, on one hand, the lateral component during running (the component to which people are most sensitive) has a relatively low amplitude compared to the vertical component (in principle running is a more 'directed' progression), whereas the longitudinal component will be greater (greater motive force). On the other hand, as for walking, it is logical to consider that the frequency of the lateral component will be half that of the vertical component, whereas the frequency of the longitudinal component will be more or less the same.

## ANNEXE 3 : SYSTEMES AMORTISSEURS

### A.3.1. Amortisseurs visco-élastiques

L'utilisation de matériaux visco-élastiques pour le contrôle des vibrations remonte aux années 50 où ils furent employés pour limiter l'endommagement par fatigue induit par les vibrations sur les assemblages d'avions. L'application aux structures de génie civil date des années 1960.

#### A.3.1.1. Principe

Les matériaux visco-élastiques utilisés sont typiquement des polymères qui dissipent l'énergie par travail en cisaillement. La figure 3.1. présente un amortisseur visco-élastique constitué de couches de matériaux visco-élastiques entre plaques de métal. Lorsque ce type de dispositif est installé sur une structure, le déplacement relatif des plaques extérieures par rapport à la plaque centrale produit des contraintes de cisaillement dans la couche visco-élastique qui dissipe l'énergie.

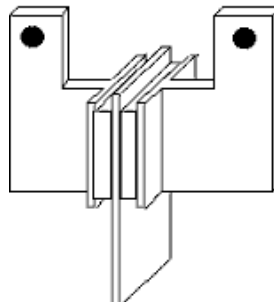


Figure A.3.1 - Amortisseur visco-élastique

Sous un chargement harmonique de fréquence  $\omega$ , la déformation  $\gamma(t)$  et la contrainte de cisaillement  $\tau(t)$  sont également à la fréquence  $\omega$  mais en général déphasées :

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \gamma_0 \sin(\omega t) \\ \tau(t) &= \tau_0 \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (\text{Eq. A.3.1.})$$

Les paramètres  $\gamma_0$ ,  $\tau_0$  et  $\varphi$  dépendent en général de la fréquence  $\omega$ . La contrainte de cisaillement peut cependant être réécrite :

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \gamma_0 \left( \frac{\tau_0}{\gamma_0} \cos \varphi \sin(\omega t) + \frac{\tau_0}{\gamma_0} \sin \varphi \cos(\omega t) \right) \\ \tau(t) &= \gamma_0 (\mathcal{G}_1(\omega) \sin(\omega t) + \mathcal{G}_2(\omega) \cos(\omega t)) \end{aligned} \quad (\text{Eq. A.3.2.})$$

En remplaçant les termes  $\sin(\omega t)$  et  $\cos(\omega t)$  par  $\gamma(t)/\gamma_0$  et  $\dot{\gamma}(t)/(\omega \gamma_0)$ , la relation contrainte-déformation suivante s'obtient alors :

### APPENDIX 3: DAMPER SYSTEMS

#### A.3.1. Visco-elastic dampers

The use of visco-elastic materials to control vibrations dates back to the 1950s when they were used to limit vibration-induced fatigue damage on aircraft. Application to civil engineering structures dates back to the 1960s.

##### A.3.1.1. Principle

The visco-elastic materials used are typically polymers which dissipate energy through shear. Figure 3.1. shows a visco-elastic damper consisting of layers of visco-elastic materials between plates of metal. When this kind of system is installed on a structure, the displacement of the outer plates relative to the central plate produces shear stress in the visco-elastic layer, which dissipates the energy.

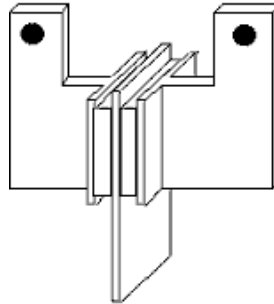


Figure A.3.1 - Visco-elastic damper

Under harmonic loading of frequency  $\omega$ , the strain  $\gamma(t)$  and the shear stress  $\tau(t)$  are also at the frequency  $\omega$ , but are generally out of phase:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \gamma_0 \sin(\omega t) \\ \tau(t) &= \tau_0 \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \tag{Eq. A.3.1.}$$

Parameters  $\gamma_0$ ,  $\tau_0$  and  $\varphi$  generally depend on the frequency  $\omega$ . The shear stress can be rewritten, however:

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \gamma_0 \left( \frac{\tau_0}{\gamma_0} \cos \varphi \sin(\omega t) + \frac{\tau_0}{\gamma_0} \sin \varphi \cos(\omega t) \right) \\ \tau(t) &= \gamma_0 (G_1(\omega) \sin(\omega t) + G_2(\omega) \cos(\omega t)) \end{aligned} \tag{Eq. A.3.2.}$$

By replacing terms  $\sin(\omega t)$  and  $\cos(\omega t)$  by  $\gamma(t)/\gamma_0$  and  $\dot{\gamma}(t)/(\omega \gamma_0)$ , the following stress-strain relationship is obtained:

$$\tau(t) = G_1(\omega)\gamma(t) + \frac{G_2(\omega)}{\omega} \dot{\gamma}(t) \quad (\text{Eq. A.3.3.})$$

qui définit une ellipse (Figure A.3.2) dont l'aire est l'énergie dissipée par la matériau par unité de volume et par cycle d'oscillation.

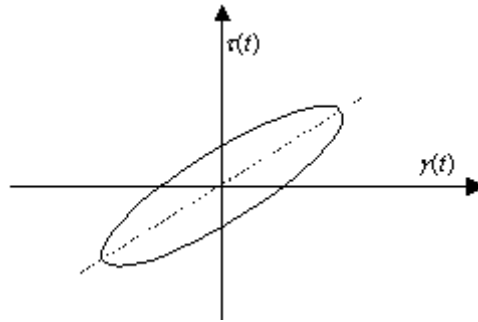


Figure A.3.2 - Diagramme contrainte-déformation

Cette énergie est donnée par :

$$E = \int_0^{2\pi/\omega} \tau(t) \dot{\gamma}(t) dt = \pi \gamma_0 \tau_0 \sin \varphi \quad (\text{Eq. A.3.4.})$$

L'équation (A.3.3) met en évidence un premier terme en phase avec le déplacement représentant le module élastique ; le second terme décrit la dissipation d'énergie. L'amortissement  $G_2(\omega)/\omega$  conduit à exprimer le coefficient d'amortissement par :

$$\xi = \frac{G_2(\omega)}{\omega} \frac{\omega}{2G_1(\omega)} = \frac{\tan \varphi}{2} \quad (\text{Eq. A.3.5.})$$

Les paramètres  $G_2(\omega)$  et  $\tan \varphi$  déterminent complètement le comportement de l'amortisseur visco-élastique sous excitation harmonique. Le terme  $\tan \varphi$  est appelé *coefficient de dissipation*. Ces coefficients varient non seulement suivant la fréquence mais sont également fonctions de la température ambiante. La dissipation d'énergie se faisant sous forme de chaleur, la performance des amortisseurs visco-élastiques doit être également évaluée par rapport à la variation de température interne qui apparaît lors de leur travail.

#### A.3.1.2. Implantation et conception des amortisseurs

L'implantation des amortisseurs est un paramètre essentiel dans leur efficacité vis à vis de la dissipation d'énergie. Cependant des contraintes techniques peuvent empêcher de choisir les endroits les plus appropriés. L'efficacité d'un amortisseur visco-élastique se mesure en capacité de travailler en cisaillement ; il est donc recommandé d'implanter les amortisseurs de sorte que cette condition soit vérifiée.

Ce type d'amortisseur a été peu utilisé pour des passerelles.



$$\tau(t) = G_1(\omega)\gamma(t) + \frac{G_2(\omega)}{\omega}\dot{\gamma}(t) \tag{Eq. A.3.3.}$$

This defines an ellipse (Figure A.3.2) whose surface area is the energy dissipated by the material per unit volume and per oscillation cycle.

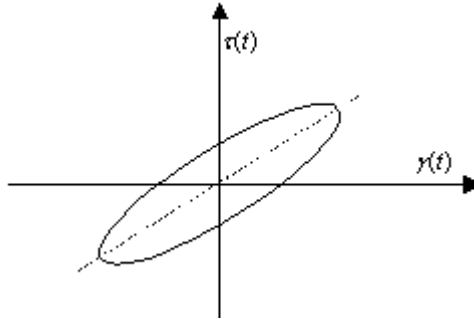


Figure A.3.2 - Stress-strain diagram

This energy is given by:

$$E = \int_0^{2\pi/\omega} \tau(t)\dot{\gamma}(t)dt = \pi\gamma_0 \tau_0 \sin \varphi \tag{Eq. A.3.4.}$$

Equation (A.3.3) shows a first term in phase with the displacement representing the modulus of elasticity; the second term describes the dissipation of energy. The damping  $G_2(\omega)/\omega$  results in the damping ratio being expressed by:

$$\xi = \frac{G_2(\omega)}{\omega} \frac{\omega}{2G_1(\omega)} = \frac{\tan \varphi}{2} \tag{Eq. A.3.5.}$$

Parameters  $G_2(\omega)$  and  $\tan \varphi$  fully determine the behaviour of the visco-elastic damper under harmonic excitation. The term  $\tan \varphi$  is known as the dissipation factor. These coefficients not only vary with frequency but are also affected by the ambient temperature. Since energy is dissipated in the form of heat, the performance of visco-elastic dampers must also be assessed with respect to the variation in internal temperature occurring when they function.

### A.3.1.2. Damper design and location

The location of dampers is an essential parameter in the efficiency of energy dissipation. Technical constraints may unfortunately prevent them being located in the most appropriate positions. The efficiency of a visco-elastic damper is measured in terms of its ability to work in shear; it is therefore recommended that they be located where this condition is met.

This type of damper has been little used for footbridges.

## A.3.2. Amortisseurs visqueux

### A.3.2.1. Principe

Les amortisseurs à frottement sec ou visco-élastiques utilisent l'action de solides pour dissiper l'énergie vibratoire d'une structure (Figure A.3.3). Il est cependant également possible d'utiliser un fluide.

Le dispositif le plus immédiat est celui dérivé du « dashpot ». Dans un tel dispositif, la dissipation intervient par la conversion de l'énergie mécanique en chaleur au travers d'un piston qui déforme et déplace une substance très visqueuse comme du silicone. Une autre famille d'amortisseurs repose sur l'écoulement d'un fluide dans un conteneur fermé. Le piston ne se limite pas à déformer la substance visqueuse mais à forcer le passage du fluide au travers d'orifices calibrés équipés ou non de dispositifs de régulation simple. Comme dans le cas précédent, la dissipation de l'énergie entraîne un dégagement de chaleur. Des niveaux de dissipation d'énergie très élevés peuvent être atteints mais nécessitent des dispositifs technologiques adéquats.

La principale différence entre ces deux technologies est la suivante. Dans le cas d'un amortisseur à pot ou à parois, l'effort dissipatif est fonction de la viscosité du fluide, alors que dans le cas d'un amortisseur à orifices cet effort est principalement dû à la masse volumique du fluide. Les amortisseurs à orifices seront donc plus stables vis à vis des variations de température que les amortisseurs à pot ou à parois.

Dans le cas des passerelles piétons, les mouvements sont très faibles, et il faut s'assurer que les amortisseurs seront efficaces même pour de faibles déplacements, de l'ordre du millimètre. Compte tenu de la compressibilité du fluide, des frottements des joints, et des jeux dans les attaches, ceci n'est pas facile à obtenir.

Les amortisseurs visqueux doivent être disposés entre deux points de la structure ayant un déplacement différentiel l'un par rapport à l'autre. Plus ces déplacements différentiels seront importants, plus l'amortisseur sera efficace. En pratique, ces amortisseurs seront disposés, soit sur un élément reliant une pile et le tablier à quelques mètres de la pile (pour les vibrations horizontales ou verticales), soit sur des éléments de contreventement horizontal du tablier (pour les vibrations horizontales).



Figure A.3.3 - Exemple d'amortisseur visqueux

### A.3.2. Viscous dampers

#### A.3.2.1. Principle

Dry-friction or visco-elastic dampers use the action of solids to dissipate the vibratory energy of a structure (Figure A.3.3). The same result can be achieved using a fluid.

The device that comes to mind most immediately is one derived from the dashpot. In this kind of damper, dissipation occurs through the conversion of mechanical energy into heat by means of a piston which deforms and displaces a highly viscous substance such as silicone. Another kind of damper is based on the flow of a fluid in a closed container. Here, the piston does not simply deform the viscous substance, but forces the fluid through calibrated holes which may or may not be fitted with simple regulation devices. As in the previous case, dissipation of energy generates heat. Very high levels of energy dissipation can be achieved with adequate technology.

The main difference between these two technologies is as follows. In the case of a dashpot damper or viscous damping wall, the dissipative force depends on the viscosity of the fluid, whereas with an orifice damper it is chiefly due to the density of the fluid. Orifice dampers therefore have greater temperature stability than dashpot dampers or viscous damping walls.

Since the movements involved in footbridges are very small, it must be checked that the dampers are effective even for small displacements of around a millimetre. Bearing in mind the compressibility of the fluid, seal friction, and play at fixings, this is not easy to achieve.

Viscous dampers must be placed between two points of the structure with differential displacement. The greater these differential displacements are, the more effective the damper will be. In practice, viscous dampers are placed either on a component connecting a pier and the deck, a few metres from the pier (for horizontal or vertical vibration), or on horizontal bracing members of the deck (for horizontal vibration).



Figure A.3.3 - Viscous dampers

### A.3.2.2. Lois de comportement des amortisseurs visqueux

Dans le cadre de l'étude du comportement d'une structure, il est nécessaire de disposer d'un modèle macroscopique de comportement de l'amortisseur. Il est classique d'utiliser pour cela une loi force-déplacement décrite par une équation différentielle d'ordre  $\kappa$  (Ref. [55]) :

$$f(t) + \lambda^\kappa \frac{d^\kappa f}{dt^\kappa}(t) = C_0 \frac{dx}{dt}(t) \quad (\text{Eq. A.3.6.})$$

où  $f(t)$  est la force appliquée au piston, et  $x(t)$  le déplacement résultant du piston. Les paramètres  $C_0, \lambda, \kappa$  représentent respectivement le coefficient d'amortissement à fréquence nulle, le temps de relaxation et l'ordre de l'amortisseur. Ces paramètres sont généralement déterminés expérimentalement, bien qu'il existe des approximations pour les estimer analytiquement à partir des caractéristiques des matériaux (Ref. [56]).

Notes :

Lorsque  $\lambda \equiv 0$ , le cas d'un amortisseur visqueux linéaire se retrouve. Il convient de signaler qu'il est souvent le plus utilisé, car il simplifie évidemment l'analyse du comportement de la structure.

Une autre formulation peut être utilisée:

$$f(t) = C \left( \frac{dx}{dt}(t) \right)^\alpha \quad (\text{Eq. A.3.7.})$$

$\alpha$  est un coefficient généralement compris entre 0,1 et 0,4.

On note que pour certains fluides la viscosité cinématique varie aussi en fonction du taux de cisaillement du fluide, qui est lui-même proportionnel au gradient de vitesse.

Des amortisseurs visqueux ont été installés sur la passerelle du Millenium à Londres.

### A.3.3. Amortisseurs dynamiques accordés (ADA)

Un Amortisseur Dynamique Accordé (en abrégé ADA, et TMD - Tuned Mass Damper - en anglais) est constitué par une masse reliée à la structure par un ressort et par un amortisseur disposé en parallèle. Ce dispositif permet de diminuer dans des proportions importantes les vibrations d'une structure dans un mode de vibration donné, sous l'action d'une excitation périodique de fréquence proche de la fréquence propre de ce mode de vibration de la structure.

Les premiers développements des ADA ont essentiellement porté sur des systèmes mécaniques pour lesquels une fréquence d'excitation est en résonance avec la fréquence fondamentale de la machine.

### A.3.2.2. Behaviour laws for viscous dampers

When studying structural behaviour, it is necessary to have a macroscopic model of damper behaviour. The conventional procedure to achieve this is to use a force-displacement law defined by a  $\kappa$ -order differential equation (Ref. [55]):

$$f(t) + \lambda^\kappa \frac{d^\kappa f}{dt^\kappa}(t) = C_0 \frac{dx}{dt}(t) \tag{Eq. A.3.6}$$

where  $f(t)$  is the force applied to the piston, and  $x(t)$  the resulting piston displacement. Parameters  $C_0$ ,  $\lambda$ ,  $\kappa$  represent the zero-frequency damping ratio, the relaxation time, and the order of the damper respectively. These parameters are generally determined experimentally, although there are approximations for estimating them analytically from the characteristics of the materials (Ref. [56]).

Notes:

When  $\lambda \equiv 0$ , the situation is that of a linear viscous damper. It should be noted that this case is often the most commonly used, for it obviously simplifies analysis of structural behaviour.

Another formulation can also be used:

$$f(t) = C \left( \frac{dx}{dt}(t) \right)^\alpha \tag{Eq. A.3.7}$$

where the coefficient  $\alpha$  is generally between 0.1 and 0.4.

It should also be noted that the kinematic viscosity of certain fluids varies with their rate of shear which is itself proportional to the velocity gradient.

Viscous dampers were installed on London's Millennium Bridge.

### A.3.3. Tuned mass dampers (TMD)

A tuned mass damper (abbreviated to TMD) consists of a mass connected to a structure by a spring, with a damper connected in parallel. This system makes considerable reductions to the vibration of a structure, at a given vibration mode, under the action of a periodic excitation at a frequency close to the eigenfrequency of that mode of vibration of the structure.

The first developments of TMDs essentially concerned mechanical systems for which an excitation frequency is in resonance with the fundamental frequency of the machine.

### A.3.3.1. Principe

Considérons un oscillateur à 1 degré de liberté soumis à une force harmonique  $f(t)$ . La réponse de cet oscillateur peut être réduite en amplitude par l'ajout d'une masse secondaire (ou ADA) qui a un mouvement relatif par rapport à l'oscillateur primaire. Les équations décrivant le déplacement relatif de l'oscillateur primaire par rapport à l'ADA :

$$\begin{aligned} M \ddot{y}_1(t) + C \dot{y}_1(t) + K y_1(t) &= c \dot{y}_2(t) + k y_2(t) + f(t) \\ m \ddot{y}_2(t) + c \dot{y}_2(t) + k y_2(t) &= -m \ddot{y}_1(t) \end{aligned} \quad (\text{Eq. A.3.8.})$$

ce qui se réduit à la seule équation :

$$(M + m) \ddot{y}_1(t) + C \dot{y}_1(t) + K y_1(t) = -m \ddot{y}_2(t) + f(t) \quad (\text{Eq. A.3.9.})$$

### A.3.3.2. Solution de Den Hartog

Dans le cas où l'oscillateur primaire a un amortissement nul ( $C = 0$ ), il est possible de déterminer les caractéristiques optimales de l'ADA pour une excitation  $f(t)$  harmonique d'amplitude  $f_0$  et de pulsation  $\omega$ . Cette solution optimale est la solution déduite par Den Hartog dans ses premières études. Pour une excitation harmonique, le coefficient de majoration dynamique  $A$ , défini comme le rapport entre l'amplitude dynamique maximale  $y_{1\max}$  et le déplacement statique  $y_{1\text{stat}}$ , s'exprime par :

$$A = \frac{y_{1\max}}{y_{1\text{stat}}} = \sqrt{\frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2\xi_{\text{ada}}\alpha\beta)^2}{\left[ (\alpha^2 - \beta^2)(1 - \beta^2) - \alpha^2\beta^2\mu \right]^2 + (2\xi_{\text{ada}}\alpha\beta)^2(1 - \beta^2 - \beta^2\mu)^2}} \quad (\text{Eq. A.3.10.})$$

où :

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_{\text{osc}}} ; \alpha = \frac{\omega_{\text{ada}}}{\omega_{\text{osc}}} ; \omega_{\text{ada}}^2 = \frac{k}{m} \quad (\text{Eq. A.3.11.})$$

$$\omega_{\text{osc}}^2 = \frac{K}{M} ; \xi_{\text{ada}} = \frac{c}{2m\omega_{\text{ada}}} ; \mu = \frac{m}{M} \quad (\text{Eq. A.3.12})$$

Le coefficient d'amplification dynamique  $A$  est donc fonction de quatre paramètres :  $\mu, \alpha, \beta, \xi_{\text{ada}}$ . La figure A.3.4 donne l'évolution de  $A$  en fonction du rapport de fréquence  $\beta$ , ceci pour différents coefficients d'amortissement et pour  $\alpha = 1$  (accord des fréquences) et  $\mu = 0,05$ . Cette figure permet de constater que, pour le cas où l'amortissement  $\xi_{\text{ada}}$  est nul, l'amplitude de réponse présente deux pics de résonance. A l'opposé lorsque l'amortissement tend vers l'infini, les deux masses sont virtuellement fusionnées pour ne plus former qu'un seul oscillateur de masse  $1,05 M$  avec une amplitude infinie à la fréquence de résonance. Entre ces cas extrêmes, il existe une valeur d'amortissement pour laquelle le pic de résonance est minimal.

### A.3.3.1. Principle

Take a single-degree-of-freedom oscillator subjected to a harmonic force  $f(t)$ . The response of the oscillator can be reduced in amplitude by adding a secondary mass (or TMD) that moves relative to the primary oscillator. The equations describing the displacement of the primary oscillator relative to the TMD are:

$$\begin{aligned} M \ddot{y}_1(t) + C \dot{y}_1(t) + K y_1(t) &= c \dot{y}_2(t) + k y_2(t) + f(t) \\ m \ddot{y}_2(t) + c \dot{y}_2(t) + k y_2(t) &= -m \ddot{y}_1(t) \end{aligned} \tag{Eq. A.3.8}$$

which, reduced to a single equation, gives:

$$(M + m) \ddot{y}_1(t) + C \dot{y}_1(t) + K y_1(t) = -m \ddot{y}_2(t) + f(t) \tag{Eq. A.3.9}$$

### A.3.3.2. Den Hartog solution

If the primary oscillator has zero damping ( $C = 0$ ), the optimum characteristics of the TMD for a harmonic excitation  $f(t)$  of amplitude  $f_0$  and angular frequency  $\omega$ . This optimum solution is the solution deduced by Den Hartog in his first studies. For a harmonic excitation, the dynamic impact factor  $A$ , defined as the ratio between the maximum dynamic amplitude  $y_{1max}$  and the static displacement  $y_{1stat}$ , is expressed:

$$A = \frac{y_{1max}}{y_{1stat}} = \sqrt{\frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2\xi_{ada}\alpha\beta)^2}{[(\alpha^2 - \beta^2)(1 - \beta^2) - \alpha^2\beta^2\mu]^2 + (2\xi_{ada}\alpha\beta)^2(1 - \beta^2 - \beta^2\mu)^2}} \tag{Eq. A.3.10}$$

where:

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_{osc}} ; \alpha = \frac{\omega_{tmd}}{\omega_{osc}} ; \omega_{tmd}^2 = \frac{k}{m} \tag{Eq. A.3.11.}$$

$$\omega_{osc}^2 = \frac{K}{M} ; \xi_{tmd} = \frac{c}{2m\omega_{tmd}} ; \mu = \frac{m}{M} \tag{Eq. A.3.12}$$

The dynamic impact factor  $A$  is a function of four parameters:  $\mu, \alpha, \beta, \xi_{tmd}$ . Figure A.3.4 shows the evolution of  $A$  in accordance with the frequency ratio  $\beta$ , for different damping ratios and for  $\alpha = 1$  (tuned frequencies) and  $\mu = 0.05$ . From this figure it can be seen that when the damping  $\xi_{tmd}$  is zero, the amplitude of response has two peaks of resonance. On the contrary, when damping tends to infinity, the two masses are virtually fused together to form a single oscillator of mass  $1.05 M$  of infinite amplitude at the resonant frequency. Between these two extremes, there is a damping value for which the peak resonance is minimum.

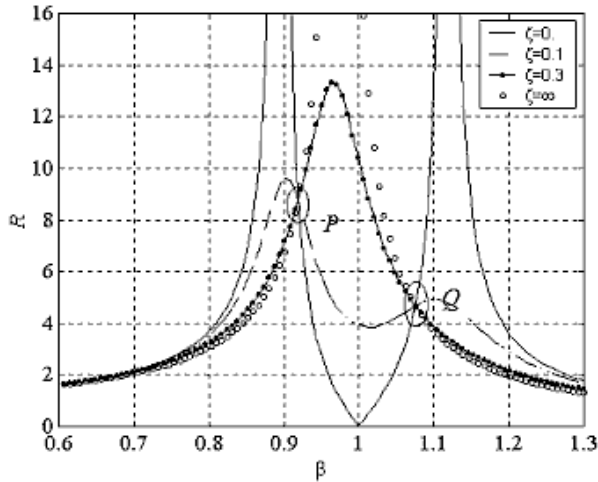


Figure A.3.4 - Coefficient de majoration dynamique en fonction de  $\beta$   
 ( $\mu = 0,05$  et  $\alpha = 1,0$ )

L'objectif d'un amortisseur à masse accordée consiste donc à amener le pic de résonance vers sa plus petite valeur possible. La figure A.3.4 met en évidence l'indépendance par rapport à  $\xi_{ada}$  de deux points (P et Q) des courbes  $A = f(\beta)$ . L'amplitude minimale à la résonance est alors obtenue en choisissant le rapport  $\alpha$  de sorte que ces deux points soient d'amplitudes égales. Ce ratio optimal est alors donné par l'expression :

$$\alpha_{opt} = \frac{1}{1 + m / M} \tag{Eq. A.3.13}$$

et les amplitudes aux points P et Q sont :

$$R = \sqrt{1 + \frac{2}{\mu}} \tag{Eq. A.3.14}$$

La fréquence optimale  $f_{opt}$  et le coefficient d'amortissement optimal  $\xi_{opt}$  peuvent être déterminées pour l'amortisseur à masse accordée <sup>(1)</sup>, dans le cas où la structure n'a pas d'amortissement propre : c'est la solution de Den-Hartog (Ref. [51]):

$$f_{opt} = \frac{1}{1 + \mu} f_s \tag{Eq. A.3.15}$$

$$\xi_{opt} = \sqrt{\frac{3}{8} \frac{\mu}{(1 + \mu)^3}} \tag{Eq. A.3.16}$$

<sup>(1)</sup> La fréquence optimale est très légèrement inférieure à celle de la structure, la masse ajoutée étant toujours de l'ordre de quelques centièmes de la masse de la structure.



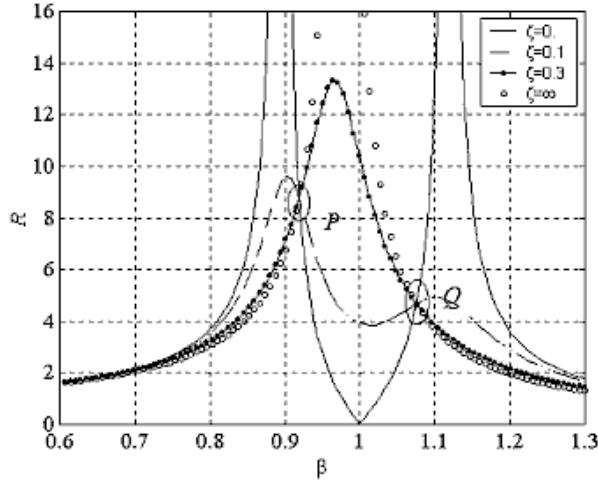


Figure A.3.4 - Dynamic impact factor versus  $\beta$   
 ( $\mu = 0,05$  et  $\alpha = 1,0$ )

The purpose of a tuned mass damper is to bring the peak resonance down to the lowest possible value. Figure A.3.4 shows the independence of two points (P and Q) on curves  $A = f(\beta)$  from  $\xi_{\text{tmd}}$ . The minimum amplitude at resonance is obtained by choosing the  $\alpha$  ratio such that these two points are of equal amplitude. This optimum ratio is given by the expression:

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{1}{1 + m / M} \tag{Eq. A.3.13}$$

and the amplitudes at points P and Q are:

$$R = \sqrt{1 + \frac{2}{\mu}} \tag{Eq. A.3.14}$$

The optimum frequency  $f_{\text{opt}}$  and the optimum damping ratio  $\xi_{\text{opt}}$  can be determined for the tuned mass damper <sup>(2)</sup> if the structure has no damping of its own: this is the Den Hartog solution (Ref. [51]):

$$f_{\text{opt}} = \frac{1}{1 + \mu} f_s \tag{Eq. A.3.15}$$

$$\xi_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{3}{8} \frac{\mu}{(1 + \mu)^3}} \tag{Eq. A.3.16}$$

---

<sup>(2)</sup> The optimum frequency is very slightly lower than that of the structure, the added mass always being around a few hundredths of the mass of the structure.

### A.3.3.3. Solution générale

Une analyse plus détaillée a été conduite par Warburton (Ref. [54]) afin de déterminer les caractéristiques optimales de l'ADA pour plusieurs types d'excitations (en présence d'un amortissement structural faible). L'analyse proposée par Warburton permet également d'utiliser les résultats pour des oscillateurs primaires à un degré de liberté aux cas à plusieurs degrés de liberté. Ces analogies reposent sur une décomposition sur la base des modes propres normalisés de la structure. L'optimalité n'est alors pas recherchée sur un mode donné (composante modale), mais sur une coordonnée généralisée (déplacement ou dérivées). Le lecteur est donc renvoyé à la référence 54 pour plus de détails sur ces analogies. Aussi, nous nous limiterons dans cette section à ne traiter que le cas d'oscillateurs à 1 degré de liberté.

Les caractéristiques optimales de l'amortisseur dynamique accordé de Den Hartog pour une excitation harmonique ont été établies en minimisant le coefficient de majoration dynamique  $A$ . C'est le principe même de la détermination d'un ADA optimal : définir dans un premier temps un critère d'optimalité  $A$  puis rechercher les solutions minimisant ce critère. Outre le coefficient de majoration dynamique, de nombreux autres critères peuvent être choisis comme la minimisation du déplacement de la structure, du déplacement de l'amortisseur, de l'accélération de la structure ou des efforts dans la structure,.... ceci pour différents types d'excitations. En particulier, lorsque l'excitation est aléatoire (le système primaire est soumis à une force aléatoire - c'est-à-dire la foule dans notre cas), les paramètres optimaux  $\alpha_{opt}$  et  $\xi_{opt}$  sont donnés par les expressions :

$$\alpha_{opt} = \frac{\sqrt{1 + \frac{\mu}{2}}}{1 + \mu} \tag{Eq. A.3.17}$$

$$\xi_{opt} = \sqrt{\frac{\mu \left(1 + \frac{3\mu}{4}\right)}{4(1 + \mu) \left(1 + \frac{\mu}{2}\right)}} \tag{Eq. A.3.18}$$

### A.3.3.4. Cas d'un oscillateur primaire amorti

Dans le cas où la structure a un amortissement propre, la fréquence optimale théorique est très légèrement plus faible que celle donnée par la formule ci-dessus (valable pour une excitation harmonique), qui est néanmoins suffisante dans les cas habituels (Ref. [53]) :

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{opt} &= \alpha_{opt} - \left(0,241 + 1,7\mu - 2,6\mu^2\right) \xi_{osc} - \left(1,0 - 1,9\mu + \mu^2\right) \xi_{osc}^2 \\ \tilde{\xi}_{opt} &= \xi_{opt} + \left(0,13 + 0,12\mu + 0,4\mu^2\right) \xi_{osc} - \left(0,01 + 0,9\mu + 3\mu^2\right) \xi_{osc}^2 \end{aligned} \tag{Eq. A.3.19}$$

où  $\xi_{osc}$  est le coefficient d'amortissement de la masse primaire. Ces expressions présentent moins de 1% d'erreur pour  $0,03 < \mu < 0,40$  et  $0,0 < \xi_{osc} < 0,15$ .

### A.3.3.3. General solution

Warburton has carried out a more detailed analysis (Ref. [54]) to determine the optimum TMD characteristics for several kinds of excitation (in the case of slight structural damping). The analysis proposed by Warburton also enables the results obtained for primary SDOF oscillators to be used for MDOF oscillators. The analogies are based on a decomposition based on the normalized modes of the structure. Optimality is not then sought for a given mode (modal component) but for a generalized coordinate (displacement or derivatives). Reference 54 gives more detail on these analogies. This section will address only the case of SDOF oscillators.

The optimum characteristics of the Den Hartog tuned mass damper for a harmonic excitation have been determined by minimizing the dynamic increase factor  $A$ . This is the heart of the principle of determining an optimum TMD: define firstly an optimality criterion  $A$ , then look for solutions that minimize that criterion. A number of criteria in addition to the dynamic increase factor can be chosen, including minimization of displacement of the structure, of displacement of the damper, of acceleration of the structure or of forces in the structure, etc., all of this for different kinds of excitations. In particular, when the excitation is random (the primary system is subject to a random force - i.e. the crowd in our case), the optimum parameters  $\alpha_{opt}$  and  $\xi_{opt}$  are given by the expressions:

$$\alpha_{opt} = \frac{\sqrt{1 + \frac{\mu}{2}}}{1 + \mu} \tag{Eq. A.3.17}$$

$$\xi_{opt} = \sqrt{\frac{\mu \left(1 + \frac{3\mu}{4}\right)}{4(1 + \mu) \left(1 + \frac{\mu}{2}\right)}} \tag{Eq. A.3.18}$$

### A.3.3.4. Case of a damped primary oscillator

If the structure has its own damping, the theoretical optimum frequency is very slightly lower than that given by the above formula (valid for harmonic excitation) which is nevertheless sufficient in the more common cases (Ref. [53]):

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{opt} &= \alpha_{opt} - \left(0.241 + 1.7\mu - 2.6\mu^2\right)\xi_{osc} - \left(1.0 - 1.9\mu + \mu^2\right)\xi_{osc}^2 \\ \tilde{\xi}_{opt} &= \xi_{opt} + \left(0.13 + 0.12\mu + 0.4\mu^2\right)\xi_{osc} - \left(0.01 + 0.9\mu + 3\mu^2\right)\xi_{osc}^2 \end{aligned} \tag{Eq. A.3.19}$$

where  $\xi_{osc}$  is the damping ratio of the primary mass. These expressions entail less than 1% error for  $0.03 < \mu < 0.40$  and  $0.0 < \xi_{osc} < 0.15$ .

L'efficacité d'un amortisseur dynamique accordé est beaucoup plus sensible à la fréquence propre de la masse ajoutée, qu'à la valeur de l'amortissement ajouté. C'est pourquoi la fréquence propre de la masse doit pouvoir être réglée lors de la pose de l'appareil, de façon à l'accorder finement à la fréquence propre réelle de la structure. Cela se fait généralement en jouant sur la valeur de la masse elle-même, qui est plus facile à régler que la raideur du ressort.

#### A.3.3.5. Exemples

Il existe différents types d'amortisseurs dynamiques accordés. Le type le plus courant consiste en une masse reliée à la structure par l'intermédiaire de ressorts hélicoïdaux verticaux et d'un ou plusieurs amortisseurs hydrauliques ou pneumatiques. Ces ADA peuvent être couplés pour amortir des vibrations de torsion. La figure 3.5 donne un aperçu d'un tel dispositif.

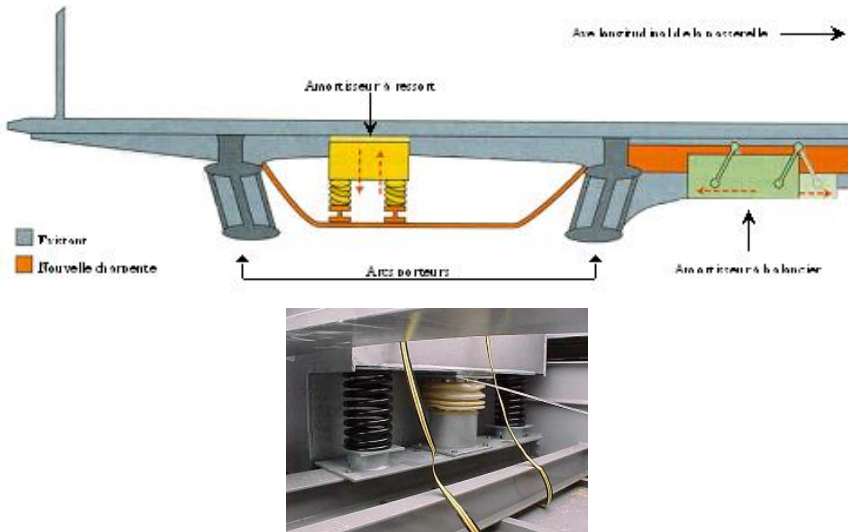


Figure A.3.5 - Amortisseur à masse accordée pour la passerelle Solferino

Lorsque la vibration à amortir est horizontale, le dispositif constitué d'une masse accrochée en pied d'un pendule, associée à un amortisseur hydraulique horizontal, peut être envisagé.

#### A.3.4. Amortisseurs dynamiques accordés fluides

Dans la technologie des amortisseurs dynamiques accordés, une seconde masse est attachée à la structure par des raideurs et des amortisseurs (figure A.3.6a). Une autre classe d'amortisseurs consiste à remplacer masse, raideur et amortissement par un conteneur rempli d'un liquide. Comme pour un ADA classique, le liquide joue le rôle de masse secondaire et l'amortissement est fourni par les frottements sur les parois du conteneur. L'action de gravité constituant un mécanisme de rappel, le système secondaire (figure A.3.6b) ainsi formé présente des fréquences caractéristiques qui peuvent être accordées pour optimiser un critère de performance.

The efficiency of a tuned mass damper is much more sensitive to the natural frequency of the added mass than to the amount of damping added. This is why it must be possible to adjust the eigenfrequency of the mass when the damper is installed, so as to 'tune' it very closely to the actual natural frequency of the structure. This is generally done by adjusting the mass itself, since this is easier than adjusting the stiffness of the spring.

#### A.3.3.5. Examples

There are different kinds of tuned mass dampers. The most common type consists of a mass connected to the structure by vertical helical springs and one or more hydraulic or pneumatic dampers. These TMDs can be coupled to damp torsional vibration. Figure 3.5 shows one such device.

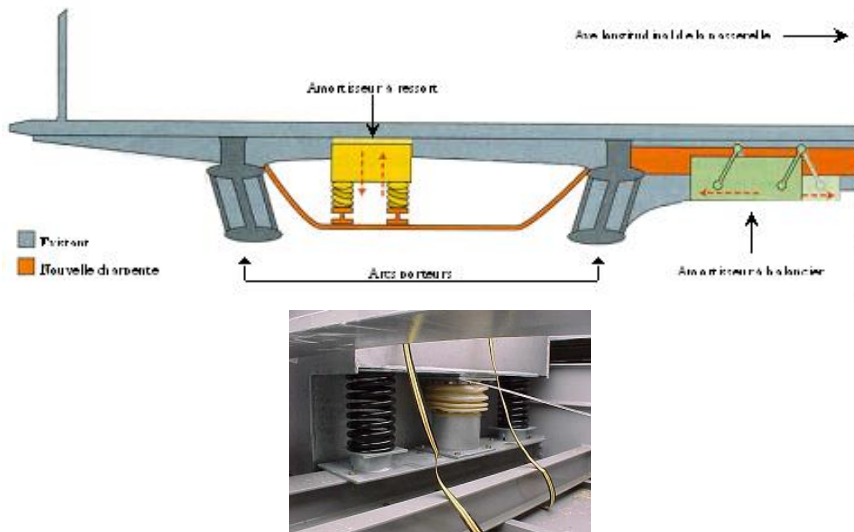


Figure A.3.5 - Tuned mass damper for Solferino Bridge

When the vibration to be damped is horizontal, a device consisting of a mass attached at the bottom of a pendulum, associated with a horizontal hydraulic damper, can be envisaged.

#### A.3.4. Tuned liquid dampers

In the tuned mass damper technology, a second mass is attached to the structure by components with a given stiffness and dampers (figure A.3.6a). In a variation on the TMD proper, the tuned liquid damper, the mass, stiffness, and damper are replaced by a container filled with a liquid. As with the conventional TMD, the liquid acts as a secondary mass and the damping is provided by friction on the sides of the container. Since gravitational force constitutes a 'spring' effect, the secondary system thus formed (figure.A.3.6b) has characteristic frequencies which can be tuned to optimize a performance criterion.

Le premier prototype d'ADA fluide a été proposé dès 1900 par Frahm pour le contrôle du roulis des navires. Dès les années 70, ces amortisseurs furent installés sur les satellites pour réduire les vibrations de longue période. Ce n'est par contre qu'au cours des années 80, que des applications sur des bâtiments furent envisagées.

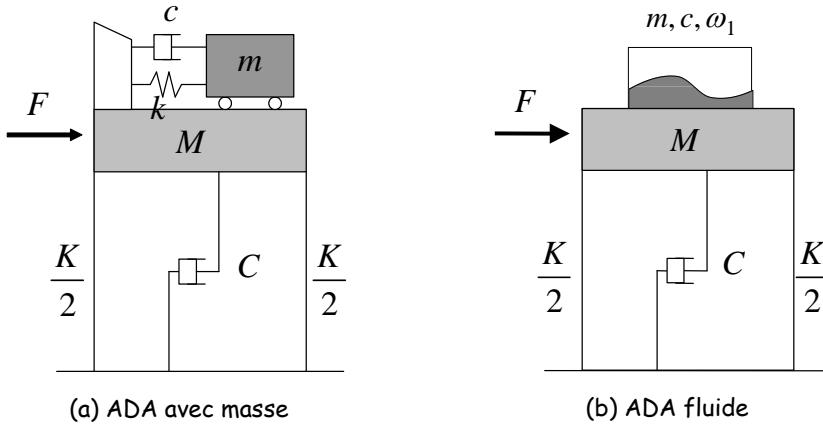


Figure A.3.6 - Comparaison entre ADA avec masse et ADA fluide

Les principes mis en œuvre dans le dimensionnement des ADA avec masse sont applicables aux ADA fluides. Cependant, si les paramètres d'un ADA peuvent être optimisés et des formules analytiques fournies, la réponse non linéaire du fluide en mouvement dans un conteneur rend très difficile une telle optimisation. La réponse du système « conteneur/structure » est alors dépendante de l'amplitude des mouvements.

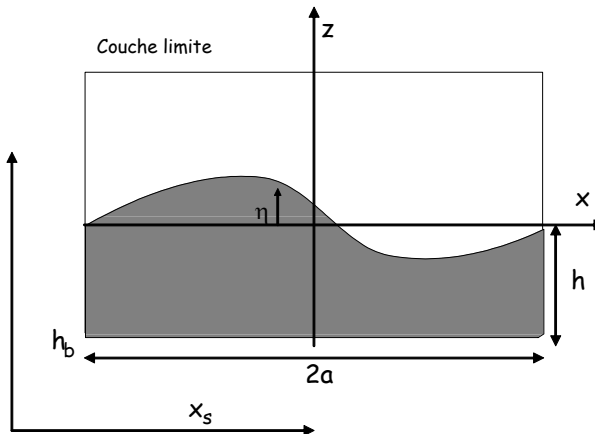


Figure A.3.7 - Description d'un ADA fluide

The first prototype tuned liquid damper was proposed as early as 1900 by Frahm as a means of controlling the roll of ships. In the 1970s this kind of damper was installed on satellites to reduce long-period vibration. And it was only in the 1980s that application to buildings was envisaged.

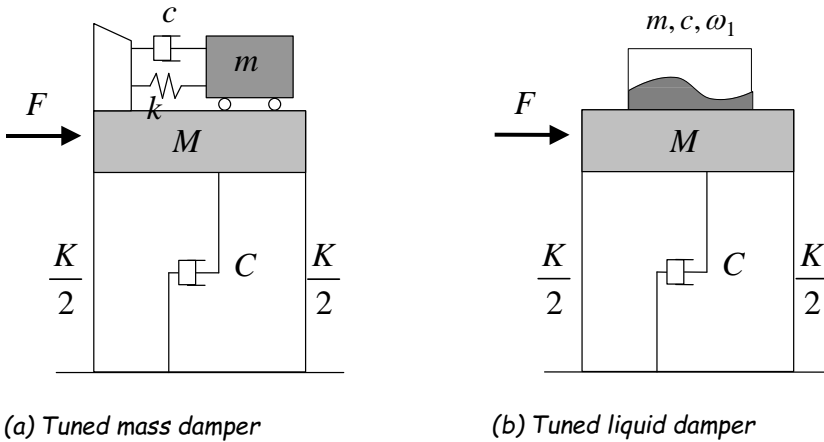


Figure A.3.6 - Comparison of TMD and TLD

The principles involved in the design of TMDs are applicable to TLDs. However, while the parameters of a TMD can be optimized and analytical formulas supplied, the non-linear response of the moving fluid inside a container makes such optimization difficult. The response of the 'container/structure' system then depends on the amplitude of movement.

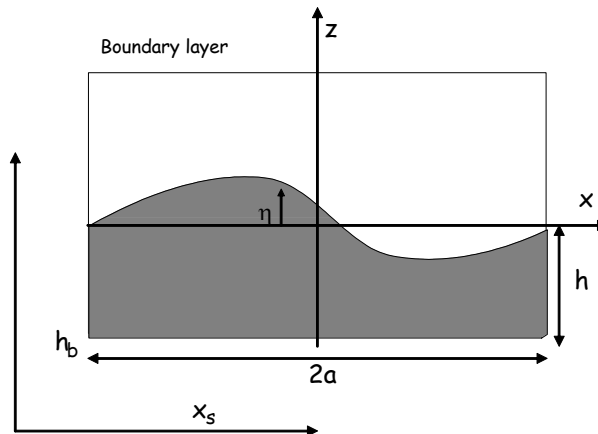


Figure A.3.7 - Description of a TLD

Considérons un conteneur rectangulaire de longueur  $2a$  rempli d'un liquide de viscosité  $\nu$  et de hauteur moyenne  $h$ . Le fluide est supposé incompressible, irrotationnel. Le conteneur est soumis à un déplacement horizontal  $x(t)$ . Il est supposé que la surface libre reste continue (aucune cassure de vagues) et que la pression  $p(x, z, t)$  est constante sur cette surface libre (figure A.3.7). D'après la théorie linéaire de la couche limite, la fréquence naturelle de vibration du fluide est :

$$\omega_{\text{adaf}} = \sqrt{\frac{\pi g}{2a} \tanh h \left( \frac{\pi h}{2a} \right)} \quad (\text{Eq. A.3.20})$$

Le coefficient d'amortissement peut être approché par l'expression (Ref. [57]) :

$$\xi_{\text{adaf}} = \frac{1}{\sqrt{2h}} \sqrt{\frac{\nu}{\omega_{\text{adaf}}}} \left( 1 + \frac{h}{b} \right) \quad (\text{Eq. A.3.21})$$

où  $b$  est la largeur du réservoir. Les équations du système couplé s'écrivent identiquement aux équations (A.3.8.) et (A.3.9.) avec  $m = \rho_{\text{adaf}} 2abh$ ,  $c = 2m \xi_{\text{adaf}} \omega_{\text{adaf}}$ ,  $k = m \omega_{\text{adaf}}^2$ , c'est-à-dire :

$$\begin{bmatrix} 1 + \mu & \mu \\ \mu & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Y}_1 \\ \ddot{Y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\xi_{\text{osc}} \omega_{\text{osc}} & 0 \\ 0 & 2\mu \xi_{\text{adaf}} \omega_{\text{adaf}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{\text{osc}}^2 & 0 \\ 0 & \omega_{\text{adaf}}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ m \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{Eq. A.3.22})$$

Cette équation met en évidence l'analogie qu'il peut y avoir entre un amortisseur dynamique accordé avec masse et un amortisseur dynamique fluide. Cette analogie n'a de sens que sous réserve de la validité des expressions (A.3.20) et (A.3.21) choisies comme pulsation et coefficient d'amortissement équivalents. En réalité, la résolution du problème couplé est plus complexe de par la nature fluide de l'oscillateur secondaire.

A la différence de nombreuses tours de grande hauteur, aucune passerelle à notre connaissance n'a fait l'objet d'une mise en œuvre d'amortisseurs dynamiques accordés fluides. Cela fut néanmoins envisagé pour le pont d'Ikuchi (Japon) afin d'amortir les vibrations horizontales des pylônes. La masse totale fluide était de 4770 kg et la fréquence d'accord était de 0.255 Hz.



Consider a rectangular container of length  $2a$  filled to a mean depth  $h$  with a liquid of viscosity  $\nu$ . The fluid is assumed to be incompressible and irrotational. The container is displaced horizontally by  $x(t)$ . It is assumed that the free surface of the liquid remains continuous (no breaking waves) and that the pressure  $p(x, z, t)$  is constant over the entire surface (figure A.3.7). According to linear boundary layer theory, the natural vibration frequency of the fluid is:

$$\omega_{tld} = \sqrt{\frac{\pi g}{2a} \tanh\left(\frac{\pi h}{2a}\right)}; \tag{Eq. A.3.20}$$

The damping ratio can be approached with the expression (Ref. [57]):

$$\xi_{tld} = \frac{1}{\sqrt{2}h} \sqrt{\frac{\nu}{\omega_{tld}}} \left(1 + \frac{h}{b}\right); \tag{Eq. A.3.21}$$

where  $b$  is the tank width. The equations of the coupled system are written in exactly the same way as equations (A.3.8.) and (A.3.9.) with  $m = \rho_{tld} 2abh$ ,  $c = 2m \xi_{tld} \omega_{tld}$ ,  $k = m \omega_{tld}^2$  i.e.:

$$\begin{bmatrix} 1 + \mu & \mu \\ \mu & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\xi_{osc} \omega_{osc} & 0 \\ 0 & 2\mu \xi_{tld} \omega_{tld} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{osc}^2 & 0 \\ 0 & \omega_{tld}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ m \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{Eq. A.3.22}$$

This equation evidences the analogy there may be between a tuned mass damper and a tuned liquid damper. This analogy is only meaningful if the expressions (A.3.20) and (A.3.21) chosen as equivalent angular frequency and equivalent damping ratio are valid. In reality, solving the coupled problem is more complex because of the fluid nature of the secondary oscillator.

Unlike very tall buildings, no footbridge has ever—to our knowledge—been fitted with tuned liquid dampers. This was envisaged, however, for Ikuchi Bridge (Japan) in order to damp the horizontal vibrations of the pylons. The total fluid mass was 4770 kg and the tuning frequency was 0.255 Hz.

**A.3.5. Tableau comparatif**

Type d'amortisseur	Domaine d'utilisation	Avantages	Inconvénients
Visco-élastiques	Très peu utilisé	Amortit plusieurs modes	Nécessite un montage qui travaille en cisaillement
Visqueux à pot ou à parois	Peu utilisé	Amortit plusieurs modes	Sensible à la température, calcul non linéaire
Visqueux à orifices	Peu utilisé	Indépendant de la température, amortit plusieurs modes	Calcul non linéaire
Dynamiques accordés	Très utilisé	Facile à dimensionner	Masse additionnelle à considérer, amortit un mode donné, nécessite un réglage en fréquence
Dynamiques accordés fluides	Très peu utilisé		"Innovant", masse additionnelle à considérer, amortit un mode donné, nécessite un réglage en fréquence

**A.3.5. Comparative table**

<b>Damper type</b>	<b>Scope of use</b>	<b>Advantages</b>	<b>Disadvantages</b>
<i>Visco-elastic</i>	<i>Very little used</i>	<i>Damps several modes</i>	<i>Requires installation working in shear</i>
<i>Viscous dashpot damper or viscous damping wall</i>	<i>Little used</i>	<i>Damps several modes</i>	<i>Temperature-sensitive, non-linear calculation</i>
<i>Viscous orifice type</i>	<i>Little used</i>	<i>Independent of temperature, damps several modes</i>	<i>Non-linear calculation</i>
<i>Tuned mass</i>	<i>Much used</i>	<i>Easy to design</i>	<i>Additional mass to be considered, damps a given mode, requires frequency adjustment</i>
<i>Tuned liquid</i>	<i>Very little used</i>		<i>'Innovative', additional mass to be considered, damps a given mode, requires frequency adjustment</i>

## ANNEXE 4 : EXEMPLES DE PASSERELLES

Nous allons passer en revue différents modèles de passerelles récemment construites parmi les principaux types de structures. Nous présenterons une structure à poutres latérales, une structure à poutre caisson métallique et platelage orthotrope, une structure en dalle nervurée, un arc bow-string à platelage orthotrope, une structure suspendue à un mât métallique, un arc métallique en treillis, une structure haubanée. Nous indiquerons les caractéristiques principales de chacun des ouvrages et son mode de construction, et nous préciserons les résultats des études dynamiques et, le cas échéant, les résultats des essais.

### A.4.1. Poutres latérales type Warren : Passerelle de Cavaillon

L'ouvrage est une structure à poutres latérales de type Warren de hauteur 3,20 m, il est composé de deux travées indépendantes de 49,7 m de portée. Le platelage est constitué d'une dalle en béton armé reposant sur des pièces de pont espacées de 2,26 m. La largeur fonctionnelle est de 3,00 m. Les travaux ont été réalisés en 2000 - 2001. La structure métallique a été mise en place à la grue, la masse de la charpente est de 18,8 t par travée.

L'analyse modale réalisée à l'aide d'un calcul analytique donne les résultats suivants :

- Mode 1                      Flexion verticale                      1,95 Hz

Cette fréquence a été calculée sans prendre en compte la masse des piétons.

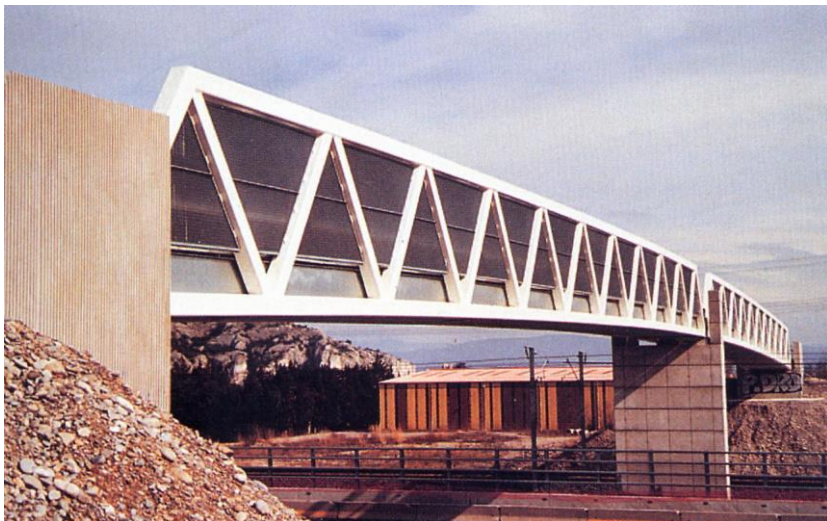


Photo A.4.1 - Passerelle de Cavillon / Cavillon footbridge

## APPENDIX 4: FOOTBRIDGE EXAMPLES

Some of the main kinds of footbridges built in recent years will now be presented, with examples. They include an opened bridge (side girders), a standard steel box-girder bridge with orthotropic deck, a ribbed slab bridge, a bowstring bridge with orthotropic deck, a deck suspended from a raking steel pylons, a steel lattice arch, a cable-stayed bridge, and a composite steel-concrete deck bridge. The main characteristics of each bridge and the construction method are given, together with details of the results of dynamic studies and, where applicable, test results.

### A.4.1. Warren-girder through bridge: Cavillon footbridge

The Cavillon footbridge is a through bridge with 3.20 m high Warren girders at the sides. It comprises two separate 49.7 m spans. The deck is a reinforced-concrete slab resting on cross-beams at 2.26 m centres. The functional width is 3.00 m. It was built in 2000-2001. The steel structure was craned into place. The steelwork of each span weighs 18.8 tonnes.

Modal analysis carried out by means of analytical calculation gave the following results:

Mode 1	Vertical bending	1.95 Hz
--------	------------------	---------

This frequency was calculated without taking account of the mass of pedestrians.

#### A.4.2. Poutre caisson métallique : Passerelle du Stade de France

L'ouvrage est un pont à poutre à appuis intermédiaires dédoublés d'une longueur totale de 180 m, avec une travée centrale de 64 m de portée, et des travées de rive de 54 et 50 m. La structure du tablier est constituée d'un caisson métallique à platelage orthotrope. La largeur fonctionnelle est de 11,00 m. Les travaux ont été réalisés en 1997 - 1998. La structure a été mise en place à la grue, la masse totale de la charpente est de 595,0 t.

L'analyse modale réalisée à l'aide d'un logiciel de calcul aux éléments finis donne les résultats suivants :

- |          |                                   |         |
|----------|-----------------------------------|---------|
| • Mode 1 | Flexion verticale travée centrale | 1,97 Hz |
| • Mode 2 | Flexion verticale travée de rive1 | 2,06 Hz |
| • Mode 3 | Flexion verticale travée de rive2 | 2,20 Hz |

L'étude dynamique donne les résultats suivants :

- |                           |               |                                   |
|---------------------------|---------------|-----------------------------------|
| • 1 piéton                | flèche 2,7 mm | accélération 0,4 m/s <sup>2</sup> |
| • 640 piétons 25 en phase | flèche 70 mm  | accélération 10 m/s <sup>2</sup>  |

L'étude dynamique avec amortisseur de 2,4 t de masse :

- |                           |               |                                 |
|---------------------------|---------------|---------------------------------|
| • 640 piétons 25 en phase | flèche 6,5 mm | accélération 1 m/s <sup>2</sup> |
|---------------------------|---------------|---------------------------------|



Photo A.4.2 - Passerelle du Stade de France / Stade de France footbridge

#### A.4.2. Steel box-girder bridge: Stade de France footbridge

The Stade de France footbridge rests on two intermediate piers. It is 180 m long, with a 64 m central span and end spans of 54 and 50 metres. The superstructure consists of a steel box girder with orthotropic deck. Its functional width is 11.00 m. It was built in 1997-1998. The structure was craned into place. The total mass of the structural steelwork is 595 tonnes.

Modal analysis carried out with a finite-element program gave the following results:

Mode 1	Vertical bending, central span	1,97 Hz
Mode 2	Vertical bending, end span 1	2,06 Hz
Mode 3	Vertical bending, end span 2	2,20 Hz

The dynamic study gave the following results:

1 pedestrian		deflection 2.7 mm	acceleration 0.4 m/s <sup>2</sup>
640 pedestrians	25 in phase	deflection 70 mm	acceleration 10 m/s <sup>2</sup>

The dynamic study with a damper with a mass of 2.4 tonnes gave:

640 pedestrians	25 in phase	deflection 6.5 mm	acceleration 1 m/s <sup>2</sup>
-----------------	-------------	-------------------	---------------------------------

### A.4.3. Dalle nervurée : Passerelle de Noisy-le-Grand

L'ouvrage est une dalle nervurée en béton précontraint de hauteur variable d'une longueur totale de 88 m, avec une travée centrale de 44 m de portée, et des travées de rive de 22 m. La hauteur de la dalle varie de 1 m à la clef à 3,05 m sur les piles. La largeur fonctionnelle est de 5 m. Les travaux ont été réalisés en 1993 - 1994. Les deux fléaux constituant la structure ont été construits perpendiculairement à leur position définitive et mis en place au-dessus de l'A4 par rotation, la masse totale du tablier est de 860,0 t.

L'analyse modale réalisée à l'aide d'un logiciel de calcul aux éléments finis donne les résultats suivants :

- |          |                       |         |
|----------|-----------------------|---------|
| • Mode 1 | Flexion verticale     | 1,65 Hz |
| • Mode 2 | Flexion axisymétrique | 3,48 Hz |
| • Mode 3 | Flexion latérale      | 4,86 Hz |



Photo A.4.3 - Passerelle de Noisy-le-Grand / Noisy le Grand footbridge



#### ***A.4.3. Ribbed slab bridge: Noisy le Grand footbridge***

*The Noisy le Grand footbridge is a variable-depth prestressed-concrete ribbed slab bridge. Its total length is 88 m, with a 44 m central span and end spans of 22 m. Deck slab/rib depth varies from 1 m mid-span to 3.05 m above the piers. Its functional width is 5 m. It was built in 1993-1994. The two cantilevers were built perpendicular to their final position and were rotated into position over the A4 motorway. The total mass of the superstructure is 860 tonnes.*

*Modal analysis carried out with a finite-element program gave the following results:*

<i>Mode 1</i>	<i>Vertical bending</i>	<i>1.65 Hz</i>
<i>Mode 2</i>	<i>Axisymmetrical bending</i>	<i>3.48 Hz</i>
<i>Mode 3</i>	<i>Lateral bending</i>	<i>4.86 Hz</i>

#### A.4.4. Arc Bow-string : Passerelle de Montigny-lès-Cormeilles

L'ouvrage est un bow-string à arc polygonal de 55 m de portée. La structure du tablier est constituée de deux tubes métalliques latéraux reliés par un platelage orthotrope. La largeur fonctionnelle est de 3,50 m. Les travaux ont été réalisés en 1998 - 1999. La structure a été mise en place à la grue, la masse totale de la charpente est de 85,0 t.

L'analyse modale réalisée à l'aide d'un logiciel de calcul aux éléments finis donne les résultats suivants, avec les tubes du tirant remplis de ciment, et la masse de l'ouvrage étant augmentée par la masse des piétons correspondant à  $a(l)$  :

- Mode 1                      Flexion verticale                      2,51 Hz
- Mode 2                      Flexion antisymétrique                2,52 Hz
- Mode 3                      Flexion latérale tablier                2,62 Hz

Remarque : sans les piétons les fréquences augmentent de 0,5 Hz.



Photo A.4.4 - Passerelle de Montigny-lès-Cormeilles / Montigny lès Cormeilles footbridge

#### **A.4.4. Bow-string bridge: Montigny lès Cormeilles footbridge**

*The Montigny lès Cormeilles footbridge is a polygonal-arch bowstring structure spanning 55 m. The deck structure consists of two outer steel tubes connected by orthotropic deck. Its functional width is 3.50 m. It was built in 1998-1999. The structure was craned into place. The total mass of the steelwork is 85 tonnes.*

*Modal analysis carried out with a finite-element program gave the following results, for the tubes of the tie filled with fine concrete and the mass of the bridge increased by the mass of pedestrians corresponding to the distributed load specified under French regulations (a(l)):*

<i>Mode 1</i>	<i>Vertical bending</i>	<i>2.51 Hz</i>
<i>Mode 2</i>	<i>Antisymmetrical bending</i>	<i>2.52 Hz</i>
<i>Mode 3</i>	<i>Lateral bending of deck</i>	<i>2.62 Hz</i>

*Observation: without pedestrians the frequencies increase by 0.5 Hz.*

#### A.4.5. Structure suspendue : Passerelle sur l'Aisne à Soissons

L'ouvrage est un pont suspendu de 60 m de portée. La structure du tablier est constituée d'un caisson métallique suspendu à un mât composé de quatre tubes inclinés se rejoignent à mi-portée. La largeur fonctionnelle est de 3,00 m. Les travaux ont été réalisés en 2000. La structure a été mise en place à la grue sur palées provisoires avant montage du mât, la masse totale de la charpente métallique est de 105,0 t.

L'analyse modale réalisée à l'aide d'un logiciel de calcul aux éléments finis donne les résultats suivants :

- Mode 1                      Flexion latérale tablier                      1,10 Hz
- Mode 2                      Flexion latérale des arcs                      2,80 Hz
- Mode 3                      Flexion verticale tablier                      3,10 Hz



Photo A.4.5 - Passerelle de Soissons / Soissons footbridge

#### ***A.4.5. Suspension bridge: Aisne River footbridge in Soissons***

*The Aisne River footbridge is a 60-metre suspension bridge. The deck structure comprises a steel box girder suspended from an arch made up of four inclined steel tubes meeting mid-span. Its functional width is 3.00 m. The bridge was built in 2000. The structure was craned onto temporary supports before erection of the supporting arch. The total mass of the structural steelwork is 105 tonnes.*

*Modal analysis carried out with a finite-element program gave the following results:*

<i>Mode 1</i>	<i>Lateral bending of deck</i>	<i>1.10 Hz</i>
<i>Mode 2</i>	<i>Lateral bending of arches</i>	<i>2.80 Hz</i>
<i>Mode 3</i>	<i>Vertical bending of deck</i>	<i>3.10 Hz</i>

#### A.4.6. Arc métallique : Passerelle Solférino

L'ouvrage est un arc métallique de 106 m de portée. La structure de l'arc est constituée de deux doubles arcs paraboliques en poutre échelle reliés par des traverses supportant un platelage inférieur. Le tablier supérieur dédoublé est supporté par des étriers et bracons s'appuyant sur les deux arcs. La largeur fonctionnelle est variable de 12 m à 14,80 m. Les travaux ont été réalisés en 1998 - 1999. La structure a été mise en place à la grue sur palées provisoires, la masse totale de la charpente est de 900,0 t.

L'analyse modale réalisée à l'aide d'un logiciel de calcul aux éléments finis donne les résultats suivants :

- Mode 1                      Balancement latéral                      0,71 Hz
- Mode 2                      Flexion verticale axisymétrique      1,03 Hz
- Mode 3                      Torsion-flexion                              1,37 Hz
- Mode 4                      Flexion verticale                              1,66 Hz
- Mode 5                      Torsion-balancement                      1,66 Hz

Les essais et mesures dynamiques donnent les fréquences à vide suivantes (sans amortisseur) :

- Mode 1                      Balancement latéral                      0,81 Hz
- Mode 2                      Flexion verticale axisymétrique      1,22 Hz
- Mode 3                      Torsion-flexion                              1,59 Hz
- Mode 4                      Flexion verticale                              1,69 Hz
- Mode 5                      Torsion centrale-balancement      1,94 Hz
- Mode 6                      Torsion centrale-balancement      2,22 Hz
- Mode 7                      Flexion-torsion                              3,09 Hz

Les amortissements pour la structure à vide varient de 0,3% à 0,5%.

Les essais et mesures dynamiques donnent les accélérations suivantes :

- 16 piétons balance mode 1                      accélération 0,5 m/s<sup>2</sup>
- 16 piétons marche mode 6                      accélération 2,0 m/s<sup>2</sup>
- 16 piétons course mode 7                      accélération 2,5 m/s<sup>2</sup>

Les amortissements avec 16 piétons sur la passerelle varient de 0,4% à 0,8%.

- 106 piétons balance mode 1                      accélération 1,5 m/s<sup>2</sup>
- 106 piétons course mode 7                      accélération 5,7 m/s<sup>2</sup>

Les amortissements avec plus de 100 piétons sur la passerelle varient de 0,7% à 1,6%.

#### A.4.6. Steel arch bridge: Solferino footbridge

The Solferino footbridge is a 106-m steel arch bridge. The structural arch consists of two twin parabolic arches (Vierendaal girders) connected by cross-members supporting lower decking. The top deck is supported by V-struts and cross-stirrups bearing on the twin arches. Its functional width ranges from 12 m to 14.80 m. It was built in 1998-1999. The bridge was craned onto temporary supports. The total mass of the structural steelwork is 900 tonnes.

Modal analysis carried out with a finite-element program gave the following results:

Mode 1	Lateral swing	0.71 Hz
Mode 2	Vertical axisymmetrical bending	1.03 Hz
Mode 3	Torsional bending	1.37 Hz
Mode 4	Vertical bending	1.66 Hz
Mode 5	Torsional swing	1.66 Hz

Tests and dynamic measurements gave the following no-load frequencies (no dampers):

Mode 1	Lateral swing	0.81 Hz
Mode 2	Vertical axisymmetrical bending	1.22 Hz
Mode 3	Torsional bending	1.59 Hz
Mode 4	Vertical bending	1.69 Hz
Mode 5	Central torsional swing	1.94 Hz
Mode 6	Central torsional swing	2.22 Hz
Mode 7	Flexural torsion	3.09 Hz

Damping for the unloaded structure varies from 0.3% to 0.5%.

Tests and dynamic measurements gave the following accelerations:

16 pedestrians, rocking, mode 1	acceleration 0.5 m/s <sup>2</sup>
16 pedestrians, walking, mode 6	acceleration 2.0 m/s <sup>2</sup>
16 pedestrians, running, mode 7	acceleration 2.5 m/s <sup>2</sup>

*Damping with 16 pedestrians on the bridge varies from 0.4% to 0.8%.*

*106 pedestrians, rocking, mode 1 acceleration 1.5 m/s<sup>2</sup>*

*106 pedestrians, running, mode 7 acceleration 5.7 m/s<sup>2</sup>*

*Damping with more than 100 pedestrians on the bridge varies from 0.7% to 1.6%.*

#### Amortisseurs

6 systèmes pendulaires supportant des masses de 2,5 t et 1,9 t permettent d'atteindre un amortissement de 3,9% vis-à-vis du mode 1 (balancement latéral).

8 systèmes masse/ressort supportant des masses de 2,5 t permettent d'atteindre un amortissement de 2,75% vis-à-vis des modes 5 et 6 (torsion centrale-balancement).



Photo A.4.6 - Passerelle Solferino / Solferino footbridge



### *Dampers*

*6 pendulum systems supporting masses of 2.5 and 1.9 tonnes to achieve damping of 3.9% for mode 1 (lateral swinging).*

*8 mass/spring systems supporting masses of 2.5 tonnes to achieve damping of 2.75% for modes 5 and 6 (central torsional swing).*

#### **A.4.7. Structure haubanée : Passerelle du Pas du lac à St Quentin**

L'ouvrage est un pont haubané dissymétrique d'une longueur totale de 188 m, avec d'un côté deux travées de 68 m et 36m de portée, et de l'autre côté deux travées de 42 m de portée chacune. La structure du tablier est constituée de deux poutres métalliques, suspendues à un pylône unique, reliées par des pièces de pont. La largeur fonctionnelle est de 2,50 m. Les travaux ont été réalisés en 1991 - 1992. La structure a été mise en place à la grue.

L'analyse modale réalisée à l'aide d'un logiciel de calcul aux éléments finis donne les résultats suivants :

- |          |                             |         |
|----------|-----------------------------|---------|
| • Mode 1 | Flexion latérale tablier    | 1,38 Hz |
| • Mode 2 | Déplacement-flexion tablier | 1,85 Hz |
| • Mode 3 | Flexion pylône              | 1,92 Hz |
| • Mode 4 | Flexion verticale tablier   | 1,95 Hz |



Photo A.4.7 - Passerelle du Pas du Lac / Pas du Lac footbridge

#### A.4.7. Cable-stayed bridge: Pas du Lac footbridge in St Quentin

The Pas du Lac footbridge is a 188-m-long dissymmetrical cable-stayed bridge with 68 m and 36 m spans on one side and two 42 m spans on the other. The deck structure consists of two steel beams suspended from a single pylon and connected by cross-beams. Its functional width is 2.50 m. The bridge was built in 1991-1992. The structure was craned into place.

Modal analysis carried out with a finite-element program gave the following results:

Mode 1	Lateral deck bending	1.38 Hz
Mode 2	Deck flexural displacement	1.85 Hz
Mode 3	Pylon bending	1.92 Hz
Mode 4	Vertical deck bending	1.95 Hz

#### A.4.8. Poutre en ossature mixte : Passerelle de Mont-Saint-Martin

L'ouvrage est un tablier en ossature mixte acier-béton de 23 m de portée. La structure du tablier est constituée de deux poutres métalliques légèrement cintrées reliées par des pièces de pont. La largeur fonctionnelle est de 2,50 m. Les travaux ont été réalisés en 1996. La structure a été mise en place à la grue, la masse de la charpente est de 22,0 t.

L'analyse modale réalisée à l'aide d'un calcul analytique donne les résultats suivants :

- |          |                     |         |
|----------|---------------------|---------|
| • Mode 1 | Flexion verticale   | 2,15 Hz |
| • Mode 2 | Flexion verticale   | 3,99 Hz |
| • Mode 3 | Balancement latéral | 4,50 Hz |

#### ***A.4.8. Composite steel-concrete deck bridge: Mont Saint Martin footbridge***

*The Mont Saint Martin footbridge is a 23-m composite steel-concrete deck bridge. The deck consists of two slightly arched steel beams connected by cross-beams. Its functional width is 2.50 m. It was built in 1996. It was craned into place. The mass of the structural steelwork is 22 tonnes.*

*Modal analysis carried out by means of analytical calculation gave the following results:*

<i>Mode 1</i>	<i>Vertical bending</i>	<i>2.15 Hz</i>
<i>Mode 2</i>	<i>Vertical bending</i>	<i>3.99 Hz</i>
<i>Mode 3</i>	<i>Lateral swing</i>	<i>4.50 Hz</i>

## ANNEXE 5 : EXEMPLES DE CALCUL DE PASSERELLES

Cette partie présente l'étude complète de deux passerelles courantes à partir d'exemples réels, ainsi qu'une étude de sensibilité des fréquences propres de passerelles types.

Les deux exemples complets de calcul dynamique sont réalisés selon la méthodologie du guide, en prenant en compte les différentes classes de trafic. Si les résultats conduisent à des accélérations inacceptables, les caractéristiques de ces structures ont été modifiées pour améliorer leur comportement dynamique et tenter de satisfaire aux conditions de confort.

### A.5.1. Exemples de calculs complets de passerelles

#### A.5.1.1. Passerelle à poutres latérales de type Warren

La première passerelle étudiée est une structure en ossature mixte acier-béton constituant une travée indépendante de 38,85 m de portée. Le profil en long est courbe avec un rayon de 450 mètres.

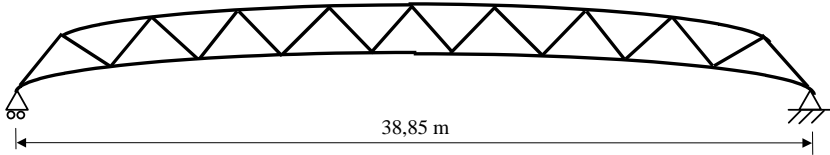


Figure A.5.1 : Passerelle à poutres latérales de type Warren

L'ossature est constituée de deux poutres latérales triangulées. Ces poutres de hauteur constante égale à 1,215 m sont reliées par des pièces de pont situées au niveau de la membrure inférieure. Sur ces pièces de pont repose une dalle en béton armé préfabriquée, d'une épaisseur variant de 10 cm.

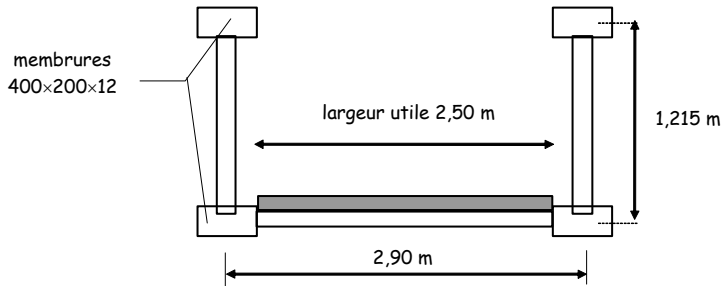


Figure A.5.2 : Section transversale de la passerelle à poutres latérales

## APPENDIX 5: EXAMPLES OF FOOTBRIDGE COMPUTATIONS

This section presents the complete design studies of two standard footbridges, based on actual examples, and a natural frequency sensitivity study for typical footbridges.

The two complete examples of dynamic design were carried out using the methodology of this guide and with different traffic classes. When the results indicated unacceptable acceleration, the characteristics of the structures were changed to improve their dynamic behaviour and attempt to meet the comfort criteria.

### A.5.1. Examples of full footbridge design

#### A.5.1.1. Opened bridge with Warren girders

The first footbridge studied is a composite steel-concrete structure with an independent span of 38.85 metres. The longitudinal profile is a curve with a radius of 450 metres.

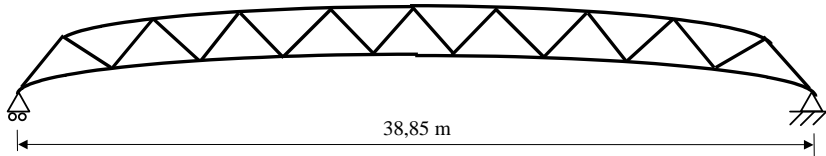


Figure A.5.1: Warren girder opened bridge

The structure consists of two trusses of a constant depth of 1.215 m connected by cross-beams at the level of the bottom chord. The cross-beams support a precast reinforced concrete slab whose thickness varies by 10 cm.

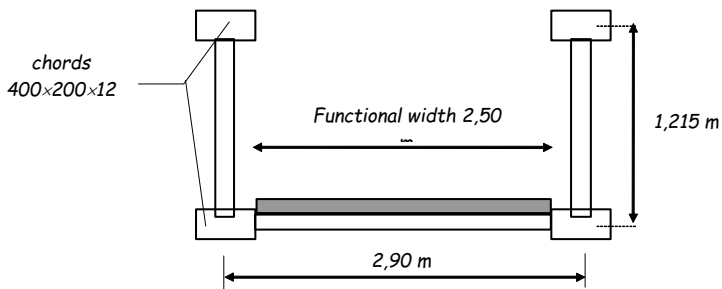


Figure A.5.2: Cross-section of pedestrian opened bridge

L'espacement transversal des poutres est de 2,90 m entre axe, le passage pour piéton a une largeur de 2,50 m.

#### Caractéristiques du tablier

Le moment d'inertie est calculé en tenant compte de la dalle en béton armé avec un coefficient d'homogénéisation égal à 6, et la masse du tablier est calculée en tenant compte des pièces de pont et de la dalle en béton armé.

Moment d'inertie du tablier :  $I = 0,0292 \text{ m}^4$

Masse propre linéique du tablier :  $m = 1456 \text{ kg/m}$

Module d'Young de l'acier :  $E = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$

#### A.5.1.1.1. Classe III



Nous considérons tout d'abord la classe III, c'est à dire une passerelle normalement utilisée, pouvant parfois être traversée par des groupes importants mais sans jamais être chargée sur toute sa surface.

- Calcul des modes propres

Les fréquences propres sont égales à :  $f_n = \frac{n^2 \pi}{2L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$

$\rho S$  est la masse linéique du tablier augmentée de la masse linéique des piétons qui est calculée pour chaque densité de foule en fonction de la classe de la passerelle .

Pour la classe III, nous nous intéressons à la foule peu dense, la densité  $d$  de la foule est égale à 0,5 piéton/m<sup>2</sup>.

Le nombre de piétons sur la passerelle est :  $N_p = 0,5 \times 38,85 \times 2,5 = 48,6$

La masse totale des piétons est :  $70 \times 48,6 = 3402 \text{ kg}$

La masse linéique des piétons est :  $m_p = 3402 / 38,85 = 87,6 \text{ kg/m}$

La masse linéique est de 1456 kg/m à vide et de 1630,8 kg/m pour 1 piéton au m<sup>2</sup>.

Pour la classe III la masse linéique est :  $\rho S = 1456 + 87,6 = 1543,6 \text{ kg/m}$

Pour le premier mode les fréquences hautes et basses sont égales à :

$$f_1 = \frac{(1)^2 \pi}{2(38,85)^2} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1456}} = 2,14 \text{ Hz}$$

$$\text{et } f_1 = \frac{(1)^2 \pi}{2(38,85)^2} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1630,8}} = 2,02 \text{ Hz}$$

*The beams are centred 2.90 m apart, leaving a functional width (pedestrian clearance) of 2.50 m.*

Deck

*The moment of inertia is calculated to take account of the reinforced concrete deck slab with a modular ratio of 6, and the mass of the deck calculated includes the cross-beams and the reinforced-concrete slab.*

Moment of inertia of deck:  $I = 0,0292 \text{ m}^4$

Deck selfweight per unit length:  $m = 1456 \text{ kg/m}$

Modulus of elasticity of steel:  $E = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$

A.5.1.1.1. Class III

Class III, i.e. a footbridge with normal use, which may sometimes be crossed by large groups of people, but which is never loaded over its entire surface area, was examined first.

- *Calculation of modes*

The frequencies are:  $f_n = \frac{n^2 \pi}{2L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$

$\rho S$  is the mass per unit length of the deck increased by the mass per unit length of pedestrians calculated for each crowd density in accordance with the footbridge class.

For class III, a low crowd density of  $d$  of 0.5 pedestrians/m<sup>2</sup> is considered.

The number of pedestrians on the bridge is:  $N_p = 0,5 \times 38,85 \times 2,5 = 48,6$

The total pedestrian mass is:  $70 \times 48,6 = 3402 \text{ kg}$

The pedestrian mass per unit length is:  $m_p = 3402 / 38,85 = 87,6 \text{ kg/m}$

The mass per unit length is 1456 kg/m without pedestrian and 1630,8 kg/m for one pedestrians/m<sup>2</sup>

For class III the total mass per unit length is:  $\rho S = 1456 + 87,6 = 1543,6 \text{ kg/m}$

For the first mode, the high and low frequencies are:

$$f_1 = \frac{(1)^2 \pi}{2(38,85)^2} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1456}} = 2,14 \text{ Hz}$$

$$\text{and } f_1 = \frac{(1)^2 \pi}{2(38,85)^2} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1630,8}} = 2,02 \text{ Hz}$$

Pour le deuxième mode les fréquences hautes et basses sont égales à :

$$f_2 = \frac{(2)^2 \pi}{2(38,85)^2} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1456}} = 8,54 \text{ Hz}$$

$$\text{et } f_2 = \frac{(2)^2 \pi}{2(38,85)^2} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1630,8}} = 8,08 \text{ Hz}$$

Seul le premier mode est susceptible d'engendrer des vibrations inconfortables.

- *Calcul de la charge dynamique des piétons*

Nous calculerons la charge pour le premier mode uniquement, avec une valeur du pourcentage d'amortissement critique de 0,6% (tablier mixte).

La charge surfacique à prendre en compte pour les modes verticaux est :

$$F_s = d \times (280 \text{ newtons}) \times \cos 2\pi f_v t \times 10,8 \times \sqrt{\frac{\xi}{N}} \times \psi$$

$\psi$  est égal à 1 car la fréquence du premier mode, qui est de 2,08 Hz, se trouve dans la plage 1 (1,7 à 2,1 Hz) avec un risque maximum de mise en résonance.

$$\text{On a } 10,8 \sqrt{\frac{\xi}{N}} = 10,8 \sqrt{\frac{0,6/100}{48,6}} = 0,120$$

La charge surfacique est égale à :

$$F_s = 0,5 \times 280 \times \cos(2\pi \times 2,08 \times t) \times 0,120 \times 1 = 16,8 \times \cos(2\pi \times 2,08 \times t) \text{ N/m}^2$$

La charge linéique est égale à :

$$F = F_s \times l_p = 16,8 \times 2,5 \times \cos(2\pi \times 2,08 \times t) = 42,0 \times \cos(2\pi \times 2,08 \times t) \text{ N/m}$$

Cette charge s'applique sur la totalité de la passerelle.

- Calcul des réponses dynamiques

Le calcul de l'accélération subie par la structure donne :

$$A_{cc\max} = \frac{1}{2 \times 0,6/100} \frac{4 \times 42,0}{\pi \times 1543,6} = 2,89 \text{ m/s}^2$$

L'accélération maxi calculée est située dans la plage 4 des accélérations, c'est à dire à un niveau de confort inacceptable (accélération > 2,5 m/s<sup>2</sup>).

#### A.5.1.1.2. Classe II

Nous considérons ensuite la classe II, c'est à dire une passerelle urbaine reliant des zones peuplées, soumise à un trafic important et pouvant être parfois chargée sur toute sa surface.

For the second mode, the high and low frequencies are:

$$f_2 = \frac{(2)^2 \pi}{2(38,85)^2} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1456}} = 8,54 \text{ Hz}$$

$$\text{and } f_2 = \frac{(2)^2 \pi}{2(38,85)^2} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1630,8}} = 8,08 \text{ Hz}$$

Only the first mode is likely to engender uncomfortable vibrations.

- Calculation of dynamic pedestrian load

The dynamic pedestrian load is calculated for the first mode only, with a damping ratio of 0.6% (composite deck).

The load per unit area taken into account for the vertical modes is:

$$F_s = d \times (280 \text{ newtons}) \times \cos 2\pi f_v t \times 10,8 \times \sqrt{\frac{\xi}{N}} \times \psi$$

$\psi$  is unity, for the frequency of the first mode (2.08 Hz) is in range 1 (1.7 to 2.1 Hz) with maximum risk of resonance.

$$\text{We get } 10,8 \sqrt{\frac{\xi}{N}} = 10,8 \sqrt{\frac{0,6/100}{48,6}} = 0,120$$

The load per unit area is:

$$F_s = 0,5 \times 280 \times \cos(2\pi \times 2,08 \times t) \times 0,120 \times 1 = 16,8 \times \cos(2\pi \times 2,08 \times t) \text{ N/m}^2$$

The load per unit length is:

$$F = F_s \times l_p = 16,8 \times 2,5 \times \cos(2\pi \times 2,08 \times t) = 42,0 \times \cos(2\pi \times 2,08 \times t) \text{ N/m}$$

This load is applied to the entire footbridge.

- Calculation of dynamic response

Calculation of the acceleration to which the structure is subject gives:

$$A_{cc\max} = \frac{1}{2 \times 0,6/100} \frac{4 \times 42,0}{\pi \times 1543,6} = 2,89 \text{ m/s}^2$$

The maximum acceleration calculated is in acceleration range 4, i.e. at an unacceptable comfort level (acceleration > 2.5 m/s<sup>2</sup>).

#### A.5.1.1.2. Class II

Class II—an urban footbridge connecting two inhabited areas subject to substantial traffic and sometimes loaded over its entire area—is examined next.

- Calcul des modes propres

Pour la classe II, nous nous intéressons à la foule dense, la densité  $d$  de la foule est égale à 0,8 piéton/m<sup>2</sup>.

Le nombre de piétons sur la passerelle est :  $N_p = 0,8 \times 38,85 \times 2,5 = 77,7 = 78$

La masse totale des piétons est :  $70 \times 78 = 5460 \text{ kg}$

La masse linéique des piétons est :  $m_p = 5460 / 38,85 = 140,5 \text{ kg/m}$

Pour la classe II la masse linéique est :  $\rho S = 1456 + 140,5 = 1596,5 \text{ kg/m}$

Pour le premier mode les fréquences hautes et basses sont égales à :

$$f_1 = \frac{(1)^2 \pi}{2(38,85)^2} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1456}} = 2,14 \text{ Hz}$$

$$\text{et } f_1 = \frac{(1)^2 \pi}{2(38,85)^2} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1630,8}} = 2,02 \text{ Hz}$$

Pour le deuxième mode les fréquences hautes et basses sont égales à :

$$f_2 = \frac{(2)^2 \pi}{2(38,85)^2} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1456}} = 8,54 \text{ Hz}$$

$$\text{et } f_2 = \frac{(2)^2 \pi}{2(38,85)^2} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1630,8}} = 8,08 \text{ Hz}$$

Seul le premier mode est susceptible d'engendrer des vibrations inconfortables.

- Calcul de la charge dynamique des piétons

Avec 0,6% d'amortissement critique, comme dans le cas précédent, on a :

$$10,8 \sqrt{\frac{\xi}{N}} = 10,8 \sqrt{\frac{0,6/100}{78}} = 0,10$$

La charge surfacique est égale à :

$$F_s = 0,8 \times 280 \times \cos(2\pi \times 2,04 \times t) \times 0,10 \times 1 = 22,24 \times \cos(2\pi \times 2,04 \times t) \quad \text{N/m}^2$$

La charge linéique est égale à :

$$F = F_s \times l_p = 22,24 \times 2,5 \times \cos(2\pi \times 2,04 \times t) = 56 \times \cos(2\pi \times 2,04 \times t) \quad \text{N/m}$$

- Calcul des réponses dynamiques

$$A_{ccmax} = \frac{1}{2 \times 0,6/100} \frac{4 \times 56}{\pi \times 1596,5} = 3,72 \text{ m/s}^2$$

L'accélération maxi calculée est située dans la plage 4 des accélérations, c'est à dire à un niveau de confort inacceptable (accélération > 2,5 m/s<sup>2</sup>).

- Calculation of modes

For class II, a high crowd density  $d$  of 0.8 pedestrians/m<sup>2</sup> is considered.

The number of pedestrians on the bridge is:  $N_p = 0,8 \times 38,85 \times 2,5 = 77,7 = 78$

The total pedestrian mass is:  $70 \times 78 = 5460 \text{ kg}$

The pedestrian mass per unit length is:  $m_p = 5460 / 38,85 = 140.5 \text{ kg/m}$

For class II the total mass per unit length is:  $\rho S = 1456 + 140.5 = 1596.5 \text{ kg/m}$

For the first mode, the high and low frequencies are:

$$f_1 = \frac{(1)^2 \pi}{2(38,85)^2} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1456}} = 2,14 \text{ Hz}$$

$$\text{and } f_1 = \frac{(1)^2 \pi}{2(38,85)^2} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1630,8}} = 2,02 \text{ Hz}$$

For the second mode, the high and low frequencies are:

$$f_2 = \frac{(2)^2 \pi}{2(38,85)^2} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1456}} = 8,54 \text{ Hz}$$

$$\text{and } f_2 = \frac{(2)^2 \pi}{2(38,85)^2} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1630,8}} = 8,08 \text{ Hz}$$

Only the first mode is likely to engender uncomfortable vibrations.

- Calculation of dynamic pedestrian load

With a damping ratio of 0.6%, as in the previous case, we have:

$$10,8 \sqrt{\frac{\xi}{N}} = 10,8 \sqrt{\frac{0,6/100}{78}} = 0,10$$

The load per unit area is:

$$F_s = 0,8 \times 280 \times \cos(2\pi \times 2,04 \times t) \times 0,10 \times 1 = 22,24 \times \cos(2\pi \times 2,04 \times t) \quad \text{N/m}^2$$

The load per unit length is:

$$F = F_s \times l_p = 22,24 \times 2,5 \times \cos(2\pi \times 2,04 \times t) = 56 \times \cos(2\pi \times 2,04 \times t) \quad \text{N/m}$$

- Calculation of dynamic response

$$A_{cc\max} = \frac{1}{2 \times 0,6/100} \frac{4 \times 56}{\pi \times 1596,5} = 3,72 \text{ m/s}^2$$

The maximum acceleration calculated is in acceleration range 4, i.e. at an unacceptable comfort level (acceleration > 2.5 m/s<sup>2</sup>).

#### A.5.1.1.3. Classe I

Nous considérons enfin la classe I, c'est à dire une passerelle urbaine reliant des zones à forte concentration piétonnière (présence d'une gare, par exemple) ou fréquemment empruntée par des foules denses (manifestations, touristes ...), soumise à un trafic très important.

- Calcul des modes propres

Pour la classe I, nous nous intéressons à la foule très dense, la densité  $d$  de la foule est égale à 1,0 piéton/m<sup>2</sup>.

Le nombre de piétons sur la passerelle est :  $N_p = 1 \times 38,85 \times 2,5 = 97$

La masse totale des piétons est :  $70 \times 97 = 6790 \text{ kg}$

La masse linéique des piétons est :  $m_p = 6790 / 38,85 = 174,8 \text{ kg/m}$

Pour la classe I la masse linéique est :  $\rho S = 1456 + 174,8 = 1630,8 \text{ kg/ m}$

Pour le premier mode les fréquences hautes et basses sont égales à :

$$f_1 = \frac{(1)^2 \pi}{2(38,85)^2} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1456}} = 2,14 \text{ Hz}$$

$$\text{et } f_1 = \frac{(1)^2 \pi}{2(38,85)^2} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1630,8}} = 2,02 \text{ Hz}$$

Pour le deuxième mode les fréquences hautes et basses sont égales à :

$$f_2 = \frac{(2)^2 \pi}{2(38,85)^2} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1456}} = 8,54 \text{ Hz}$$

$$\text{et } f_2 = \frac{(2)^2 \pi}{2(38,85)^2} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1630,8}} = 8,08 \text{ Hz}$$

Seul le premier mode est susceptible d'engendrer des vibrations inconfortables.

- Calcul de la charge dynamique des piétons

Nous calculerons la charge pour le premier mode uniquement, avec 0,6% d'amortissement critique (tablier mixte).

La charge surfacique à prendre en compte pour les modes verticaux est :

$$F_s = d \times (280 \text{ newtons}) \times \cos 2\pi f_v t \times 1,85 \times \sqrt{\frac{1}{N}} \times \psi$$

$\psi$  est égal à 1 car la fréquence du premier mode, qui est de 2,02 Hz, se trouve dans la plage 1 (1,7 à 2,1 Hz) avec un risque maximum de mise en résonance.

### A.5.1.1.3. Class I

The last case examined is class I, i.e. an urban footbridge linking two areas with high concentrations of pedestrians (near a station, for example) or frequently used by dense crowds (protest marches, tourists, etc.) and subject to very substantial traffic.

- Calculation of modes

For class I, a very high crowd density  $d$  of 1.0 pedestrians/ $\text{m}^2$  is considered.

The number of pedestrians on the bridge is:  $N_p = 1 \times 38,85 \times 2,5 = 97$

The total pedestrian mass is:  $70 \times 97 = 6790 \text{ kg}$

The pedestrian mass per unit length is:  $m_p = 6790 / 38,85 = 174,8 \text{ kg/ m}$

For the class I, the total mass per unit length is:  $\rho S = 1456 + 174,8 = 1630,8 \text{ kg/m}$

For the first mode, the high and low frequencies are:

$$f_1 = \frac{(1)^2 \pi}{2(38,85)^2} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1456}} = 2,14 \text{ Hz}$$

$$\text{and } f_1 = \frac{(1)^2 \pi}{2(38,85)^2} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1630,8}} = 2,02 \text{ Hz}$$

For the second mode, the high and low frequencies are:

$$f_2 = \frac{(2)^2 \pi}{2(38,85)^2} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1456}} = 8,54 \text{ Hz}$$

$$\text{and } f_2 = \frac{(2)^2 \pi}{2(38,85)^2} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1630,8}} = 8,08 \text{ Hz}$$

Only the first mode is likely to engender uncomfortable vibrations.

- Calculation of dynamic pedestrian load

The dynamic pedestrian load is calculated for the first mode only, with a damping ratio of 0.6% (composite deck).

The load per unit area taken into account for the vertical modes is:

$$F_s = d \times (280 \text{ newtons}) \times \cos 2\pi f_1 t \times 1,85 \times \sqrt{\frac{1}{N}} \times \psi$$

$\psi$  is unity, for the frequency of the first mode (2.02 Hz) is in range 1 (1.7 to 2.1 Hz) with maximum risk of resonance.

La charge surfacique vaut :

$$F_s = 1,0 \times 280 \times \cos(2\pi \times 2,02 \times t) \times 1,85 \sqrt{\frac{1}{97}} \times 1 = 52,60 \times \cos(2\pi \times 2,02 \times t) \text{ N/m}^2$$

La charge linéique est égale à :

$$F = F_s \times l_p = 52,60 \times 2,5 \times \cos(2\pi \times 2,02 \times t) = 131,5 \times \cos(2\pi \times 2,02 \times t) \text{ N/m}$$

- Calcul des réponses dynamiques

$$\text{On a : } A_{cc\max} = \frac{1}{2 \times 0,6/100} \frac{4 \times 131,5}{\pi \times 1630,8} = 8,55 \text{ m/s}^2$$



L'accélération maxi calculée est située dans la plage 4 des accélérations, c'est à dire à un niveau de confort inacceptable (accélération > 2,5 m/s<sup>2</sup>).

**A.5.1.1.4. Récapitulatif**

On s'aperçoit que les accélérations sont toujours supérieures à 2,5 m/s<sup>2</sup>, quelle que soit la classe choisie. Il est à signaler que l'on se situe dans cet exemple dans un cas particulièrement défavorable puisque la première fréquence propre est au milieu de la plage à risque maximal.

Afin de réduire les accélérations obtenues, il faut augmenter la raideur de la structure. Pour cela on peut augmenter la hauteur des poutres latérales triangulées (par exemple de 20 cm) et augmenter l'épaisseur de la tôle des membrures (par exemple 14 mm).

Nous choisissons à la fois d'épaissir la tôle des membrures et d'augmenter la hauteur des poutres, puis nous recalculons les fréquences, les charges dynamiques et les réponses correspondantes.

**A.5.1.1.5. Raidissement de la structure**

La tôle des membrures est passée de 12 à 14 mm. La hauteur entre axe des membrures est passée de 1,215 m à 1,415m.

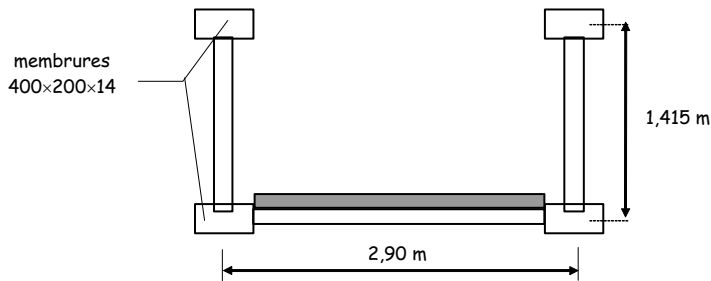


Figure A.5.3 : Section transversale de la passerelle avec membrures en tôles de 14mm et hauteur de 1,415m

The load per unit area is:

$$F_s = 1,0 \times 280 \times \cos(2\pi \times 2,02 \times t) \times 1,85 \sqrt{\frac{1}{97}} \times 1 = 52,60 \times \cos(2\pi \times 2,02 \times t) \text{ N/m}^2$$

The load per unit length is:

$$F = F_s \times l_p = 52,60 \times 2,5 \times \cos(2\pi \times 2,02 \times t) = 131,5 \times \cos(2\pi \times 2,02 \times t) \text{ N/m}$$

- Calculation of dynamic response

We have:  $A_{ccmax} = \frac{1}{2 \times 0,6 / 100} \frac{4 \times 131,5}{\pi \times 1630,8} = 8,55 \text{ m/s}^2$

The maximum acceleration calculated is in acceleration range 4, i.e. at an unacceptable comfort level (acceleration > 2.5 m/s<sup>2</sup>).

#### A.5.1.1.4. Summary

It is seen that the accelerations are always higher than 2.5 m/s<sup>2</sup> irrespective of the bridge class chosen. It should be noted that this example is a particularly unfavourable case since the first natural frequency is in the middle of the range of maximum risk.

To reduce the accelerations obtained, the structure must be stiffened. To achieve this, the depth of the trusses can be increased (by 20 cm for example) or the chord sections can be thickened (by 14 mm for example).

We chose to both thicken the chord sections and increase the truss depth, then recalculated the frequencies, dynamic loads, and the corresponding responses.

#### A.5.1.1.5. Structural stiffening

The steel of the chords is thickened from 12 to 14 mm. The depth between chord centres is increased from 1.215 to 1.415 metres.

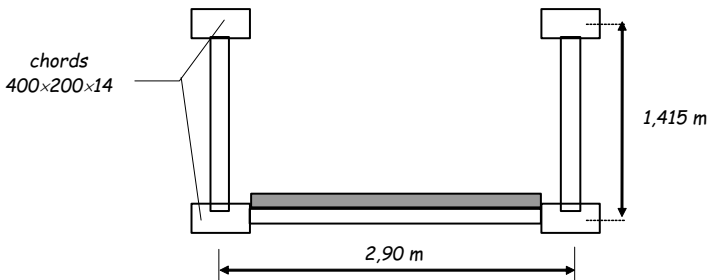


Figure A.5.3: Cross-section of footbridge with 14 mm thick chords and 1.415 m deep trusses

#### Caractéristiques du tablier

Le moment d'inertie du tablier est modifié et vaut :  $I = 0,045 \text{ m}^4$

La masse propre du tablier est légèrement augmentée, mais cela n'est pas significatif.

Les fréquences hautes et basses des premiers modes sont modifiées de la façon suivante :

Classe III : 2,64 et 2,50 Hz

Classe II : 2,64 et 2,50 Hz

Classe I : 2,64 et 2,50 Hz

Les fréquences extrêmes pour la classe III ne conduisent à aucun calcul, puisque ces fréquences sont en dehors de la plage 1,7 Hz - 2,1 Hz.

Pour les classes I et II, des calculs sont nécessaires, mais avec un coefficient  $\psi = 0,21$  pour la classe I et  $\psi = 0,16$  pour la classe II.

Ceci conduit aux accélérations suivantes :

$A_{cc} = 0,55 \text{ m/s}^2$  pour la classe II, ce qui est compatible avec un niveau de confort moyen, et presque maximal ( $0,50 \text{ m/s}^2$ )

$A_{cc} = 1,78 \text{ m/s}^2$  pour la classe I, ce qui est compatible avec un niveau de confort minimal ( $1 - 2,5 \text{ m/s}^2$ )

Pour rendre cette passerelle encore plus confortable, on pourrait par exemple augmenter l'épaisseur de la tôle à 16mm de sorte que les fréquences propres soient supérieures à 2,6 Hz. Le coefficient  $\psi$  est alors nul. Il faut dans ce cas prendre en compte la seconde harmonique des piétons, mais si on reste aux alentours de 2,6 Hz, cela ne devrait pas poser de problèmes.

#### A.5.1.2. Passerelle en caisson

La deuxième passerelle étudiée est un caisson métallique à deux travées de 40m chacune, avec platelage en béton.

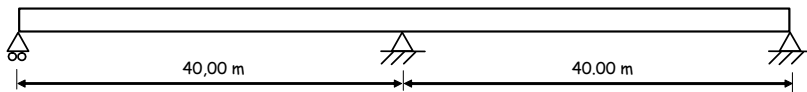


Figure A.5.4 : Passerelle en caisson métallique

L'ossature est constituée d'un caisson métallique de hauteur constante égale à 1 mètre. Sur ce caisson repose une dalle en béton armé préfabriquée, d'une épaisseur de 10 cm.

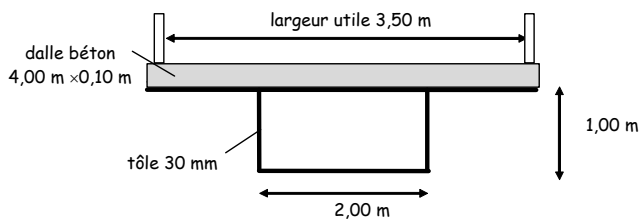


Figure A.5.5 : Section transversale de la passerelle à caisson mixte

#### Deck

The moment of inertia of the deck becomes:  $I = 0.045 \text{ m}^4$

The selfweight of the deck increases slightly (insignificantly).

The high and low frequencies of the first modes become:

Classe III : 2,64 et 2,50 Hz

Classe II : 2,64 et 2,50 Hz

Classe I : 2,64 et 2,50 Hz

Extreme frequencies for class III involves no further calculation since it beyond the range 1.7 Hz - 2.1 Hz.

For classes I and II, more calculations are necessary, but with a coefficient  $\psi = 0.21$  for class I and  $\psi = 0.16$  for class II.

This results in the following accelerations:

$A_{cc} = 0.55 \text{ m/s}^2$  for class II, which is compatible with an average level of comfort, and almost with the maximum comfort level ( $0.50 \text{ m/s}^2$ ).

$A_{cc} = 1.78 \text{ m/s}^2$  for class I, which is compatible with a minimum level of comfort ( $1 - 2.5 \text{ m/s}^2$ )

To make this footbridge even more comfortable, the chords of its trusses could be thickened to 16 mm so as to make its frequencies higher than 2.6 Hz. The coefficient  $\psi$  would then be zero. In this case the second harmonic of the pedestrians would have to be taken into account, but if it remains close to 2.6 Hz there should be no problem.

#### A.5.1.2. Box-girder footbridge

The second bridge studied is a steel box-girder bridge with two 40 m spans and concrete decking.

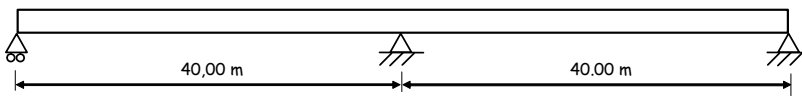


Figure A.5.4: Steel box-girder footbridge

The structural member is a 1-m-deep steel box girder. It supports a 10-cm-thick precast reinforced-concrete deck slab.

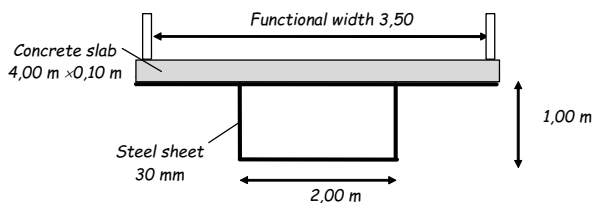


Figure A.5.5: Cross-section of composite box-girder bridge

La largeur de la dalle est de 4,00 m et le passage pour piéton a une largeur de 3,50 m.

#### Caractéristiques du tablier

La masse du tablier est calculée en tenant compte de la dalle en béton armé et de la masse des garde-corps. Le moment d'inertie est calculé en tenant compte de la dalle en béton avec un coefficient d'homogénéisation égal à 6.

Moment d'inertie du tablier :  $I = 0,057 \text{ m}^4$

Masse propre linéique du tablier :  $m = 3055 \text{ kg/m}$

Module d'Young de l'acier :  $E = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$

#### A.5.1.2.1. Classe III

Nous considérons tout d'abord la classe III, c'est à dire une passerelle normalement utilisée, pouvant parfois être traversée par des groupes importants mais sans jamais être chargée sur toute sa surface.

- Calcul des modes propres

Les modes propres du tablier ont été calculés à l'aide du programme Sysus.

$\rho S$  est la masse linéique totale, c'est à dire la masse linéique du tablier (y compris la dalle) augmentée de la masse linéique des piétons qui est calculée pour chaque densité de foule en fonction de la classe de la passerelle.

Pour la classe III, nous nous intéressons à la foule peu dense, la densité  $d$  de la foule est égale à  $0,5 \text{ piéton/m}^2$ .

Le nombre de piétons sur les deux travées est :  $N_p = 0,5 \times (2 \times 40) \times 3,5 = 140$

La masse totale des piétons est :  $70 \times 140 = 9800 \text{ kg}$

La masse linéique des piétons est :  $m_p = 9800 / 80 = 122,5 \text{ kg/m}$

Pour la classe III, la masse linéique totale est :  $\rho S = 3055 + 122,5 = 3177,5 \text{ kg/m}$

Pour le premier mode les fréquences hautes et basses sont égales à :

$$f_1 = 1,94 \text{ Hz à vide et } f_1 = 1,86 \text{ Hz pour 1 piéton par m}^2$$

Pour le deuxième mode les fréquences hautes et basses sont égales à :

$$f_2 = 3,04 \text{ Hz à vide et } f_2 = 2,92 \text{ Hz pour 1 piéton par m}^2$$

- Calcul de la charge dynamique des piétons

Nous calculons la charge pour le premier mode d'abord, et un pourcentage d'amortissement critique de  $0,6\%$  (tablier mixte).

La charge surfacique à prendre en compte pour les modes verticaux est :

$$F_s = d \times (280 \text{ newtons}) \times \cos 2\pi f_v t \times 10,8 \times \sqrt{\frac{\xi}{N}} \times \psi$$

*The slab is 4 m wide and the pedestrian clearance (functional width) 3.5 m.*

#### Deck

*The mass of the deck is calculated to take account of the reinforced concrete deck slab and the mass of the safety railing. The moment of inertia is calculated with a modular ratio of 6.*

Moment of inertia of deck:  $I = 0.057 \text{ m}^4$

Deck selfweight per unit length:  $m = 3055 \text{ kg/m}$

Modulus of elasticity of steel:  $E = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$

#### A.5.1.2.1. Class III

Class III, i.e. a footbridge with normal use, which may sometimes be crossed by large groups of people, but which is never loaded over its entire surface area, was examined first.

- *Calculation of modes*

The modes of the deck were calculated with the Systus program.

$\rho S$  is the total mass per unit length, i.e. the mass per unit length of the deck (including slab) plus the pedestrian mass per unit length calculated for each crowd density in accordance with the footbridge class.

For class III, a light crowd density  $d$  of  $0.5 \text{ pedestrians/m}^2$  is considered.

The number of pedestrians on the two spans is:  $N_p = 0,5 \times (2 \times 40) \times 3,5 = 140$

The total pedestrian mass is:  $70 \times 140 = 9800 \text{ kg}$

The pedestrian mass per unit length is:  $m_p = 9800 / 80 = 122.5 \text{ kg/m}$

For the class III, the total mass per unit length is:  $\rho S = 3055 + 122.5 = 3177.5 \text{ kg/m}$

For the first mode, the high and low frequencies are:

$f_1 = 1,94 \text{ Hz}$  without pedestrians and  $f_1 = 1,86 \text{ Hz}$  for  $1 \text{ pedestrians/m}^2$

For the second mode, the high and low frequencies are:

$f_2 = 3,04 \text{ Hz}$  without pedestrians and  $f_2 = 2,92 \text{ Hz}$  for  $1 \text{ pedestrians/m}^2$

- *Calculation of dynamic pedestrian load*

The load for the first mode is calculated first, with a damping ratio of  $0.6\%$  (composite deck).

The load per unit area taken into account for the vertical modes is:

$$F_s = d \times (280 \text{ newtons}) \times \cos 2\pi f_v t \times 10,8 \times \sqrt{\frac{\xi}{N}} \times \psi$$

$\psi$  est égal à 1 car la fréquence du premier mode, qui est de  $1,90 \text{ Hz}$ , se trouve dans la plage 1 des fréquences ( $1,7$  à  $2,1 \text{ Hz}$ ).

$$\text{On a : } 10,8 \sqrt{\frac{\xi}{N}} = 10,8 \sqrt{\frac{0,6/100}{140}} = 0,071$$

La charge surfacique est égale à :

$$F_s = 0,5 \times 280 \times \cos(2\pi \times 1,90 \times t) \times 0,071 \times 1 = 9,94 \times \cos(2\pi \times 1,90 \times t) \text{ N/m}^2$$

La charge linéique est égale à :

$$F = F_s \times I_p = 9,94 \times 3,5 \times \cos(2\pi \times 1,90 \times t) = 34,79 \times \cos(2\pi \times 1,90 \times t) \text{ N/m}$$

- Calcul des réponses dynamiques

L'accélération sous la charge verticale est égale à :

$$A_{ccmax} = \frac{1}{2\xi} \frac{4 \times F}{\rho S \pi} = \frac{1}{2 \times 0,6/100} \frac{4 \times 34,79}{3177,5 \times \pi} = 1,16 \text{ m/s}^2$$

L'accélération maxi calculée est située dans la plage 3 des accélérations, c'est à dire au niveau de confort minimum (accélération comprise entre 1 et 2,5 m/s<sup>2</sup>). Cependant, le niveau de confort moyen est presque atteint.

Pour le second mode, la fréquence de 2,96 Hz n'impose pas de vérifications particulières.

#### A.5.1.2.2. Classe II

Nous considérons ensuite la classe II.

- Calcul des modes propres

Pour la classe II, nous nous intéressons à la foule dense, la densité d de la foule est égale à 0,8 piéton/m<sup>2</sup>.

Le nombre de piétons sur la passerelle est :  $N_p = 0,8 \times (2 \times 40) \times 3,5 = 224$

La masse totale des piétons est :  $70 \times 224 = 15680 \text{ kg}$

La masse linéique des piétons est :  $m_p = 15680 / 80 = 196 \text{ kg/m}$

Pour la classe II, la masse linéique totale est :  $\rho S = 3055 + 196 = 3251 \text{ kg/m}$

Pour le premier mode les fréquences hautes et basses sont égales à :

$$f_1 = 1,94 \text{ Hz à vide et } f_1 = 1,86 \text{ Hz pour 1 piéton par m}^2$$

Pour le deuxième mode les fréquences hautes et basses sont égales à :

$$f_2 = 3,04 \text{ Hz à vide et } f_2 = 2,92 \text{ Hz pour 1 piéton par m}^2$$

- Calcul de la charge dynamique des piétons

Nous calculons la charge pour le premier mode d'abord, et un pourcentage d'amortissement critique de 0,6% (tablier mixte).

$\psi$  is unity, for the frequency of the first mode (1.90 Hz) is in range 1 (1.7 to 2.1 Hz).

$$\text{We get: } 10,8 \sqrt{\frac{\xi}{N}} = 10,8 \sqrt{\frac{0,6/100}{140}} = 0,071$$

The load per unit area is:

$$F_s = 0,5 \times 280 \times \cos(2\pi \times 1,90 \times t) \times 0,071 \times 1 = 9,94 \times \cos(2\pi \times 1,90 \times t) \text{ N/m}^2$$

The load per unit length is:

$$F = F_s \times l_p = 9.94 \times 3.5 \times \cos(2\pi \times 1.90 \times t) = 34.79 \times \cos(2\pi \times 1.90 \times t) \text{ N/m}$$

- Calculation of dynamic response

The acceleration under vertical loading is:

$$A_{ccmax} = \frac{1}{2\xi} \frac{4 \times F}{\rho S \pi} = \frac{1}{2 \times 0.6 / 100} \frac{4 \times 34.79}{3177.5 \times \pi} = 1.16 \text{ m/s}^2$$

The maximum acceleration calculated is in acceleration range 3, i.e. at the minimum comfort level (acceleration between 1 and 2.5 m/s<sup>2</sup>). The medium comfort level is nearly attained, however.

For the second mode, the frequency of 2.96 Hz requires no further verification.

#### A.5.1.2.2. Class II

Class II is examined next.

- Calculation of modes

For class II, a high crowd density  $d$  of 0.8 pedestrians/m<sup>2</sup> is considered.

The number of pedestrians on the bridge is:  $N_p = 0,8 \times (2 \times 40) \times 3,5 = 224$

The total pedestrian mass is:  $70 \times 224 = 15680 \text{ kg}$

The pedestrian mass per unit length is:  $m_p = 15680 / 80 = 196 \text{ kg/m}$

For the class II, the total mass per unit length:  $\rho S = 3055 + 196 = 3251 \text{ kg/m}$

For the first mode, the high and low frequencies are:

$$f_1 = 1,94 \text{ Hz without pedestrians and } f_1 = 1,86 \text{ Hz for 1 pedestrians/m}^2$$

For the second mode, the high and low frequencies are:

$$f_2 = 3,04 \text{ Hz without pedestrians and } f_2 = 2,92 \text{ Hz for 1 pedestrians/m}^2$$

- Calculation of dynamic pedestrian load

The load for the first mode is calculated first, with a damping ratio of 0.6% (composite deck).

La charge surfacique à prendre en compte pour les modes verticaux est :

$$F_s = d \times (280 \text{ newtons}) \times \cos 2\pi f_v t \times 10,8 \times \sqrt{\frac{\xi}{N}} \times \psi$$

$\psi$  est égal à 1 car la fréquence du premier mode, qui est de 1,879 Hz, se trouve dans la plage 1 des fréquences (1,7 à 2,1 Hz).



$$\text{On a : } 10,8 \sqrt{\frac{\xi}{N}} = 10,8 \sqrt{\frac{0,6/100}{224}} = 0,056$$

La charge surfacique est égale à :

$$F_s = 0,8 \times 280 \times \cos(2\pi \times 1,879 \times t) \times 0,056 \times 1,0 = 12,54 \times \cos 2\pi \times 1,879 \times t) \text{ N/m}^2$$

La charge linéique est égale à :

$$F = F_s \times l_p = 12,54 \times 3,5 \times \cos(2\pi \times 1,879 \times t) = 43,89 \times \cos(2\pi \times 1,879 \times t) \text{ N/m}$$

- Calcul des réponses dynamiques

L'accélération sous la charge verticale est égale à :

$$A_{ccmax} = \frac{1}{2\xi} \frac{4 \times F}{\rho S \pi} = \frac{1}{2 \times 0,6/100} \frac{4 \times 43,89}{3251 \times \pi} = 1,43 \text{ m/s}^2$$

L'accélération maxi calculée est située dans la plage 3 des accélérations, c'est à dire à un niveau de confort moyen (entre 1 et 2,5 m/s<sup>2</sup>).

Pour le second mode, la fréquence de 2,92 Hz nous impose de prendre en compte la seconde harmonique. Mais avec une force divisée par 4 par rapport à la première harmonique, et compte-tenu du résultat en accélération ci-dessus, le confort est obtenu est maximal.

#### A.5.1.2.3. Classe I

Nous considérons enfin la classe I.

- Calcul des modes propres

Les modes propres du tablier ont été calculés à l'aide du programme Systus.

Pour la classe I, nous nous intéressons à la foule très dense, la densité d de la foule est égale à 1,0 piéton/m<sup>2</sup>.

$$\text{Le nombre de piétons sur la passerelle est : } N_p = 1 \times (2 \times 40) \times 3,5 = 280$$

$$\text{La masse totale des piétons est : } 70 \times 280 = 19600 \text{ kg}$$

$$\text{La masse linéique des piétons est : } m_p = 19600 / 80 = 245 \text{ kg/m}$$

$$\text{Pour la classe I, la masse linéique totale est : } \rho S = 3055 + 245 = 3300 \text{ kg/m}$$

Pour le premier mode les fréquences hautes et basses sont égales à :

$$f_1 = 1,94 \text{ Hz à vide et } f_1 = 1,86 \text{ Hz pour 1 piéton par m}^2$$

The load per unit area taken into account for the vertical modes is:

$$F_s = d \times (280 \text{ newtons}) \times \cos 2\pi f_1 t \times 10,8 \times \sqrt{\frac{\xi}{N}} \times \psi$$

$\psi$  is unity, for the frequency of the first mode (1.879 Hz) is in range 1 (1.7 to 2.1 Hz).

We get  $10,8 \sqrt{\frac{100}{N}} = 10,8 \sqrt{\frac{0,6/100}{224}} = 0,056$

The load per unit area is:

$$F_s = 0,8 \times 280 \times \cos(2\pi \times 1,879 \times t) \times 0,056 \times 1,0 = 12,54 \times \cos 2\pi \times 1,879 \times t) \text{ N/m}^2$$

The load per unit length is:

$$F = F_s \times l_p = 12,54 \times 3,5 \times \cos(2\pi \times 1,879 \times t) = 43,89 \times \cos(2\pi \times 1,879 \times t) \text{ N/m}$$

- Calculation of dynamic response

The acceleration under vertical loading is:

$$A_{ccmax} = \frac{1}{2\xi} \frac{4 \times F}{\rho S \pi} = \frac{1}{2 \times 0,6 / 100} \frac{4 \times 43,89}{3251 \times \pi} = 1,43 \text{ m/s}^2$$

The maximum acceleration calculated is in acceleration range 3, i.e. at a medium level of comfort (between 1 and 2.5 m/s<sup>2</sup>).

For the second mode, the frequency of 2.92 Hz requires that the second harmonic be taken into account. But with a force four times less than the first harmonic, and given the acceleration result above, the maximum comfort level is attained.

#### A.5.1.2.3. Class I

Class I is examined last.

- Calculation of modes

The modes of the deck were calculated with the Systus program.

For class I, a very high crowd density  $d$  of 1.0 pedestrian/m<sup>2</sup> is considered.

The number of pedestrians on the bridge is:  $N_p = 1 \times (2 \times 40) \times 3,5 = 280$

The total pedestrian mass is:  $70 \times 280 = 19600 \text{ kg}$

The pedestrian mass per unit length is:  $m_p = 19600 / 80 = 245 \text{ kg/m}$

For the class I, the total mass per unit length is:  $\rho S = 3055 + 245 = 3300 \text{ kg/m}$

For the first mode, the high and low frequencies are:

$$f_1 = 1,94 \text{ Hz without pedestrians and } f_1 = 1,86 \text{ Hz for 1 pedestrian/m}^2$$

Pour le deuxième mode les fréquences hautes et basses sont égales à :

$$f_2 = 3,04 \text{ Hz à vide et } f_2 = 2,92 \text{ Hz pour 1 piéton par m}^2$$

- Calcul de la charge dynamique des piétons

Nous calculons la charge pour le premier mode d'abord, et un pourcentage d'amortissement critique de 0,6% (tablier mixte).

La charge surfacique à prendre en compte pour les modes verticaux est :

$$F_s = d \times (280 \text{ newtons}) \times \cos 2\pi f_v t \times 1,85 \times \sqrt{\frac{1}{N}} \times \psi$$

$\psi$  est égal à 1 car la fréquence du premier mode, qui est de 1,86 Hz, se trouve dans la plage 1 des fréquences (1,7 à 2,1 Hz).

La charge surfacique vaut :

$$F_s = 1,0 \times 280 \times \cos(2\pi \times 1,86 \times t) \times 1,85 \sqrt{\frac{1}{280}} \times 1 = 30,956 \cos(2\pi \times 1,86 \times t) \text{ N/m}^2$$

La charge linéique est égale à :

$$F = F_s \times l_p = 30,956 \times 3,5 \times \cos(2\pi \times 1,86 \times t) = 108,35 \times \cos(2\pi \times 1,86 \times t) \text{ N/m}$$

- Calcul des réponses dynamiques

L'accélération sous la charge verticale est égale à :

$$A_{ccmax} = \frac{1}{2\xi} \frac{4 \times F}{\rho S \pi} = \frac{1}{2 \times 0,6 / 100} \frac{4 \times 108,35}{3300 \times \pi} = 3,48 \text{ m/s}^2$$

L'accélération maxi calculée est située dans la plage 4 des accélérations, c'est à dire à un niveau de confort inacceptable (accélération > 2,5 m/s<sup>2</sup>).

Pour le second mode, la fréquence de 2,91 Hz nous impose de prendre en compte la seconde harmonique. Mais avec une force divisée par 4 par rapport à la première harmonique, et compte-tenu du résultat en accélération ci-dessus, le confort est obtenu est moyen (environ 0,9m/s<sup>2</sup>).

#### A.5.1.2.4. Récapitulatif

Classe	Fréquence en Hz	Pourcentage d'amortissement	Accélération en m/s <sup>2</sup>
III	1,90	0,6	1,16
II	1,88	0,6	1,43
I	1,86	0,6	3,48

Tableau A.5.1

For the second mode, the high and low frequencies are:

$$f_2 = 3,04 \text{ Hz without pedestrians and } f_2 = 2,92 \text{ Hz for 1 pedestrians/m}^2$$

- *Calculation of dynamic pedestrian load*

The load for the first mode is calculated first, with a damping ratio of 0.6% (composite deck).

The load per unit area taken into account for the vertical modes is:

$$F_s = d \times (280 \text{ newtons}) \times \cos 2\pi f_v t \times 1,85 \times \sqrt{\frac{1}{N}} \times \psi$$

$\psi$  is unity, for the frequency of the first mode (1.86 Hz) is in range 1 (1.7 to 2.1 Hz).

The load per unit area is:

$$F_s = 1,0 \times 280 \times \cos(2\pi \times 1,86 \times t) \times 1,85 \sqrt{\frac{1}{280}} \times 1 = 30,956 \cos(2\pi \times 1,86 \times t) \text{ N/m}^2$$

The load per unit length is:

$$F = F_s \times l_p = 30,956 \times 3,5 \times \cos(2\pi \times 1,86 \times t) = 108,35 \times \cos(2\pi \times 1,86 \times t) \text{ N/m}$$

- *Calculation of dynamic response*

The acceleration under vertical loading is:

$$A_{ccmax} = \frac{1}{2\xi} \frac{4 \times F}{\rho S \pi} = \frac{1}{2 \times 0,6/100} \frac{4 \times 108,35}{3300 \times \pi} = 3,48 \text{ m/s}^2$$

The maximum acceleration calculated is in acceleration range 4, i.e. at an unacceptable comfort level (acceleration > 2.5 m/s<sup>2</sup>).

For the second mode, the frequency of 2.91 Hz requires that the second harmonic be taken into account. But with a force four times less than the first harmonic, and given the above acceleration result, the medium comfort level is attained (about 0.9m/s<sup>2</sup>).

#### A.5.1.2.4. Summary

Class	Frequency in Hz	Damping ratio	Acceleration in m/s <sup>2</sup>
III	1.90	0.6	1.16
II	1.88	0.6	1.43
I	1.86	0.6	3.48

Table A.5.1

On s'aperçoit que les accélérations sont supérieures à 1 m/s<sup>2</sup> pour toutes les classes. Si l'on choisit le niveau de confort moyen, il est nécessaire de modifier le projet.

Afin de réduire les accélérations obtenues, il faut augmenter la raideur de la structure. Pour cela, on peut augmenter la hauteur du caisson (par exemple de 40 cm).

**A.5.1.2.5. Passerelle en caisson métallique raidi**

L'ossature est constituée d'un caisson métallique de hauteur constante égale à 1,40 mètre. Sur ce caisson repose une dalle en béton armé préfabriquée, d'une épaisseur de 10 cm.

Le moment d'inertie du tablier est modifié et vaut :  $I = 0,106 \text{ m}^4$

Masse propre linéique du tablier :  $m = 3241 \text{ kg/m}$

Module d'Young de l'acier :  $E = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$

Les fréquences hautes et basses des modes sont modifiées de la façon suivante :

	1 <sup>er</sup> mode		2 <sup>ème</sup> mode	
	Fréquences hautes	Fréquences basses	Fréquences hautes	Fréquences basses
Classe III	$f_1 = 2,57 \text{ Hz}$	$f_1 = 2,47 \text{ Hz}$	$f_2 = 4,02 \text{ Hz}$	$f_2 = 3,83 \text{ Hz}$
Classe II	$f_1 = 2,57 \text{ Hz}$	$f_1 = 2,47 \text{ Hz}$	$f_2 = 4,02 \text{ Hz}$	$f_2 = 3,83 \text{ Hz}$
Classe I	$f_1 = 2,57 \text{ Hz}$	$f_1 = 2,47 \text{ Hz}$	$f_2 = 4,02 \text{ Hz}$	$f_2 = 3,83 \text{ Hz}$

Pour la classe III, les deux fréquences propres sont en dehors de la plage de fréquences que l'on doit vérifier. En classe III, le confort est donc automatiquement maximal.

Les accélérations associées au premier mode sont pour les classes I et II :

$$\text{En classe II : } A_{cc\max} = \frac{1}{2\xi} \frac{4 \times F}{\rho S \pi} = \frac{1}{2 \times 0,6 / 100} \frac{4 \times 10,36}{3437 \times \pi} = 0,32 \text{ m/s}^2$$

$$\text{En classe I : } A_{cc\max} = \frac{1}{2\xi} \frac{4 \times F}{\rho S \pi} = \frac{1}{2 \times 0,6 / 100} \frac{4 \times 28,17}{3521 \times \pi} = 0,85 \text{ m/s}^2$$

Pour la classe II, le confort est maximal. Il est moyen pour la classe I, mais acceptable tout de même.

Les conclusions sur le confort en prenant en compte la seconde harmonique de la marche des piétons, pour les seconds modes propres, sont inchangées.

**A.5.2. Etude de sensibilité de passerelles types.**

Cette partie présente l'étude de quatre types de passerelles courantes à partir d'exemples réels en faisant varier la portée de ces passerelles types autour de la portée réelle, en restant dans leur domaine d'emploi.

Le premier paragraphe présente les passerelles étudiées et le second précise leurs fréquences propres.

*It is seen that the accelerations are always higher than 1 m/s<sup>2</sup> for all bridge classes. If the medium comfort level is chosen, the design has to be amended.*

To reduce the accelerations obtained, the structural stiffness must be increased. This can be achieved by increasing the depth of the box girder (by 40 cm, for example).

**A.5.1.2.5. Stiffened steel box-girder bridge**

The structural member is a steel box girder with a constant depth of 1.40 metres. It supports a 10-cm-thick precast reinforced-concrete deck slab.

The moment of inertia of the deck becomes:  $I = 0.106 \text{ m}^4$

Deck selfweight per unit length:  $m = 3241 \text{ kg/m}$

Modulus of elasticity of steel:  $E = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$

The high and low frequencies of the modes become:

	1 <sup>st</sup> mode		2 <sup>nd</sup> mode	
	High frequencies	Low frequencies	High frequencies	Low frequencies
Class III	$f_1 = 2,57 \text{ Hz}$	$f_1 = 2,47 \text{ Hz}$	$f_2 = 4,02 \text{ Hz}$	$f_2 = 3,83 \text{ Hz}$
Class II	$f_1 = 2,57 \text{ Hz}$	$f_1 = 2,47 \text{ Hz}$	$f_2 = 4,02 \text{ Hz}$	$f_2 = 3,83 \text{ Hz}$
Class I	$f_1 = 2,57 \text{ Hz}$	$f_1 = 2,47 \text{ Hz}$	$f_2 = 4,02 \text{ Hz}$	$f_2 = 3,83 \text{ Hz}$

For class III both frequencies are beyond the frequency range that must be found. For class III, therefore, the comfort level is automatically maximum.

The accelerations associated with the first modes are as follows for classes I and II:

$$\text{class II: } A_{cc\max} = \frac{1}{2\xi} \frac{4 \times F}{\rho S \pi} = \frac{1}{2 \times 0,6 / 100} \frac{4 \times 10,36}{3437 \times \pi} = 0,32 \text{ m/s}^2$$

$$\text{class I: } A_{cc\max} = \frac{1}{2\xi} \frac{4 \times F}{\rho S \pi} = \frac{1}{2 \times 0,6 / 100} \frac{4 \times 28,17}{3521 \times \pi} = 0,85 \text{ m/s}^2$$

For class II, the comfort level is maximum. For class I it is medium but nonetheless acceptable.

For the second modes, and taking account of the second harmonic of pedestrians walking, the conclusions on the comfort level are unchanged.

**A.5.2. Sensitivity study of typical footbridges**

This section presents the study of four kinds of standard footbridges based on actual examples, varying their spans from the actual span but remaining within their range of use.

The first paragraph presents the footbridges studied and the second specifies their frequencies.

**A.5.2.1. Présentation des passerelles étudiées et prédimensionnement statique**

Quatre types principaux de passerelles ont été dégagés : en béton armé, en béton précontraint, caisson mixte acier-béton et treillis métallique.

Pour chaque type, un prédimensionnement succinct a été réalisé, pour des passerelles de longueur totale de 20 à 80 m ; les hypothèses et la démarche adoptées dans chaque cas apparaissent dans la partie suivante.

Pour permettre la comparaison entre les différentes passerelles, une même largeur utile de 3,50 m a été prise pour toutes les passerelles. De même, les superstructures sont comparables, même si elles sont adaptées à chaque cas.

#### A.5.2.1.1. Passerelle en béton armé

Pour le béton armé, deux domaines de portée sont à dissocier : les petites portées (20 à 25 m) où une dalle rectangulaire en béton armé est suffisante et les plus grandes (25 à 45 m) où nous utiliserons une passerelle armée en H. Seule la hauteur  $h$  varie quand la portée change, les dimensions fixes sont les suivantes :

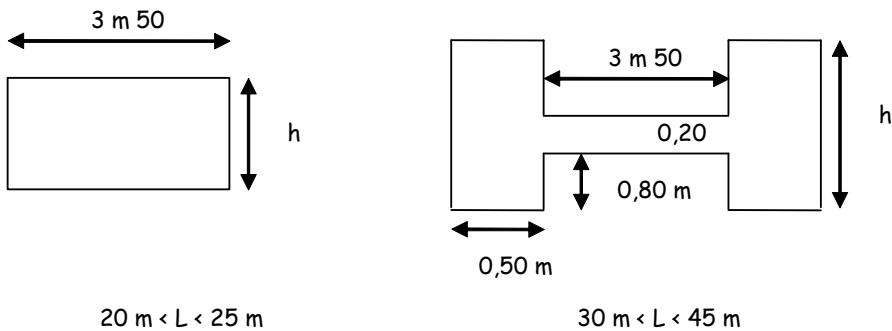


Figure A.5.6 : Passerelles en béton armé

La hauteur de la passerelle à retenir est celle qui permet de garantir la limite de compression du béton (ici 15 MPa) et de loger les aciers soit dans les 3,50 mètres de largeur, pour la dalle, soit dans les deux poutres de 50 cm, pour la passerelle en H.

Les superstructures de cette passerelle ainsi que leur poids sont :

- étanchéité	$3,5 \times 0,03 \times 24 =$	2,5 kN / ml
- revêtement	$3,5 \times 0,04 \times 24 =$	4,0 kN / ml
- divers		1,0 kN / ml

Soit  $7,5 \text{ kN / ml au total.}$

Le rôle de garde-corps est joué par les poutres du H elles-mêmes. Pour la dalle armée, il faut ajouter deux contre-corniches et deux garde-corps, soit 16 kN / ml au total.

#### A.5.2.1. Bridges studied and preliminary static design

Four main types of footbridges have been identified: reinforced concrete, prestressed concrete, steel or composite steel-concrete box girders, and steel trusses.

For each type, a brief preliminary design has been drawn up for bridges between 20 and 80 m in length; the assumptions and the procedure adopted in each case are detailed below.

To enable real comparison of different bridges, a standard functional width of 3.50 m was chosen for them all. Similarly, the bridge deck furniture and surfacing is comparable, even if they had to be adapted to each specific case.

#### A.5.2.1.1. Reinforced-concrete footbridge

For reinforced concrete, two ranges of spans must be separated: short spans (20 to 25 m) where a rectangular reinforced-concrete slab is sufficient, and longer spans (25 to 45 m) where a reinforced H-section is used. Only the depth  $h$  varies as the span changes. The fixed dimensions are as follows:

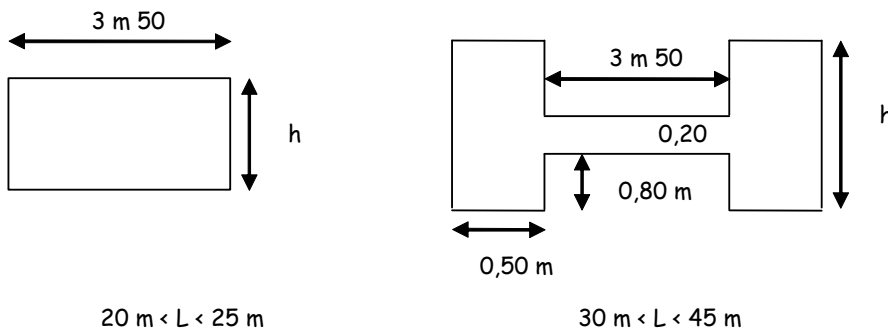


Figure A.5.6: Reinforced-concrete footbridges

The depth adopted is that guaranteeing the limit compressive strength of the concrete (15 MPa in this case) and housing the reinforcement either in the 3.5 m width in the case of the slab or in the two 50 cm beams in the case of the H-section bridge.

The deck furnishing and surfacing for this bridge (together with their weights) are:

- waterproofing	$3.5 \times 0.03 \times 24 = 2.5 \text{ kN / m}$
- surfacing	$3.5 \times 0.04 \times 24 = 4.0 \text{ kN / m}$
- miscellaneous	1.0 kN / m
i.e. a total of	7.5 kN / m

For the H-section bridge, the beams themselves act as safety railings. For the reinforced slab, two parapet upstands and two railings must be added, for a total of 16 kN / m.

#### A.5.2.1.2. Passerelle en béton précontraint



De la même manière que pour le béton armé, on distingue deux domaines distincts : quand  $L$  est compris entre 20 m et 30 m, on utilise une dalle rectangulaire précontrainte. Par contre, dès que  $L$  devient supérieure à 35 m (jusqu'à 50 m), on retient plutôt un caisson précontraint. Seule la hauteur  $h$  varie quand la portée change, les dimensions fixes sont les suivantes :

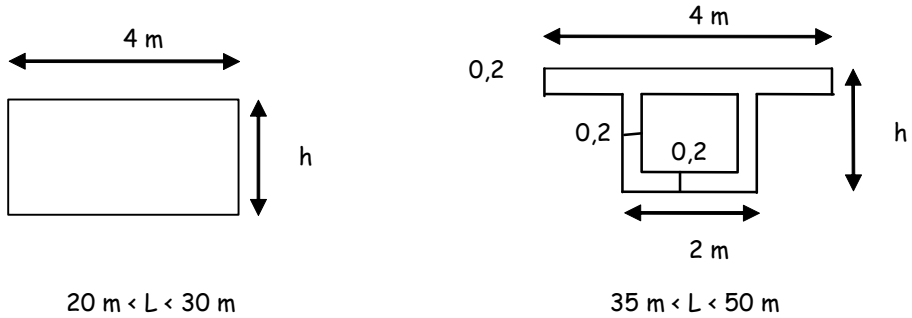


Figure A.5.7 : Passerelles en béton précontraint

Les superstructures de cette passerelle ainsi que leur poids sont :

- 2 contre corniches	$2 \times 25 \times (0,25 \times 0,34) =$	4,5 kN / ml
- 2 garde corps	$2 \times 2 =$	4,0 kN / ml
- étanchéité	$4 \times 0,03 \times 24 =$	3,0 kN / ml
- revêtement	$3,5 \times 0,04 \times 24 =$	4,0 kN / ml
- divers		1,0 kN / ml
Soit		16,5 kN / ml au total.

A.5.2.1.3. Passerelle en acier ou mixte

Ce type de passerelle est un caisson en acier (poutres reconstituées soudées) de nuance S355. Une dalle de béton pèse sur le caisson ; si elle est connectée à celui-ci, on obtient la section mixte. Dans le cas contraire, la section résistante est l'acier seul mais l'épaisseur de béton est quand même présente et compte dans le poids propre. Seule la hauteur de la passerelle varie quand la portée change, les dimensions fixes sont les suivantes :

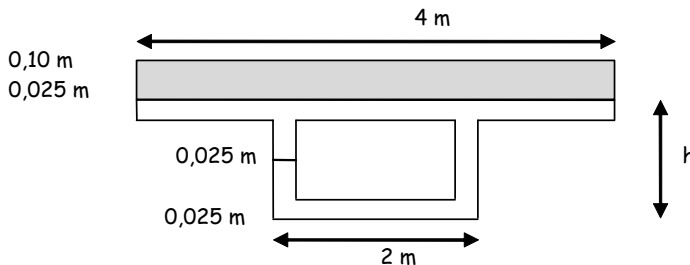


Figure A.5.8 : Passerelle mixte

A.5.2.1.2. Prestressed-concrete footbridge

As in the case of reinforced-concrete bridges, there are two separate ranges: when the length is between 20 m and 30 m, a prestressed rectangular slab is used. If the length is greater than 35 m (up to 50 m), a prestressed box girder is preferable. Only the depth  $h$  varies as the span changes. The fixed dimensions are as follows:

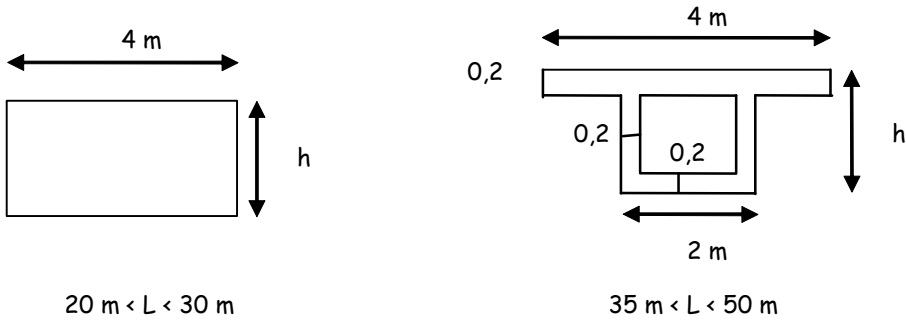


Figure A.5.7: Prestressed-concrete bridges

The deck furnishing and surfacing for this bridge (together with their weights) are:

- 2 parapet upstands  $2 \times 25 \times (0.25 \times 0.34) = 4.5 \text{ kN / m}$
- 2 safety rails  $2 \times 2 = 4.0 \text{ kN / m}$
- waterproofing  $4 \times 0.03 \times 24 = 3.0 \text{ kN / m}$
- surfacing  $3.5 \times 0.04 \times 24 = 4.0 \text{ kN / m}$
- miscellaneous  $1.0 \text{ kN / m}$

i.e. a total of  $16.5 \text{ kN / m}$

### A.5.2.1.3. Steel or composite footbridge

This type of bridge is a box girder (welded plate girders) of grade S355 steel. It is topped with a concrete slab; if the steel structure is connected to the concrete, it is a composite structure; otherwise the resisting section is the steel alone, but the concrete is included in the selfweight. Only the depth of the section changes as the span changes. The fixed dimensions are as follows:

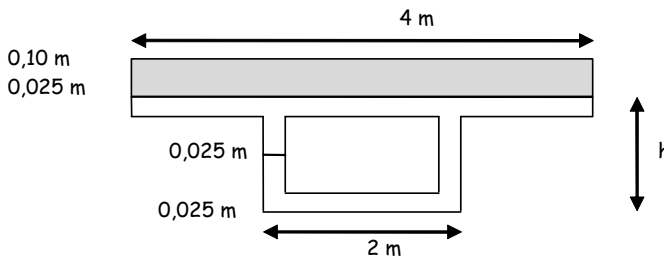


Figure A.5.8: Composite footbridge

Nous étudierons ce type de passerelle pour des portées totales allant de 40 à 80 m. Pour le caisson mixte, le dimensionnement s'est fait en considérant que la section d'acier reprenait son propre poids ainsi que le poids de béton frais (supposé coulé en une seule fois). Par contre, la section mixte reprend les superstructures (avec un coefficient d'équivalence  $n = 18$ ) et les charges piétonnes statiques (coefficient  $n = 6$ ). Pour le caisson acier, la seule section résistante est le caisson acier.

Les superstructures de cette passerelle ainsi que leur poids sont :

- 2 contre corniches	$2 \times 25 \times (0,25 \times 0,34) =$	4,5 kN / ml
- 2 garde corps	$2 \times 2 =$	4,0 kN / ml
- étanchéité	$4 \times 0,03 \times 24 =$	3,0 kN / ml
- revêtement	$3,5 \times 0,04 \times 24 =$	4,0 kN / ml
- divers		1,0 kN / ml

Soit 16,5 kN / ml au total.

#### A.5.2.1.4. Passerelle treillis métallique

Le domaine de portée principale pris en compte pour ce type de passerelle est 50-80 m. On considérera la passerelle bien triangulée. Les valeurs qui restent fixes quand la portée change sont :

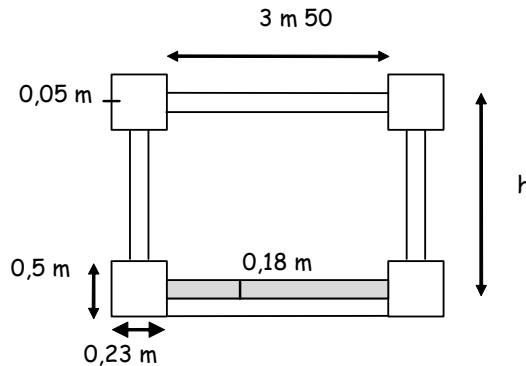


Figure A.5.9 : Passerelles en treillis métallique

Les superstructures de cette passerelle ainsi que leur poids sont :

- 2 garde corps	$2 \times 2 =$	4,0 kN / ml
- étanchéité	$3,5 \times 0,03 \times 24 =$	2,5 kN / ml
- revêtement	$3,5 \times 0,04 \times 24 =$	4,0 kN / ml
- divers		1,0 kN / ml

soit 11,5 kN / ml au total.

This type of bridge will be studied for spans between 40 and 80 m. The composite-section bridge is designed considering the steel section taking its own weight and that of the fresh concrete (assumed to be placed in a single operation). On the other hand, the composite section takes the weight of deck furniture and surfacing (with a modular ratio  $n = 18$ ) and static pedestrian load (ratio  $n = 6$ ). For the steel bridge (no concrete), the resisting section is that of the steel box girder alone.

The deck furnishing and surfacing for this bridge (together with their weights) are :

- 2 parapet upstands	$2 \times 25 \times (0.25 \times 0.34) = 4.5 \text{ kN / m}$
- 2 safety railings	$2 \times 2 = 4.0 \text{ kN / m}$
- waterproofing	$4 \times 0.03 \times 24 = 3.0 \text{ kN / m}$
- surfacing	$3.5 \times 0.04 \times 24 = 4.0 \text{ kN / m}$
- miscellaneous	$1.0 \text{ kN / m}$
i.e. a total of	$16.5 \text{ kN / m}$

#### A.5.2.1.4. Truss-girder bridge

The range of main spans taken into account for this kind of footbridge is 50-80 m. The bridge will be considered to be well triangulated. The values that remain fixed as the span changes are:

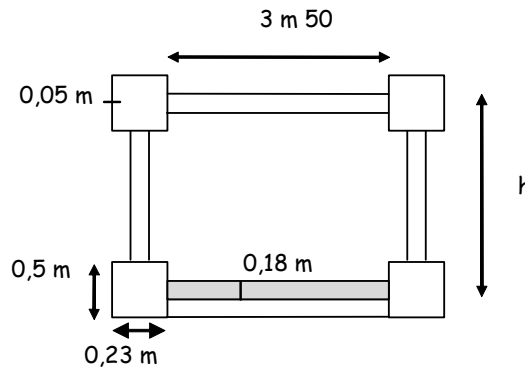


Figure A.5.9: Truss-girder bridges

The deck furnishing and surfacing for this bridge (together with their weights) are :

- 2 safety railings	$2 \times 2 = 4.0 \text{ kN / m}$
- waterproofing	$3.5 \times 0.03 \times 24 = 2.5 \text{ kN / m}$
- surfacing	$3.5 \times 0.04 \times 24 = 4.0 \text{ kN / m}$
- miscellaneous	$1.0 \text{ kN / m}$
i.e. a total of	$11.5 \text{ kN / m}$

### A.5.2.2. Fréquences propres

On considère les quatre types de passerelles précédents comme étant des travées isostatiques.

Pour une travée isostatique, la formule donnant la fréquence propre de l'ouvrage est :

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

- $f_n$  est la fréquence propre du mode  $n$  ;
- $L$  est la longueur de la travée en m ;
- $I$  est l'inertie en  $m^4$ , verticale ou horizontale suivant ce que l'on cherche ;
- $E$  est le module d'Young du matériau constituant la structure en  $N / m^2$  ;
- $\rho S$  est la masse linéique de l'ouvrage (masse propre et masse des superstructures) en  $kg / ml$  à laquelle on ajoute la masse des piétons sur la passerelle. Nous avons pris 1 piéton /  $m^2$ , avec 70 kg par piéton ;  
soit  $\rho S = \text{charges permanentes} + 3,5 \times 70 \times 1$  en  $kg / ml$ .

Nous avons donc fait varier la longueur de la travée isostatique pour chaque type de passerelles. La hauteur est déterminée selon un dimensionnement statique.

Les tableaux suivants présentent les quatre fréquences propres : les deux premières verticales et les deux premières horizontales.

L	caisson mixte				caisson acier				treillis			
	f vert 1	f vert 2	f hor 1	f hor 2	f vert 1	f vert 2	f hor 1	f hor 2	f vert 1	f vert 2	f hor 1	f hor 2
40	1,2	4,6	3,6	14	1,6	6,2	3,1	12				
50	1,1	4,4	2,3	9,3	1,5	6,0	2,0	8,1	1,4	5,6	2,0	8,3
60	1,1	4,2	1,6	6,5	1,4	5,7	1,5	5,9	1,4	5,7	1,4	5,6
70	1,0	4,1	1,2	4,9	1,4	5,5	1,1	4,5	1,4	5,7	1,0	4,1
80	1,0	3,9	1,0	3,8	1,4	5,3	0,9	3,5	1,5	5,8	0,8	3,1

Tableau A.5.2

**A.5.2.2. Natural frequencies**

The four kinds of bridges described above are considered to be isostatic spans.

For an isostatic span, the formula giving the natural frequency of the bridge is:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

- $f_n$  is the natural frequency of mode  $n$ ;
- $L$  is the length of the span in metres;
- $I$  is the inertia in  $m^4$ , vertical or horizontal, depending on the study;
- $E$  is the modulus of elasticity of the material of which the structure is made, in  $N / m^2$  ;
- $\rho S$  is the mass per unit length of the bridge (selfweight and mass of deck furniture and surfacing) in  $kg / m$  plus the mass of pedestrians on the bridge. It is assumed there is 1 pedestrian/ $m^2$ , with 70 kg per pedestrian, so  $\rho S =$  permanent load +  $3.5 \times 70 \times 1$  in  $kg / m$ .

The length of the isostatic span was varied for each kind of footbridge. The depth was determined from static design analysis.

The following tables present the four frequencies: the first two vertical frequencies and the first two horizontal frequencies.

L	Composite box girder				Steel box girder				Truss			
	Vert f 1	Vert f 2	Hor f 1	Hor f 2	Vert f 1	Vert f 2	Hor f 1	Hor f 2	Vert f 1	Vert f 2	Hor f 1	Hor f 2
40	1,2	4,6	3,6	14	1,6	6,2	3,1	12				
50	1,1	4,4	2,3	9,3	1,5	6,0	2,0	8,1	1,4	5,6	2,0	8,3
60	1,1	4,2	1,6	6,5	1,4	5,7	1,5	5,9	1,4	5,7	1,4	5,6
70	1,0	4,1	1,2	4,9	1,4	5,5	1,1	4,5	1,4	5,7	1,0	4,1
80	1,0	3,9	1,0	3,8	1,4	5,3	0,9	3,5	1,5	5,8	0,8	3,1

Table A.5.2

en BA						en BP							
	L		f vert 1	f vert 2	f hor 1	f hor 2		L		f vert 1	f vert 2	f hor 1	f hor 2
dalle armée	20		2,7	11	19	77	dalle précontrainte	20		2,0	8,0	15	58
	25		2,5	10	13	50		25		1,8	7,1	10	39
en H	25		3,4	13	15	61		30		1,9	7,7	7,0	28
	30		3,0	12	11	44	caisson	30		2,4	9,8	5,2	21
	35		2,7	11	8	33		35		2,3	9,1	3,9	15
	40		2,5	10	6	26		40		2,1	8,5	3,0	12
	45		2,4	10	5	21		45		2,0	8,2	2,4	9,5
							50		2,0	7,9	1,9	7,7	

Tableau A.5.3

A partir de ces tableaux, on peut formuler les remarques suivantes :

- On peut se limiter au premier mode pour ces types de passerelles simples, aussi bien pour les vibrations verticales qu'horizontales ;
- Pour les vibrations verticales, la première fréquence propre des passerelles métal est autour de 1 - 1,5 Hz, alors que pour les passerelles béton, on observe plutôt 2 - 3 Hz (plus précisément, 2,5 - 3 Hz pour le béton armé et 2 - 3 Hz pour le béton précontraint) ;
- Les passerelles qui pourraient ne pas vibrer sous l'excitation piétonne sont rares, il s'agit de la passerelle armée en H de 25 m. Toutes les autres sont a priori classées « à risques » ;
- Enfin, pour les vibrations latérales, on pourra se contenter d'étudier les passerelles métal de grande portée (pour toutes les autres, en effet, la première fréquence horizontale est au-delà de 2,5 Hz).

Reinforced concrete						Prestressed concrete					
	L	Vert f 1	Vert f 2	Hor f 1	Hor f 2		L	Vert f 1	Vert f 2	Hor f 1	Hor f 2
Reinforced slab	20	2,7	11	19	77	Prestressed slab	20	2,0	8,0	15	58
	25	2,5	10	13	50		25	1,8	7,1	10	39
H section	25	3,4	13	15	61		30	1,9	7,7	7,0	28
	30	3,0	12	11	44	Box girder	30	2,4	9,8	5,2	21
	35	2,7	11	8	33		35	2,3	9,1	3,9	15
	40	2,5	10	6	26		40	2,1	8,5	3,0	12
	45	2,4	10	5	21		45	2,0	8,2	2,4	9,5
							50	2,0	7,9	1,9	7,7

Table A.5.3

These tables give rise to the following comments:

- Analysis can be limited to the first mode for these simple kinds of bridge, for both vertical and horizontal vibration;
- For vertical vibrations, the first natural frequency of the steel bridges is around 1-1.5 Hz, whereas for the concrete bridges it is around 2-3 Hz (more precisely, 2.5-3 Hz for reinforced concrete and 2-3 Hz for prestressed concrete);
- Footbridges which are not likely to vibrate under pedestrian excitation are rare: here there is only the 25-m-long H-section reinforced-concrete bridge. All the others are deemed to be in the 'risk' category, in principle;
- For lateral vibration, it could be sufficient to study only the long-span steel bridges (for all the others, the first horizontal frequency is more than 2.5 Hz).



## ANNEXE 6 : BIBLIOGRAPHIE

### Généralités

1. Dynamique des constructions. J. Armand et divers auteurs. Cours de l'ENSMP, 1983.
2. Introduction to structural dynamics. J.M. Biggs. McGraw-Hill Book Company, June 1964.
3. Vibration problems in structures - Practical guidelines. H. Bachmann et divers auteurs. Birkhäuser, 1997, 2<sup>nd</sup> edition.

### Règles

4. Eurocode 2 - Calcul des structures en béton - 2<sup>ème</sup> partie : Ponts en béton. ENV 1992-2, 1996.
5. Eurocode 5 - Design of timber structures - Part2 : Bridges. PrENV 1995-2, 14 January 1997.
6. Vibration admissible pour passerelles piétonnes et cyclables. BS 5400 - Annexe C.
7. Practical guidelines. CEB, B. I. 209, Août 1991.
8. Recommandations pour le calcul des effets du vent sur les constructions. CECM, 1989.

### Amortisseurs

9. Two case studies in the use of tuned vibration absorbers on footbridges. R.T. Jones ; A.J. Pretlove ; R. Eye. The Structural Engineer, June 1981, Vol. 59B n° 2.
10. Tuned vibration absorbers for lively structures. H. Bachmann ; B. Weber. Structural Engineering International, 1995, n° 1.
11. Tuned mass dampers for balcony vibration control. M. Setareh ; R. Hanson. ASCE Journal of Structural Engineering, March 1992, Vol. 118, n° 3.
12. Tuned mass dampers to control floor vibration from humans. M. Setareh ; R. Hanson. ASCE Journal of Structural Engineering, March 1992, Vol. 118, n° 3.
13. Documentation fabricants : Taylor - Jarret.
14. Passerelle du stade de France - Conception d'amortisseurs dynamiques accordés. C. Outtertyck ; S. Montens. Revue Française de Génie Civil, Octobre 1999.

## APPENDIX 6: BIBLIOGRAPHY

### General

1. *Dynamique des constructions*. J. Armand et al. Cours de l'ENSMSP, 1983.
2. *Introduction to structural dynamics*. J.M. Biggs. McGraw-Hill Book Company, June 1964.
3. *Vibration problems in structures - Practical guidelines*. H. Bachmann et al. Birkhäuser, 1997, 2<sup>nd</sup> edition.

### Regulations

4. *Eurocode 2 - Design of concrete structures - Part 2: Bridges*. ENV 1992-2, 1996.
5. *Eurocode 5 - Design of timber structures - Part 2: Bridges*. PrENV 1995-2, 14 January 1997.
6. *Vibration Serviceability Requirements for Foot and Cycle Track Bridges*. BS 5400 - Appendix C.
7. *Practical guidelines*. CEB, B. I. 209, August 1991.
8. *Recommendations for calculating the effect of wind on constructions*. European Convention for Structural Steelwork, 1989.

### Dampers

9. *Two case studies in the use of tuned vibration absorbers on footbridges*. R.T. Jones ; A.J. Pretlove; R. Eye. *The Structural Engineer*, June 1981, Vol. 59B No. 2.
10. *Tuned vibration absorbers for lively structures*. H. Bachmann; B. Weber. *Structural Engineering International*, 1995, No. 1.
11. *Tuned mass dampers for balcony vibration control*. M. Setareh; R. Hanson. *ASCE Journal of Structural Engineering*, March 1992, Vol. 118, No. 3.
12. *Tuned mass dampers to control floor vibration from humans*. M. Setareh; R. Hanson. *ASCE Journal of Structural Engineering*, March 1992, Vol. 118, No. 3.
13. *Manufacturer's documentation: Taylor - Jarret*.
14. *Passerelle du stade de France - Conception d'amortisseurs dynamiquement accordés*. C. Outteryck; S. Montens. *Revue Française de Génie Civil*, October 1999.

## Analyse du comportement

15. Human tolerance levels for bridge vibrations. D. R. Leonard, 1966.
16. Dynamic design of footbridges. Y. Matsumoto ; T. Nishioka ; H. Shiojiri ; K. Matsuzaki. IABSE Proceedings, 1978, P-17/78, pp. 1-15.
17. Pedestrian induced vibrations in footbridges. J.E. Wheeler. Proceedings ARRB, 1980, Vol. 10, part 3.
18. Prediction and control of pedestrian-induced vibration in footbridges. J. Wheeler. ASCE Journal of structural engineering, September 1982, Vol. 108, n° ST9.
19. Structural serviceability - Floor vibrations. B. Ellingwood ; A. Tallin. ASCE Journal of Structural Engineering, February 1984, Vol. 110, n° 2.
20. Dynamic behaviour of footbridges. G.P. Tilly ; D.W. Cullington ; R. Eyre. IABSE periodic, February 1984, S-26/84, page 13 et suivantes.
21. Vibration of a beam under a random stream of moving forces. R. Iwankiewicz ; J. Pawel Sniady. Structural Mechanics, 1984, Vol. 12, n° 1.
22. Vibrations in structures induced by man and machines. H. Bachmann ; W. Amman. IABSE, Structural Engineering Documents, 1987.
23. On minimum weight design of pedestrian bridges taking vibration serviceability into consideration. H. Sugimoto ; Y. Kajikawa ; G.N. Vanderplaats. ASCE Journal of Structural Engineering, October 1987.
24. Design live loads for coherent crowd harmonic movements. A. Ebrahimipour ; R.L. Sack. ASCE Journal of Structural Engineering, 1990, Vol. 118-4, pp.1121-1136.
25. Durch Menschen verursachte dynamische Lasten und deren Auswirkungen auf Balkentragwerke. H. Bachmann. Kurzberichte aus der Bauforschung, Novembre 1990, Bericht n°125.
26. Vibration Upgrading of Gymnasia - Dance Halls and Footbridges. H. Bachmann. Structural Engineering International, February 1992.
27. Case studies of structures with man-induced vibrations. H. Bachmann. ASCE Journal of Structural Engineering, March 1992, Vol. 118, n° 3.
28. Bases for design of structures - Serviceability of buildings against vibration. ISO 10137, 15 April 1992, first edition.
29. Schwingungsuntersuchungen für Fußgängerbrücken. H. Grundmann ; H. Kreuzinger ; M. Schneider. Bauingenieur, 1993, n° 68.
30. Synchronisation of human walking observed during lateral vibration of a congested pedestrian bridge. Y. Fujino ; B.M. Pacheco ; S.I. Nakamura ; P. Warnitchai. Earthquake engineering and structural dynamics, 1993.

### Behavioural analysis

15. *Human tolerance levels for bridge vibrations.* D. R. Leonard, 1966.
16. *Dynamic design of footbridges.* Y. Matsumoto; T. Nishioka; H. Shiojiri; K. Matsuzaki. *IABSE Proceedings, 1978, P-17/78, pp. 1-15.*
17. *Pedestrian induced vibrations in footbridges.* J.E. Wheeler. *Proceedings ARRB, 1980, Vol. 10, part 3.*
18. *Prediction and control of pedestrian-induced vibration in footbridges.* J. Wheeler. *ASCE Journal of Structural Engineering, September 1982, Vol. 108, No. ST9.*
19. *Structural serviceability - Floor vibrations.* B. Ellingwood; A. Tallin. *ASCE Journal of Structural Engineering, February 1984, Vol. 110, No. 2.*
20. *Dynamic behaviour of footbridges.* G.P. Tilly; D.W. Cullington; R. Eyre. *IABSE periodic, February 1984, S-26/84, pages 13 ff.*
21. *Vibration of a beam under a random stream of moving forces.* R. Iwankiewicz; J. Pawel Sniady. *Structural Mechanics, 1984, Vol. 12, No. 1.*
22. *Vibrations in structures induced by man and machines.* H. Bachmann; W. Amman. *IABSE, Structural Engineering Documents, 1987.*
23. *On minimum weight design of pedestrian bridges taking vibration serviceability into consideration.* H. Sugimoto; Y. Kajikawa; G.N. Vanderplaats. *ASCE Journal of Structural Engineering, October 1987.*
24. *Design live loads for coherent crowd harmonic movements.* A. Ebrahimpout; R.L. Sack. *ASCE Journal of Structural Engineering, 1990, Vol. 118-4, pp.1121-1136.*
25. *Durch Menschen verursachte dynamische Lasten und deren Auswirkungen auf Balkentragwerke.* H. Bachmann. *Kurzberichte aus der Bauforschung, November 1990, Bericht No.125.*
26. *Vibration Upgrading of Gymnasia - Dance Halls and Footbridges.* H. Bachmann. *Structural Engineering International, February 1992.*
27. *Case studies of structures with man-induced vibrations.* H. Bachmann. *ASCE Journal of Structural Engineering, March 1992, Vol. 118, No. 3.*
28. *Bases for design of structures - Serviceability of buildings against vibration.* ISO 10137, 15 April 1992, first edition.
29. *Schwingungsuntersuchungen für Fußgängerbrücken.* H. Grundmann; H. Kreuzinger; M. Schneider. *Bauingenieur, 1993, No. 68.*
30. *Synchronization of human walking observed during lateral vibration of a congested pedestrian bridge.* Y. Fujino; B.M. Pacheco; S.I. Nakamura; P. Warnitchai. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1993.*

31. Design criterion for vibrations due to walking. D.E. Allen ; T.M. Murray. Engineering Journal/ American Institute of Still Construction, 1993, 4<sup>th</sup> Quarter.
32. Guidelines to minimise floor vibrations from building occupants. S. Mouring ; B. Ellingwood. ASCE Journal of Structural Engineering, February 1994, Vol. 120, n° 2.
33. Measuring and modeling dynamic loads imposed by moved crowds. Divers auteurs. ASCE Journal of Structural engineering, December 1996.
34. Vibrations et chocs mécaniques - Evaluation de l'exposition des individus à des vibrations globales du corps - Partie 1 : Spécifications générales. Norme Internationale ISO 2631-1, 1997.
35. Serviceability vibration evaluation of long floor slabs. T.E. Price ; R.C. Smith. ASCE Structures Congress, Washington DC, USA, 21-23 Mai 2001. ASCE, 1991.
36. Development of a simplified design criterion for walking vibrations. L. M. Hanagan ; T. Kim. ASCE Structures Congress, Washington DC, USA, 21-23 Mai 2001. ASCE, 2001.
37. An investigation into crowd-induced vertical dynamic loads using available measurements. M. Willford. The Structural Engineer, June 2001, Vol. 79, n° 12.
38. The London Millennium Footbridge. P. Dallard ; A.J. Fitzpatrick ; A. Flint ; S. Le Bourva ; A. Low ; R.M. Ridsdill Smith ; M. Willford. The Structural Engineer, 20 November 2001, Vol. 79, n° 22.

### **Méthodes de calcul**

39. Etude du comportement vibratoire des passerelles lors du passage des piétons. F. Legeron ; M. Lemoine. Revue Ouvrages d' Art, n° 32. SETRA, juillet 1999.
40. Etude dynamique des passerelles piétons. G. Youssouf - maître de stage F. Legeron. Thèse MSOA de l'ENPC promotion 2000.
41. Cable dynamics - A review. U. Starossek. Structural Engineering International 3/94, 1994.
42. Using component mode synthesis and static shapes for tuning TMDs. Divers auteurs. ASCE Journal of Structural Engineering, 1992, n° 3.

### **Articles sur passerelle soit vibrante, soit instrumentée**

43. Pedestrian-induced vibration of footbridges. P. Dallard ; A.J. Fitzpatrick ; A. Flint ; A. Low ; R. Ridsdill Smith ; M. Willford. Structural Engineer, 5 December 2000, Vol. 78, n° 23-24.
44. Modal identification of cable-stayed pedestrian bridge. M. Gardnermorse ; D. Huston. ASCE Journal of Structural Engineering, November 1993, Vol. 119, n° 11.

31. *Design criterion for vibrations due to walking.* D.E. Allen; T.M. Murray. *Engineering Journal/ American Institute of Still Construction*, 1993, 4<sup>th</sup> Quarter.
32. *Guidelines to minimize floor vibrations from building occupants.* S. Mouring; B. Ellingwood. *ASCE Journal of Structural Engineering*, February 1994, Vol. 120, No. 2.
33. *Measuring and modeling dynamic loads imposed by moved crowds.* Several authors. *ASCE Journal of Structural engineering*, December 1996.
34. *Mechanical shock and vibrations - Evaluation of human exposure to whole-body vibration - Part 1: General requirements.* International standard ISO 2631-1, 1997.
35. *Serviceability vibration evaluation of long floor slabs.* T.E. Price; R.C. Smith. *ASCE Structures Congress, Washington DC, USA, 21-23 May 2001.* ASCE, 1991.
36. *Development of a simplified design criterion for walking vibrations.* L. M. Hanagan; T. Kim. *ASCE Structures Congress, Washington DC, USA, 21-23 May 2001.* ASCE, 2001.
37. *An investigation into crowd-induced vertical dynamic loads using available measurements.* M. Willford. *The Structural Engineer*, June 2001, Vol. 79, No. 12.
38. *The London Millennium Footbridge.* P. Dallard; A.J. Fitzpatrick; A. Flint; S. Le Bourva; A. Low; R.M. Ridsdill Smith; M. Willford. *The Structural Engineer*, 20 November 2001, Vol. 79, No. 22.

### Calculation methods

39. *Etude du comportement vibratoire des passerelles lors du passage des piétons.* F. Legeron; M. Lemoine. *Revue Ouvrages d'Art*, No. 32. SETRA, July 1999.
40. *Etude dynamique des passerelles piétons.* G. Youssouf, F. Legeron. *Engineering thesis on bridges, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2000 class.*
41. *Cable dynamics - A review.* U. Starossek. *Structural Engineering International* 3/94, 1994.
42. *Using component mode synthesis and static shapes for tuning TMDs.* Several authors. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 1992, No. 3.

### Articles on vibrating or instrumented footbridges

43. *Pedestrian-induced vibration of footbridges.* P. Dallard; A.J. Fitzpatrick; A. Flint; A. Low; R. Ridsdill Smith; M. Willford. *Structural Engineer*, 5 December 2000, Vol. 78, No. 23-24.
44. *Modal identification of cable-stayed pedestrian bridge.* M. Gardnermorse; D. Huston. *ASCE Journal of Structural Engineering*, November 1993, Vol. 119, No. 11.

45. A briefing on pedestrian-induced lateral vibration of footbridges. *Revue Française de Génie Civil*, 2000, Vol. 4, n° 6.
46. Dynamic testing of the Sherbrooke pedestrian bridge. P. Paultre ; J. Proulx ; F. Légeron ; M. Le Moine, N. Roy. 16<sup>th</sup> IABSE Congress, Lucerne, Switzerland, 2000.

### **Passerelles spécifiques**

47. Sacramento river pedestrian bridge USA. C. Redfield ; J. Straski. *Structural Engineering International*, 1991, 4/91.
48. Construction of the world's longest pedestrian stress-ribbon bridge. Divers auteurs. FIP notes 98-1, 1998.
49. Rebirth of the ribbon. Divers auteurs. *Bridge*, 1998, 4<sup>th</sup> quarter.

### **Bibliographies complémentaires**

#### Amortissement

51. Mechanical vibrations. J.P. Den Hartog. Mc Graw-Hill, 1940, 4<sup>th</sup> edition.
52. Comportement aérodynamique des ponts à haubans à tablier métallique de section ouverte. J.C. Foucriat. *Journées techniques AFPC*, 1978, partie I.
53. On the dynamic vibration damped absorber of the vibration system. T. Ioi ; K. Ikeda. *Bulletin of the Japanese Society of Mechanical Engineering*, 1978, 21, 151.
54. Optimal absorber parameters for various combinations of response and excitation parameters. G.B. Warburton. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1982, Vol.10, pp. 381-401.
55. Fractional-derivative Maxwell model for viscous dampers. N. Makris ; M.C. Constantinou. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 1991, Vol. 117, pp. 2708-2724.
56. Dynamic analysis of generalised viscoelastic fluids. N. Makris ; G.F. Dargush ; M.C. Constantinou. *Journal of Engineering Mechanics*, 1993, Vol. 119, n° 8.
57. Vibration control by multiple tuned liquid dampers. Y. Fujino ; L.M. Sun. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 1993, Vol. 119, n° 12.

#### Bulletins techniques de l'OTUA

58. *Bulletins Ponts métalliques*.
59. *Bulletins Ouvrages métalliques*.

45. *A briefing on pedestrian-induced lateral vibration of footbridges. Revue Française de Génie Civil, 2000, Vol. 4, No. 6.*
46. *Dynamic testing of the Sherbrooke pedestrian bridge. P. Paultre; J. Proulx; F. Légeron; M. Le Moine; N. Roy. 16<sup>th</sup> IABSE Congress, Lucerne, Switzerland, 2000.*

### **Particular footbridges**

47. *Sacramento river pedestrian bridge USA. C. Redfield; J. Straski. Structural Engineering International, 1991, 4/91.*
48. *Construction of the world's longest pedestrian stress-ribbon bridge. Several authors. FIP notes 98-1, 1998.*
49. *Rebirth of the ribbon. Several authors. Bridge, 1998, 4<sup>th</sup> quarter.*

### **Additional bibliographies**

#### Damping

60. *Mechanical vibrations. J.P. Den Hartog. Mc Graw-Hill, 1940, 4<sup>th</sup> edition.*
61. *Comportement aérodynamique des ponts à haubans à tablier métallique de section ouverte. J.C. Foucriat. Journées techniques AFPC, 1978, Part I.*
62. *On the dynamic vibration damped absorber of the vibration system. T. Ioi; K. Ikeda. Bulletin of the Japanese Society of Mechanical Engineering, 1978, 21, 151.*
63. *Optimal absorber parameters for various combinations of response and excitation parameters. G.B. Warburton. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1982, Vol.10, pp. 381-401.*
64. *Fractional-derivative Maxwell model for viscous dampers. N. Makris; M.C. Constantinou. ASCE Journal of Structural Engineering, 1991, Vol. 117, pp. 2708-2724.*
65. *Dynamic analysis of generalised viscoelastic fluids. N. Makris; G.F. Dargush; M.C. Constantinou. Journal of Engineering Mechanics, 1993, Vol. 119, No. 8.*
66. *Vibration control by multiple tuned liquid dampers. Y. Fujino; L.M. Sun. ASCE Journal of Structural Engineering, 1993, Vol. 119, No. 12.*

#### Technical bulletins of the OTUA (French Steel Information Agency)

67. *Bulletins on steel bridges (ponts métalliques).*
68. *Bulletins on steel structures (ouvrages métalliques).*



Documentations complémentaires sur le comportement des piétons

69. Actes et textes techniques de la Conférence Internationale Footbridge 2002, Paris France, Novembre 2002.
70. Model for lateral excitation of footbridges by synchronous walking. S. Nakamura. ASCE Journal of Structural Engineering, January 2004
71. Experimental study on lateral forces induced by pedestrians. S. Nakamura ; H. Katsuura ; K. Yokoyama. IABSE Symposium, Shanghai, China, September 2004.

Complementary documentations on pedestrian behaviour

72. *Proceedings and technical documentation of the International Footbridge Conference 2002, Paris, France, November 2002.*
73. *Model for lateral excitation of footbridges by synchronous walking. S. Nakamura. ASCE Journal of Structural Engineering, January 2004*
74. *Experimental study on lateral forces induced by pedestrians. S. Nakamura; H. Katsuura; K. Yokoyama. IABSE Symposium, Shanghai, China, September 2004.*