

Guide méthodologique

Passerelles piétonnes

Évaluation du comportement vibratoire sous l'action des piétons



Guide méthodologique

Passerelles piétonnes

Évaluation du comportement vibratoire sous l'action des piétons

Edité par le Sétra, réalisé au sein d'un groupe de travail Sétra/Afgc (Association Française de Génie Civil)

L'Association Française de Génie Civil (AFGC) a pour objet de promouvoir le rayonnement international et le haut niveau technique du génie civil français.

Objectifs principaux de l'AFGC

- Rapprocher les domaines des matériaux et des structures, le monde de l'enseignement et de la recherche et celui de la conception et de l'application. L'Association offre à ses membres de nombreuses rencontres à l'occasion de conférences, de manifestations techniques et scientifiques, et organise des visites de grandes réalisations ;
- Mettre en place des groupes de travail qui accueillent chercheurs, universitaires et ingénieurs pour faire le point de l'état de l'art sur des thèmes importants du génie civil et pour explorer des axes d'innovation. Ces groupes contribuent à l'élaboration en commun de documents techniques publiés par l'Association, qui bénéficient d'un large consensus au niveau national et sont susceptibles d'être reconnus sur le plan international ;
- Être un lien avec les ingénieurs et chercheurs étrangers du monde du génie civil. L'AFGC est la correspondante en France d'Associations Internationales telles l'AIPC (Association Internationale des Ponts et Charpentes), la *fib* (Fédération Internationale du Béton), la RILEM (Réunion Internationale des Laboratoires d'Essais et de Recherches sur les Matériaux et les Constructions) et l'ACI (American Concrete Institute) par l'intermédiaire du Chapitre ACI de Paris.



Association Française de Génie Civil
Régie par la loi du 1^{er} juillet 1901
28 rue des Saints-Pères - 75007 Paris - France
téléphone : (33) 01 44 58 24 70 - télécopie : (33) 01 44 58 24 79
mél : afgc@enpc.fr – internet : <http://www.afgc.asso.fr>

Ce guide a été préparé dans le cadre du groupe de travail Sétra/AFGC sur le « Comportement dynamique des passerelles piétonnes », animé par Pascal Charles (Direction Régionale de l'Équipement de l'Île-de-France puis Sétra) et Wasoodev Hoorpah (OTUA puis MIO).

Rédaction :

- Valérie Boniface (RFR)
- Vu Bui (Sétra)
- Philippe Bressolette (CUST - LERMES)
- Pascal Charles (DREIF puis Sétra)
- Xavier Cespedes (Setec-TPI)
- François Consigny (RFR puis ADP)
- Christian Cremona (LCPC)
- Claire Delavaud (DREIF)
- Luc Dieleman (SNCF)
- Thierry Duclos (Sodeteg puis Arcadis-EEGSimecsol)
- Wasoodev Hoorpah (OTUA puis MIO)
- Eric Jacquelin (Université Lyon1 - L2M)
- Pierre Maitre (Socotec)
- Raphaël Menard (OTH)
- Serge Montens (Systra)
- Philippe Vion (Sétra)

Photos, figures : groupe de travail, sauf mention directement indiquée dans la légende de l'illustration.



Introduction

Les actions exercées par les piétons sur les passerelles peuvent entraîner des phénomènes vibratoires. Ces phénomènes ne sont généralement pas préjudiciables pour la structure, mais peuvent créer une sensation d'inconfort pour l'utilisateur.

Le présent guide présente un état des connaissances sur le comportement dynamique des passerelles sous les chargements piétonniers. Il propose une méthodologie d'analyse et des recommandations afin de guider le projecteur d'une passerelle neuve pour la prise en compte des effets dynamiques.

La méthodologie, basée sur la notion de classe de la passerelle (fonction du niveau de trafic) et sur le niveau d'exigence de confort, s'appuie sur l'interprétation des résultats d'essais réalisés sur la passerelle de Solférino et sur une plate-forme expérimentale. Ces essais ont été financés sur des crédits de la Direction des Routes, et pilotés par le Séttra avec le soutien du réseau scientifique et technique du Ministère des Transports, de l'Équipement, du Tourisme et de la Mer, et plus particulièrement de la DREIF (Division des Ouvrages d'Art et des Tunnels et Laboratoire Régional de l'Est Parisien).

Ce document inclut notamment les éléments suivants :

- une description des phénomènes dynamiques propres aux passerelles piétonnes, avec identification des paramètres qui influent sur le dimensionnement de ces structures ;
- une méthodologie d'analyse dynamique des passerelles sur la base de classes qui sont fonction du niveau de trafic ;
- une présentation des méthodes de calcul pratique des fréquences et modes propres, ainsi que de la réponse au chargement ;
- des recommandations pour l'élaboration des pièces écrites d'études et de travaux.

Des compléments théoriques (rappels de dynamique des structures, modélisation de la charge piétonne) et pratiques (systèmes amortisseurs, exemples de passerelles récentes, exemples de calculs) sont rassemblés dans les annexes jointes au texte du guide.





Sommaire

Préambule	9
1. L'étude dynamique des passerelles piétonnes	11
1.1 - Dynamique des structures et passerelles piétonnes	11
1.1.1 - Généralités	11
1.1.2 - L'oscillateur simple	12
1.1.3 - Études des systèmes complexes	13
1.2 - Le chargement piétonnier	13
1.2.1 - Effets de la marche d'un piéton	13
1.2.2 - Effets de la course d'un piéton	14
1.2.3 - Effets aléatoires de plusieurs piétons et de la foule	14
Flot de piétons de type aléatoire. Modèle classique	14
Flots de piétons à partir de mesures expérimentales	15
Modèle complet de simulation du flot de piétons	15
1.2.4 - Synchronisation forcée d'une foule de piétons	16
Flots de piétons à partir de mesures sur ouvrage réel	16
Théorie formulée à propos de la passerelle du Millenium	17
Essais sur plate-forme réalisée en laboratoire	17
Expérience acquise suite aux essais sur la passerelle de Solférino	18
Conclusions sur la synchronisation forcée	20
1.3 - Paramètres intervenant dans le dimensionnement : fréquence, seuil de confort, critère de confort	21
1.3.1 - Fréquences à risque selon la littérature et les règlements actuels	21
1.3.2 - Seuils de confort	22
1.3.3 - Critères de confort en accélération selon la littérature et les règlements	22
1.4 - Amélioration du comportement dynamique	23
1.4.1 - Modification des fréquences propres de vibrations	23
1.4.2 - Augmentation de l'amortissement structural	23
Amortissement structural naturel des ouvrages	23
Mise en œuvre d'amortisseurs	24
2. Méthodologie d'analyse dynamique des passerelles	25
2.1 - Étape 1 : Détermination de la classe de la passerelle	26
2.2 - Étape 2 : Choix du niveau de confort par le maître d'ouvrage	26
2.2.1 - Définition des niveaux de confort	26
2.2.2 - Plages d'accélération associées aux niveaux de confort	26
2.3 - Étape 3 : Détermination des fréquences et de la nécessité de mener ou non un calcul avec cas de charge dynamiques	27
2.3.1 - Classification des plages de fréquence	27
2.3.2 - Définition des calculs dynamiques à mener	28
2.4 - Étape 4 si nécessaire : calcul avec cas de charge dynamiques	28
2.4.1 - Cas de charge dynamiques	28
Cas 1 : foule peu dense et dense	28
Cas 2 : foule très dense	29
Cas 3 : effet de la 2° harmonique de la foule	30
2.4.2 - Amortissement de l'ouvrage	30

2.5 - Étape 5 : Modification du projet ou de la passerelle	30
2.5.1 - Modification des fréquences propres	31
Vibrations verticales	31
Vibrations de torsion	31
Vibrations horizontales	32
2.5.2 - Diminution structurelle des accélérations	32
2.5.3 - Mise en place d'amortisseurs	32
2.6 - Vérifications structurelles sous charges dynamiques	33
2.6.1 - Vérifications de type E.L.S. spécifiques au comportement dynamique	33
2.6.2 - Vérifications de type E.L.U. spécifiques au comportement dynamique	33
3. Méthodes de calcul pratique	35
3.1 - Méthodes de calcul utilisables	35
3.1.1 - Intégration directe	35
3.1.2 - Calcul modal	35
3.2 - Calcul dynamique appliqué aux passerelles	36
3.2.1 - Calcul des fréquences propres et des modes propres	36
Poutre sur 2 appuis simples	36
Poutre simple avec diverses conditions aux limites	38
Structures quelconques	38
3.2.2 - Calcul pratique de la réponse au chargement	40
Principe	40
Positionnement du chargement	41
Calcul pratique dans le cas général	41
Calcul théorique pour une poutre sur deux appuis	42
4. Cahier des charges études et travaux, épreuves	43
4.1 - Exemples d'éléments pour un cahier des charges d'études de dynamique des passerelles	43
4.2 - Exemples d'éléments à insérer dans le CCTP Travaux d'une passerelle	43
4.3 - Épreuves dynamiques ou essais sur des passerelles	43
4.3.1 - Étape 1 : Caractérisation des modes propres	44
4.3.2 - Étape 2 : Essais de foule	44
Annexe 1 - Rappels de dynamique des structures	45
A.1.1 - L'oscillateur simple	45
A.1.1.1 - Introduction	45
A.1.1.2 - Mise en équation	45
A.1.1.3 - Oscillation libre	46
Amortissement $\xi = 0$: le système est non-amorti (ou conservatif)	46
Amortissement ξ est strictement compris entre 0 et 1	46
A.1.1.4 - Vibration forcée	47
Exposé du problème	47
Excitation harmonique	47
Excitation périodique de période T	48
Excitation quelconque	48
Excitation aléatoire	48
Excitation base	48
A.1.1.5 - Amortissement	49
Généralités	49
Détermination expérimentale de ξ et ω_0 : essais de relaxation	50
Détermination expérimentale de ω_0 et ξ : méthode du pic	50
Amortissement hystérique	50
A.1.2 - Systèmes linéaires à n ddl	51
A.1.2.1 - Mise en équation	51
A.1.2.2 - Système non-amorti	52
Mouvement libre	52
Orthogonalité des modes	52
Excitation harmonique	53
Excitation quelconque	53

A.1.2.3 - Systèmes amortis	54
Hypothèse de Basile	54
Excitation harmonique - cas des systèmes faiblement dissipatifs	54
Excitation quelconque	55
A.1.2.4 - Troncature modale	55
A.1.2.5 - Méthode de Rayleigh-Ritz	55
Méthode de Rayleigh	55
Méthode de Rayleigh-Ritz	56
A.1.2.6 - Conclusion	56
A.1.3 - Systèmes élastiques continus	57
A.1.3.1 - Généralités	57
A.1.3.2 - Mise en équation	57
Mouvement longitudinal d'une barre	57
Mouvement transverse	57
Équations aux limites	58
A.1.3.3 - Modes propres d'un système élastique continu	58
Methodologie	58
Vibrations longitudinales	59
Vibrations transversales (flexion pure)	59
A.1.4 - Discrétisation des systèmes continus	60
A.1.4.1 - Introduction	60
A.1.4.2 - Discrétisation directe des masses	60
A.1.4.3 - Méthode de Rayleigh-Ritz	61
A.1.4.4 - Méthode des éléments finis	62
Faiblesse de la méthode de Rayleigh-Ritz	62
Brefs rappels	62
Annexe 2 - Modélisation de la charge piétonne	63
A.2.1 - Marche	64
A.2.1.1 - Composante verticale	64
A.2.1.2 - Composante horizontale	64
Composante transversale	66
Composante longitudinale	66
A.2.2 - Course	66
A.2.2.1 - Composante verticale	66
A.2.2.2 - Composante horizontale	68
Annexe 3 - Systèmes amortisseurs	69
A.3.1 - Amortisseurs visco-élastiques	69
A.3.1.1 - Principe	69
A.3.1.2 - Implantation et conception des amortisseurs	70
A.3.2 - Amortisseurs visqueux	70
A.3.2.1 - Principe	70
A.3.2.2 - Lois de comportement des amortisseurs visqueux	71
A.3.3 - Amortisseurs dynamiques accordés (ADA)	71
A.3.3.1 - Principe	71
A.3.3.2 - Solution de Den Hartog	71
A.3.3.3 - Solution générale	72
A.3.3.4 - Cas d'un oscillateur primaire amorti	73
A.3.3.5 - Exemples	73
A.3.4 - Amortisseurs dynamiques accordés fluides	73
A.3.5 - Tableau comparatif	74
Annexe 4 - Exemples de passerelles	75
A.4.1 - Poutres latérales type Warren : passerelle de Cavailon	75
A.4.2 - Poutre caisson métallique : passerelle du Stade de France	76
A.4.3 - Dalle nervurée : passerelle de Noisy-le-Grand	76
A.4.4 - Arc Bow-string : passerelle de Montigny-lès-Cormeilles	77

A.4.5 - Structure suspendue : passerelle sur l'Aisne à Soissons	77
A.4.6 - Arc métallique : passerelle de Solférino	78
A.4.7 - Structure haubanée : passerelle du Pas du lac à St Quentin	79
A.4.8 - Poutre en ossature mixte : passerelle de Mont-Saint-Martin	79
Annexe 5 - Exemples de calcul de passerelles	80
A.5.1 - Exemples de calculs complets de passerelles	80
A.5.1.1 - Passerelle à poutres latérales de type Warren	80
Classe III	81
Classe II	81
Classe I	82
Récapitulatif	83
Raidissement de la structure	83
A.5.1.2 - Passerelle en caisson	83
Classe III	84
Classe II	84
Classe I	85
Récapitulatif	86
Passerelle en caisson métallique raidi	86
A.5.2 - Étude de sensibilité de passerelles types	87
A.5.2.1 - Présentation des passerelles étudiées et prédimensionnement statique	87
Passerelle en béton armé	87
Passerelle en béton précontraint	87
Passerelle en acier ou mixte	88
Passerelle treillis métallique	88
A.5.2.2 - Fréquences propres	89
Bibliographie	90
Généralités	90
Règles	90
Amortisseurs	90
Analyse du comportement	90
Méthodes de calcul	91
Articles sur passerelle soit vibrante, soit instrumentée	91
Passerelles spécifiques	92
Bibliographies complémentaires	92
Amortissement	92
Bulletins techniques de l'OTUA	92
Documentations complémentaires sur le comportement des piétons	92



Préambule

Le présent document a été élaboré sur la base des connaissances scientifiques et techniques actuelles acquises en France et à l'étranger. La réglementation française ne donne aucune indication au sujet des phénomènes dynamiques et vibratoires des passerelles, et les règles européennes présentent des insuffisances sur certains aspects particuliers mis en évidence sur des ouvrages récents.

La fermeture de deux passerelles piétonnes situées en plein centre de Paris et Londres, très rapidement après leur inauguration car elles présentaient des oscillations transversales gênantes en présence de foules, a conduit à des études plus poussées de leur comportement sous l'action des piétons. Ces études ont nécessité la mise en œuvre d'essais in-situ, et ont confirmé l'existence d'un phénomène qui s'était déjà manifesté auparavant mais qui est resté assez peu connu du milieu scientifique et technique. Ce phénomène appelé « synchronisation forcée », « lock-in » en anglais, est à l'origine de la vibration transversale à fortes amplitudes de ces passerelles.

Il est apparu utile de publier un guide faisant la synthèse des problèmes dynamiques pouvant se poser aux passerelles, avec comme ambition de fournir aux concepteurs et projeteurs les informations et les moyens pour éviter la reproduction d'incidents du même type.

Ce guide s'applique aux passerelles pour des utilisations normales vis-à-vis du critère de confort, et pour des cas de vandalisme vis-à-vis de la résistance. Ce guide ne s'applique pas pour garantir le confort dans le cas de manifestations exceptionnelles sur les passerelles : marathon, manifestation, bal, défilé militaire, inauguration, etc.

Le comportement dynamique des passerelles sous les effets du vent n'est pas traité dans ce guide.

La méthodologie d'analyse dynamique est fonction de la classe de la passerelle qui dépend du niveau de trafic. Cela signifie que les passerelles en site urbain ne sont pas traitées de la même manière que les passerelles en rase campagne.

Le rôle du Maître d'Ouvrage est important, car c'est lui qui choisit le critère de confort pour la passerelle, et cela influe sur la conception de la structure. Pour un confort maximal on ne tolérera aucune vibration sur la passerelle, la structure sera alors, soit peu élancée donc éventuellement peu esthétique, soit élancée mais équipée d'amortisseurs donc plus chère et compliquée à entretenir. Pour un confort minimal on pourra autoriser des vibrations modérées et maîtrisées sur la passerelle, la structure sera plus élancée donc en général plus esthétique, et elle pourra aussi être équipée d'amortisseurs.

Ce document n'est qu'un guide et les dispositions proposées ne le sont qu'au titre de conseil sans aucun caractère d'obligation.

Notations Principales

$A(\omega)$:	amplification dynamique
$[C]$:	matrice d'amortissement
C_i :	amortissement n° i d'un système à n degrés de liberté (N/(m/s))
E :	module de Young (N/m ²)
$F(t)$:	excitation dynamique (N)
$[F(t)]$:	vecteur chargement dynamique
F_0 :	amplitude d'une force harmonique (N)
$[F_0]$:	vecteur amplitude d'une force harmonique (N)
$H_{r,e}(\omega)$:	fonction de transfert entre l'entrée e et la réponse r
I :	inertie d'une poutre (m ⁴)
J :	inertie de torsion d'une poutre (m ⁴)
$[K]$:	matrice de raideur
K_i :	raideur n° i d'un système à n degrés de liberté (N/m)
L :	longueur d'une poutre (m)
$[M]$:	matrice de masse
M_i :	masse n° i d'un système à n degrés de liberté (kg)
S :	section d'une poutre (m ²)
$[X]$:	vecteur des degrés de liberté
c_i :	amortissement généralisé du mode i
f_0 :	fréquence propre d'un oscillateur simple (Hz)
f_i :	ième fréquence propre d'un oscillateur à n degrés de liberté (Hz)
f :	fréquence
k_i :	raideur généralisée du mode i
m_i :	masse généralisée du mode i
N :	nombre de piétons
$[p(t)]$:	vecteur des participations modales
$[q(t)]$:	vecteur des variables modales
t :	variable désignant le temps (s)
$u(t), v(t), w(t)$:	déplacements (m)
$x(t)$:	position d'un oscillateur simple repérée par rapport à sa position d'équilibre (m)
Ω :	pulsation réduite
δ :	décrément logarithmique
ξ_i :	ième taux d'amortissement critique d'un oscillateur à n degrés de liberté (sans unité)
ρ :	masse volumique (kg/m ³)
$[\phi_i]$:	ième vecteur propre
$\phi(\omega)$:	argument de $H_{r,e}$ - déphasage entre l'entrée et la sortie (rad)
ω_0 :	pulsation propre d'un oscillateur simple (rad/s) : $\omega_0 = 2 \pi f_0$
ω_i :	ième pulsation propre d'un oscillateur à n degrés de liberté (rad/s) : $\omega_i = 2 \pi f_i$
ω :	pulsation (rad/s)



1. L'étude dynamique des passerelles piétonnes

Ce premier chapitre a pour objectif de dresser l'état des lieux des connaissances sur les phénomènes dynamiques se produisant sur les passerelles piétonnes. Il présente aussi les différents essais réalisés, ainsi que les études qui permettront d'aboutir aux recommandations décrites dans le chapitre suivant.

1.1 - Dynamique des structures et passerelles piétonnes

1.1.1 - Généralités

Les charges statiques sont par définition des charges constantes ou très peu variables dans le temps (quasi-statiques). A l'inverse, les charges dynamiques, fonction du temps, peuvent être classées dans quatre catégories :

- les charges harmoniques ou purement sinusoïdales ;
- les charges périodiques qui se répètent à l'identique à des intervalles réguliers de temps appelés périodes ;
- les charges aléatoires qui varient de façon arbitraire à la fois en durée, en intensité, en direction... ;
- les charges d'impulsion qui caractérisent les charges de très brèves durées.

Grosso modo l'action des piétons est une action variable dans le temps et qui peut être classée dans la catégorie de charges périodiques. Une des caractéristiques principales de l'action dynamique des piétons est sa faible intensité. Appliquée à des structures très rigides et massives cette action aurait peu de chance de les faire vibrer de manière sensible. Cependant les évolutions à la fois esthétiques, techniques et technologiques qui conduisent à une recherche de structures de plus en plus élancées, de plus en plus souples font que les passerelles piétonnes, n'échappant pas à cette tendance générale, sont à l'heure actuelle conçues et réalisées avec une sensibilité bien plus grande vis à vis des déformations. En conséquence c'est plus souvent qu'elles demandent un traitement dynamique plus approfondi.

L'étude d'un modèle élémentaire qu'on appelle oscillateur simple permet d'illustrer les principes de base d'une analyse dynamique et met en évidence le rôle des différents paramètres structuraux impliqués dans le processus. Il n'est rappelé ici que les principaux résultats directement utiles aux projeteurs. L'annexe 1 du guide donne une présentation plus approfondie de ces résultats et traite aussi de la généralisation aux modèles complexes.

1.1.2 - L'oscillateur simple

L'oscillateur simple est constitué d'une masse m , reliée à un support par l'intermédiaire d'un ressort linéaire de raideur k et d'un amortisseur linéaire de viscosité c et sollicité par une force extérieure $F(t)$ (figure 1.1). Cet oscillateur est supposé ne pouvoir se déplacer que par translation dans une seule direction et a ainsi 1 seul degré de liberté (noté « ddl » dans la suite du document) défini par la position $x(t)$ de sa masse. Les calculs détaillés figurent en Annexe 1.

Les paramètres dynamiques caractéristiques et propres à cet oscillateur sont :

- $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2 \pi f_0$: pulsation propre (rad/s), f_0 étant la fréquence propre (Hz). On rappelle que m est une masse : son unité S.I. est donc le kilogramme.

- $\xi = \frac{c}{2\sqrt{k m}}$: taux d'amortissement critique (sans dimension) ou pourcentage d'amortissement critique. Dans la pratique ξ est toujours inférieur à 1. Toutefois, il faut avoir conscience que l'on ne peut avoir qu'une estimation du taux d'amortissement critique tant que l'on n'a pas réalisé des essais expérimentaux. L'origine de l'amortissement est très variée : elle dépend des matériaux (acier, béton, bois...), de la fissuration ou non dans le cas du matériau béton (béton armé, béton précontraint), des assemblages dans le cas du matériau acier (boulonnage, soudage,...).

Le phénomène de résonance est particulièrement bien mis en évidence lorsqu'on excite l'oscillateur simple avec une force harmonique (ou sinusoïdale) de la forme $F_0 \sin(\omega t)$.

Si par définition sa réponse statique obtenue avec une force constante égale à F_0 est :

$$x_{\text{statique}} = \frac{F_0}{k} = \frac{F_0 / m}{\omega_0^2}$$

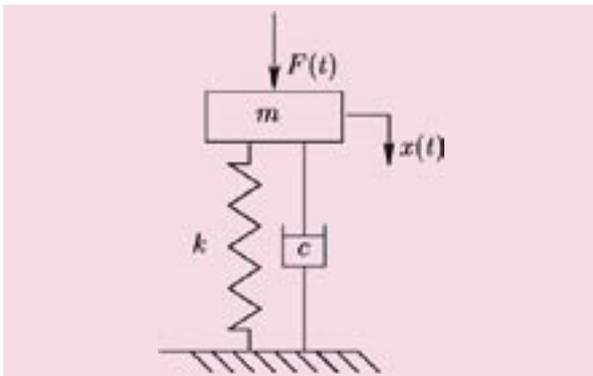


Figure 1.1 : oscillateur simple

la réponse dynamique peut être amplifiée d'un facteur $A(\Omega)$ et est égale à :

$$x_{\text{max}} = x_{\text{statique}} A(\Omega)$$

où :

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ est la pulsation réduite (ou relative)}$$

et :

$$A(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2}} \text{ est l'amplification dynamique.}$$

L'amplification dynamique est fonction de Ω et de ξ . On peut la représenter par une famille de courbes paramétrées par ξ . Quelques unes d'entre-elles sont données sur la figure 1.2 pour quelques valeurs particulières du pourcentage d'amortissement critique. Ces courbes présentent un maximum pour

la valeur de $\Omega_R = \sqrt{1-2\xi^2}$ caractérisant la résonance

et qui correspond donc à la pulsation de résonance

$$\omega_R = \omega_0 \sqrt{1-2\xi^2} \text{ et à la fréquence de résonance}$$

$$f_R = \frac{\omega_R}{2\pi}. \text{ Dans ce cas la réponse est supérieure (voire}$$

très supérieure) à la réponse statique.

On notera que la résonance n'a pas lieu pour $\omega = \omega_0$ mais pour $\omega = \omega_R$. Compte-tenu en pratique des amortissements faibles des structures on peut considérer qu'il y a résonance pour $\omega = \omega_0$ et que l'amplification vaut :

$$A(\Omega_R = 1) = \frac{1}{2\xi}$$

Le dimensionnement des structures sur la base de chargements dynamiques ne peut pas être fait en utilisant uniquement l'intensité maximale de la sollicitation. Ainsi, par exemple, la charge $F(t) = F_0 \sin(\omega_1 t)$ peut générer des déplacements ou contraintes très inférieurs à la charge

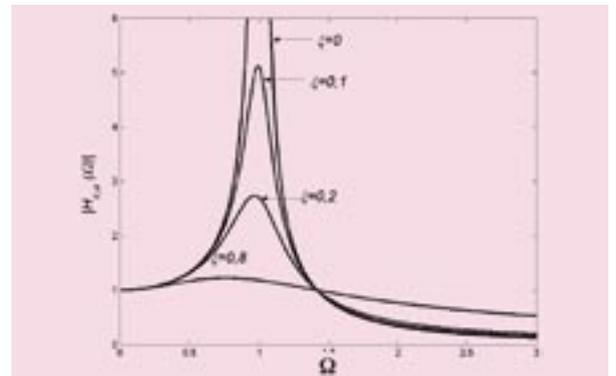


Figure 1.2 : courbes de résonance

$F(t) = (F_0/10) \sin(\omega_2 t)$ qui a pourtant une amplitude 10 fois moindre, si cette deuxième a une fréquence bien plus proche de la fréquence de résonance de la structure.

L'amplification par la résonance étant directement liée à l'amortissement, il est donc indispensable de bien estimer ce paramètre afin de réaliser un dimensionnement dynamique correct. Il faut noter que l'étude de l'oscillateur simple repose sur l'hypothèse de l'amortissement linéaire (visqueux, avec une force d'amortissement proportionnelle à la vitesse), qui est un type d'amortissement parmi d'autres. C'est cependant l'hypothèse retenue par la plupart des ingénieurs et concepteurs de passerelles.

1.1.3 - Études des systèmes complexes

L'étude des structures réelles qui sont généralement des systèmes continus complexes avec un nombre important de degrés de liberté peut se ramener à l'étude d'un ensemble de n oscillateurs simples, chacun d'entre eux décrivant une vibration caractéristique du système. Les principes des méthodes d'approximations qui permettent un tel passage sont présentés de manière détaillée dans l'annexe 1. L'élément nouveau par rapport à l'oscillateur simple est le mode propre défini par le couple formé par une pulsation et une déformée (ω_p, ϕ_p) du système. Le calcul des modes propres est relativement compliqué mais les projeteurs disposent à l'heure actuelle d'excellents logiciels pour les obtenir, pourvu qu'ils appliquent lors de la modélisation toutes les précautions d'usage dispensées dans tout enseignement d'analyse modale. L'utilisation pratique des modes propres est abordée dans le chapitre 3.

Il faut signaler enfin que dans certains cas, le problème peut même être approché par un seul oscillateur simple. Dans tous les cas, les principales conclusions obtenues dans l'étude de l'oscillateur simple sont généralisables aux systèmes complexes.

Désignation	Spécificité	Plage de fréquences (Hz)
Marche	Contact continu avec le sol	1,6 à 2,4
Course	Contact discontinu	2 à 3,5

Tableau 1.1

1.2 - Le chargement piétonnier

1.2.1 - Effets de la marche d'un piéton

L'action d'un piéton que ce soit pendant la marche ou la course a été étudiée de manière assez approfondie (voir l'annexe 2) et se traduit par une force ponctuelle exercée sur le support, fonction du temps et de la position du piéton. En notant x la position de celui-ci par rapport à l'axe de la passerelle, l'action d'un piéton qui se déplace à une vitesse constante v peut donc être représentée par le produit d'une composante temporelle $F(t)$ et d'une composante spatiale $\delta(x - vt)$, δ étant l'opérateur de Dirac, soit :

$$P(x,t) = F(t) \delta(x - vt)$$

De nombreux paramètres peuvent aussi affecter et faire varier cette action (démarche, caractéristiques physiologiques et vestimentaires, rugosité du sol...), mais les mesures expérimentales réalisées ont montré qu'elle est du type périodique, caractérisée par le paramètre fondamental qui est la fréquence, c'est-à-dire le nombre de pas à la seconde. Les valeurs estimées de cette fréquence se trouvent dans le tableau 1.1

Classiquement, pour la marche normale (non gênée), la fréquence peut être décrite par une distribution gaussienne de moyenne 2 Hz et d'écart type 0,20 Hz environ (de 0,175 à 0,22 selon les auteurs). Des études plus récentes ainsi que les enseignements issus d'essais récents ont même montré que la fréquence moyenne était plus basse, vers 1,8 Hz - 1,9 Hz.

La fonction périodique $F(t)$, peut donc être décomposée en une série de Fourier c'est-à-dire une partie constante augmentée d'une somme infinie de forces harmoniques. La somme de toutes les contributions élémentaires des termes de cette somme redonne l'effet total de l'action périodique.

$$F(t) = G_0 + G_1 \sin 2\pi f_m t + \sum_{i=2}^N G_i \sin(2\pi f_m t - \varphi_i)$$

avec

G_0 : la force statique (poids du piéton pour la composante verticale) ;

G_i : l'amplitude de la première harmonique ;

G_i : l'amplitude de la i -ème harmonique ;

f_m : la fréquence de la marche ;

φ_i : le déphasage de la i -ème harmonique par rapport à la première ;

N : le nombre d'harmoniques prises en compte.

La valeur moyenne de 700 N peut être prise pour G_0 , poids d'un piéton.

À la fréquence moyenne située autour de 2 Hz ($f_m = 2$ Hz) pour l'action verticale, les valeurs des coefficients de la décomposition de Fourier de $F(t)$ sont les suivantes (en se limitant aux trois premiers termes, c'est-à-dire $N = 3$, les coefficients des termes d'ordre supérieur étant inférieurs à 0,1 G_0) :

$$G_1 = 0,4 G_0 ; G_2 = G_3 \approx 0,1 G_0 ; \\ \varphi_2 = \varphi_3 \approx \pi/2.$$

En décomposant la force en trois composantes, à savoir une composante « verticale » et deux composantes horizontales (une dans le sens du déplacement dite « longitudinale » et une perpendiculaire au déplacement dite « transversale » ou « latérale »), on peut retenir pour le dimensionnement, en se limitant à la première harmonique dans la pratique, les valeurs suivantes de ces composantes

Composante verticale de l'action d'un piéton :

$$F_v(t) = G_0 + 0,4G_0 \sin(2\pi f_m t)$$

Composante horizontale transversale de l'action d'un piéton :

$$F_h(t) = 0,05G_0 \sin\left(2\pi\left(\frac{f_m}{2}\right)t\right)$$

Composante horizontale longitudinale de l'action d'un piéton :

$$F_h(t) = 0,2G_0 \sin(2\pi f_m t)$$

On notera que pour une même marche, la fréquence de l'action transversale de la marche est égale à la moitié de celle de l'action verticale et longitudinale. Ceci est lié au fait que la période de l'action est égale à la durée entre deux pas consécutifs pour l'action verticale et l'action longitudinale, car les deux pas en question exercent une force dans le même sens, alors que cette durée est celle correspondant à deux pas droits consécutifs ou deux pas gauches consécutifs dans le cas de l'action transversale, car les pas gauches et les pas droits exercent des actions dans des sens opposés. De ce fait, la période de l'action transversale est deux fois plus élevée que pour les actions verticales et longitudinales, et donc la fréquence est deux fois plus faible.

1.2.2 - Effets de la course d'un piéton

Les effets de la course d'un piéton sont présentés dans l'annexe 2. Ce cas de charge qui peut s'avérer très dimensionnant n'est pas à retenir de manière systématique pour le dimensionnement. Bien souvent, le temps de passage de joggeurs est relativement court ce qui ne laisse pas beaucoup de temps au phénomène de résonance pour se mettre en place, et cela indispose les autres piétons sur une durée très courte. En plus, il ne permet pas de couvrir l'organisation de manifestations exceptionnelles comme un marathon qui doit faire l'objet d'une étude particulière. On négligera donc ces effets dans la suite du guide.

1.2.3 - Effets aléatoires de plusieurs piétons et de la foule

Les passerelles sont dans la pratique soumises à l'action simultanée de plusieurs personnes, ce qui complique fortement leur analyse dynamique. En effet, chaque piéton possède ses propres caractéristiques (poids, fréquence, vitesse...) et, selon le nombre de personnes présentes sur l'ouvrage, les piétons vont engendrer des actions plus ou moins synchrones entre elles d'une part et éventuellement avec la passerelle d'autre part. S'ajoutent à cela les déphasages initiaux entre piétons qui sont dus à leurs moments d'entrée respectifs sur la passerelle.

De plus, le problème du comportement intelligent de l'être humain, qui fait que le piéton placé au milieu d'autres et face à une situation différente de celle à laquelle il s'attend va modifier sa marche naturelle et normale de façons diverses, se prête difficilement à un traitement par logiciel.

Il est donc très difficile de simuler complètement l'action réelle d'une foule. Tout au plus peut-on faire des hypothèses raisonnables et simplificatrices bâties à la suite d'études sur le comportement des piétons, et de supposer ensuite que l'effet d'une foule se déduit par multiplication de l'effet élémentaire d'un piéton, éventuellement pondéré par un coefficient réducteur. Quelques idées existent et sont antérieures aux incidents des passerelles de Solférino et du Millenium. Elles sont présentées dans les paragraphes qui suivent, de même qu'une étude statistique plus exhaustive qui va servir de base aux chargements recommandés dans le présent guide.

Flot de piétons de type aléatoire. Modèle classique

Pour un grand nombre de piétons indépendants (c'est-à-dire sans synchronisation particulière) se présentant à un taux d'arrivée λ (en personne/seconde) pour traverser une passerelle de manière aléatoire, la réponse dynamique moyenne en un point de la passerelle soumise à ce flot de piétons est obtenue en multipliant l'effet produit par un piéton par un facteur $k = \sqrt{\lambda T}$, T étant le temps mis par un piéton pour traverser la passerelle (qui peut aussi être exprimé par $T = L/v$ si L représente la longueur de la passerelle et v la vitesse du piéton). Le produit λT représente en fait le nombre N de piétons présents à un moment donné sur la passerelle. Cela revient en pratique à dire que N piétons sur une passerelle sont équivalents à \sqrt{N} tous synchronisés. Ce résultat peut se démontrer en considérant une foule de piétons tous à la même fréquence ayant une distribution de phases aléatoires.

Ce résultat tient compte du déphasage entre piétons dû à leurs temps d'entrée différents mais comporte une lacune car, par hypothèse, tous les piétons se déplacent à une même fréquence.

Flots de piétons à partir de mesures expérimentales

Différents chercheurs ont étudié les sollicitations engendrées par un groupe de personnes à partir de mesures sur des plate-formes instrumentées sur lesquelles de petits groupes de piétons se déplacent.

Ebrahimipour et al. (réf. [24]) proposent ainsi un modèle de chargement de foule peu dense basé sur le premier terme d'une représentation de Fourier et dont le coefficient α_i dépend du nombre N_p de personnes présentes sous la forme suivante (pour une fréquence de marche de 2 Hz) :

$$\alpha_i = 0,34 - 0,09 \log(N_p) \quad \text{pour } N_p < 10$$

$$\alpha_i = 0,25 \quad \text{pour } N_p > 10$$

Ce modèle ne porte malheureusement pas sur le cumul d'effets aléatoires de piétons.

Modèle complet de simulation du flot de piétons

Jusqu'à encore tout récemment le dimensionnement dynamique des passerelles restait principalement basé sur le cas du modèle de charge théorique d'un seul piéton, complété de prescriptions assez simplistes relatives à des valeurs planchers de rigidité ou de fréquence propre de la passerelle. Il est manifeste que ces prescriptions sont très insuffisantes et ne permettent pas notamment de couvrir les principaux problèmes posés par l'utilisation de passerelles en zone urbaine soumises plutôt à une fréquentation de groupes de piétons et de foule plus ou moins dense. Même le modèle en \sqrt{N} explicité ci-dessus présente des lacunes.

Les limites des connaissances sur le comportement d'une foule sont vite apparentes mais rendent d'autant plus pressant le besoin de disposer de moyens pratiques de dimensionnement. Il vaut mieux proposer des éléments assez simples au départ, mais utiles et perfectibles que de rester dans le vide actuel.

Plusieurs cas de charge de foule ont donc été élaborés en utilisant des calculs de probabilités et un traitement statistique pour creuser un peu plus la question d'une foule aléatoire. Le modèle retenu finalement consiste à faire circuler des piétons de fréquences et phases aléatoires sur une passerelle présentant différents modes, et d'évaluer à chaque fois le nombre de piétons équivalents, qui régulièrement répartis sur la passerelle, tous en phase et à la fréquence propre de la passerelle, produiraient le même effet que les piétons aléatoires.

Pour tenir compte de l'effet statistique, il a été procédé à plusieurs essais numériques. Pour chaque essai comportant N piétons et pour chacun de ces piétons, on tire une phase aléatoire φ et une fréquence aléatoire ($f = \frac{\omega}{2\pi}$) de distribution normale centrée autour de la fréquence propre de la passerelle et d'écart type 0,175 Hz ; on note le maximum de l'accélération sur une durée suffisamment longue (en l'occurrence dans ce cas le temps nécessaire à un piéton pour franchir deux fois la passerelle à la vitesse de 1,5 m/s), et on calcule le nombre de piétons équivalents qui seraient parfaitement synchronisés. La figure 1.3 explicite la méthode utilisée.

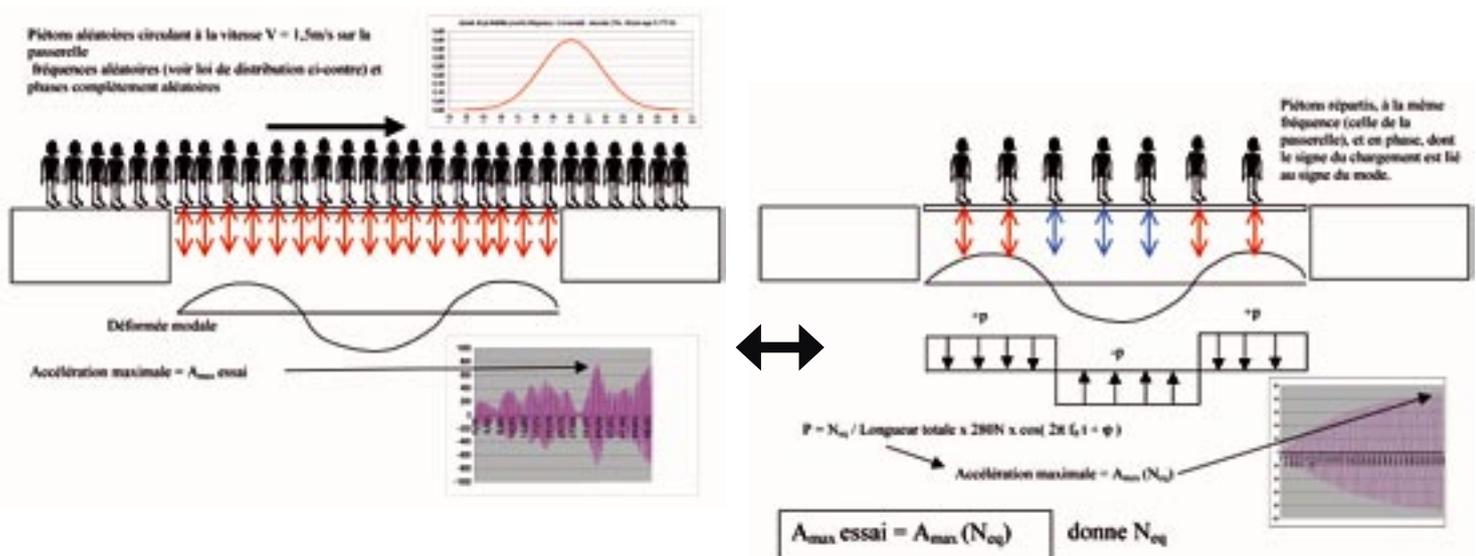


Figure 1.3 : méthodologie pour le calcul du nombre de piétons équivalents

On a reproduit ces essais à nombre de piétons fixé, amortissement fixé, nombre de ventres du mode fixé, 500 fois, puis on a déterminé la valeur caractéristique telle que 95 % des tirages donnent une valeur inférieure à cette valeur caractéristique (valeur caractéristique à 95 %, percentile 95, ou encore fractile 95 %). La figure 1.4 ci-dessous explicite cette notion :

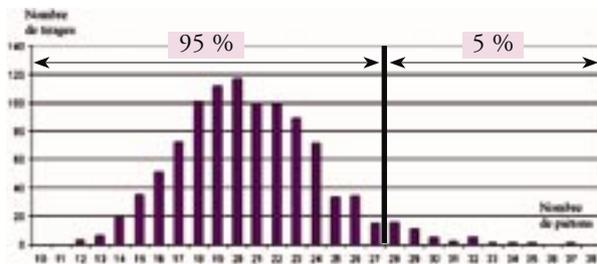


Figure 1.4 : notion de fractile 95 %

En faisant varier l'amortissement, le nombre de piétons, le nombre de ventres du mode, on peut en déduire une loi du nombre de piétons équivalents qui est celle qui se rapproche le plus des essais réalisés.

On retiendra les deux lois suivantes :

Foule peu dense ou dense : phases aléatoires et fréquences distribuées suivant une loi de Gauss : $N_{eq} = 10,8 \sqrt{N\xi}$ où N est le nombre de piétons présents sur la passerelle (densité \times surface) et ξ le pourcentage d'amortissement critique.

Foule très dense : phases aléatoires et tous les piétons à la même fréquence : $N_{eq} = 1,85 \sqrt{N}$.

L'utilisation de ce modèle dans les calculs est considérablement simplifiée. Il suffit de répartir les N_{eq} piétons sur l'ouvrage, de leur appliquer une force dont le signe de l'amplitude est le même que le signe de la déformée modale, de considérer cette force à la fréquence propre de la structure et de calculer l'accélération maximale obtenue à la résonance. Le chapitre 3 donne des indications sur la prise en compte de ce chargement.

Il est à noter que ce nombre est très conservatif. Sur des cas particuliers, notamment des passerelles de courte longueur, il est possible de le réduire moyennant des études basées sur la même logique que celle décrite ci-dessus.

1.2.4 - Synchronisation forcée d'une foule de piétons

La synchronisation forcée traduit le phénomène par lequel une foule de piétons, dont les fréquences sont distribuées aléatoirement autour d'une valeur moyenne, et dont les déphasages sont aléatoires, vient progressivement se coordonner à une fréquence commune (celle de la passerelle) et à se mettre en phase par rapport aux mouvements de la passerelle.

A ce jour les cas connus de synchronisation forcée d'une foule se sont limités à des passerelles qui se mettent en vibration transversalement. Les deux cas les plus récents et maintenant célèbres sont la passerelle Solférino et la passerelle du Millenium pour lesquelles des essais in-situ assez poussés ont été menés. Confirmation a été ainsi de nouveau faite et le phénomène est nettement expliqué par la réaction du piéton qui modifie sa cadence de marche lorsque les mouvements transversaux de la passerelle lui sont perceptibles et commencent à le gêner. Pour compenser son déséquilibre naissant, il est conduit de manière instinctive à suivre la fréquence des mouvements de la passerelle. Il provoque ainsi directement le phénomène de résonance et comme tous les piétons subissent le phénomène, le problème continue en s'amplifiant et la foule entière peut théoriquement devenir synchronisée. Heureusement d'une part la synchronisation réelle est bien plus faible et d'autre part, quand les mouvements de la passerelle sont tels que les piétons ne peuvent plus mettre un pied devant l'autre ils sont obligés de s'arrêter de marcher et le phénomène ne peut donc diverger.

Flots de piétons à partir de mesures sur ouvrage réel

A partir de mesures sur une grande passerelle ayant une travée principale de 5,25 m x 134 m et pouvant être soumise à une foule très dense (jusqu'à environ 2 personnes/m²), Fujino et al. (réf. [30]) ont constaté que l'application du facteur \sqrt{N} présenté ci-dessus sous-estimait d'un facteur de 1 à 10 l'amplitude réelle constatée des vibrations latérales. Ils ont formulé l'hypothèse d'une synchronisation de la marche de la foule à la fréquence du mode transversal de leur passerelle pour expliquer le phénomène et ont pu ainsi vérifier dans ce cas l'ordre de grandeur des mesures réalisées. C'est le phénomène que nous qualifierons de synchronisation forcée et qui mérite d'être présenté plus en détail dans la suite.

Pour cette structure, en ne retenant que le premier terme de la décomposition de Fourier du chargement apporté par un piéton, ces auteurs proposent d'utiliser un facteur multiplicatif de 0,2 N , pour représenter le chargement qui serait équivalent à celui de la foule de n personnes et qui leur permettrait de retrouver l'ordre de grandeur des déplacements effectivement mesurés (0,01 m).

Théorie formulée a propos de la passerelle du Millenium

L'équipe d'Arup a fait paraître un article très détaillé sur les résultats obtenus suite à l'étude et aux essais effectués sur la passerelle du Millenium. (réf. [38]). Il n'est rappelé ici que ses principales conclusions.

Le modèle proposé lors de l'étude de la passerelle du Millenium est le suivant : la force exercée par un piéton (en N) est supposée reliée à la vitesse de la passerelle.

$F_{\text{piéton}} = KV(x,t)$ où K est un coefficient de proportionnalité (en Ns/m) et V la vitesse de la passerelle au point x considéré et à l'instant t .

Sous cette forme l'action du piéton peut s'interpréter comme un amortissement négatif. Par suite de l'hypothèse d'un amortissement visqueux de la passerelle, celui-ci est diminué directement de l'amortissement négatif produit par un piéton. La synchronisation forcée a pour conséquence de faire croître cet amortissement négatif par la participation d'un nombre plus important de piétons. La notion commode de nombre critique apparaît de ce fait : c'est le nombre de piétons au-delà duquel leur amortissement négatif cumulé devient supérieur à l'amortissement propre de la passerelle; tout se passerait alors comme si l'on avait un oscillateur instable : une petite perturbation peut engendrer des mouvements qui s'amplifient indéfiniment...

Pour le cas particulier d'un mode de vibration horizontale sinusoidal (l'amplitude maximale de ce mode étant normée à 1, f_j représentant la première fréquence propre transversale et m_j la masse généralisée dans ce mode en considérant le déplacement maximal unitaire), et en supposant une répartition uniforme

des piétons, alors le nombre critique peut s'écrire sous la forme :

$$N = \frac{8\pi\zeta m_j f_j}{K}$$

K est le coefficient de proportionnalité qui a pour valeur 300 Ns/m dans le cas de la passerelle du Millenium.

On peut alors constater qu'un faible amortissement, une faible masse ou une faible fréquence se traduisent par un nombre critique peu élevé et donc un risque de synchronisation forcée plus élevé. Ce serait donc sur ces trois paramètres qu'il faudrait agir pour augmenter le nombre critique.

Il faut noter que la valeur du coefficient K n'est pas a priori généralisable à toute structure et son emploi augmente donc l'incertitude dans l'application du critère.

Essais sur plate-forme réalisée en laboratoire

Afin de mieux quantifier l'action horizontale d'un piéton et les effets de synchronisation forcée des piétons sous un mouvement latéral, des essais ont été réalisés sur un modèle réduit de passerelle, en recréant, par analyse dimensionnelle, les conditions d'une passerelle réelle de conception relativement simple (un seul mode horizontal).

Le principe consiste à faire supporter une dalle de 7 m de long et 2 m de large par 4 lames de flexion se déplaçant latéralement, et de mettre en place des rampes d'accès et de sortie et un circuit de façon à maintenir la continuité de la marche (photo 1). Pour maintenir cette continuité, il faut évidemment un grand nombre de piétons sur le circuit, ce nombre de piétons étant nettement plus important que le nombre de piétons situés sur la passerelle à un instant donné.

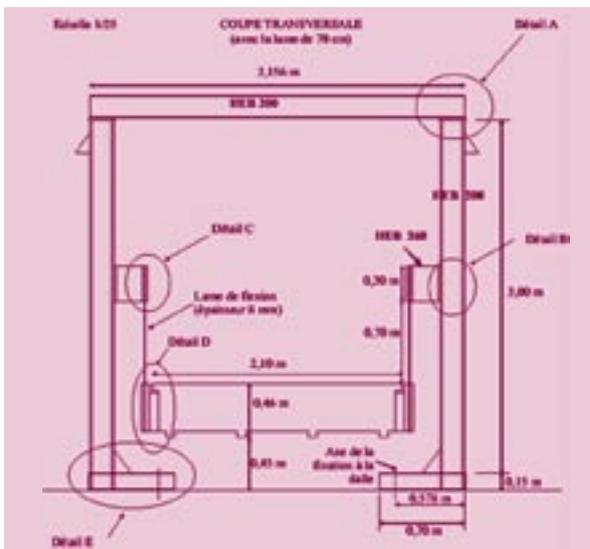


Photo 1 : description du modèle – Source : DREIF

En reconstituant la force instantanée à partir des déplacements mesurés (au préalable filtrés pour atténuer l'effet des hautes fréquences) ($F(t) = m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t)$). On constate sur la figure 1.5 que, dans un premier temps, pour un piéton isolé l'amplitude de la force du piéton reste constante, autour de 50 N et en tous les cas inférieures à 100 N, quelle que soit l'amplitude des vitesses. Dans un deuxième temps, on constate que l'amplitude de la force augmente jusqu'à 150 N, mais il ne faut pas tenir compte des dernières oscillations qui représentent l'arrêt de l'essai.

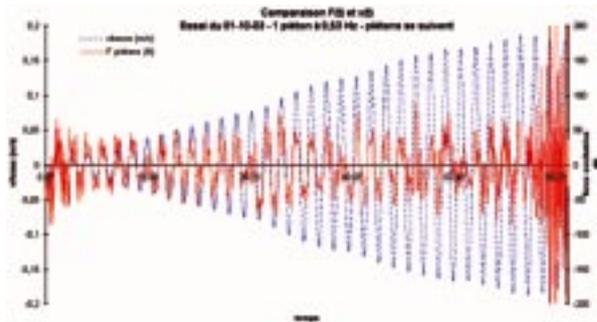


Figure 1.5 : force et vitesse en régime résonant forcé

On a une valeur de pic qui ne dépasse pas 100 N et est plutôt de l'ordre de 50 N en moyenne, la première harmonique de ce signal étant située vers 35 N.

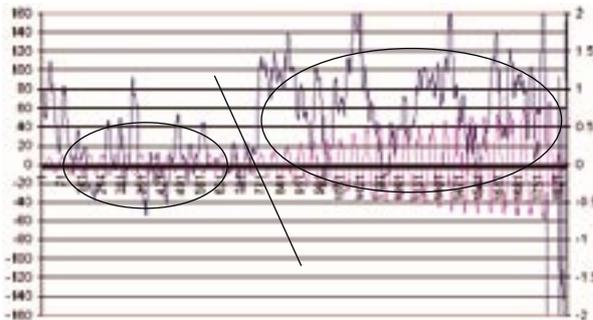


Figure 1.6 : accélération (m/s^2) et force efficace (en N) avec 6 piétons aléatoires sur la passerelle

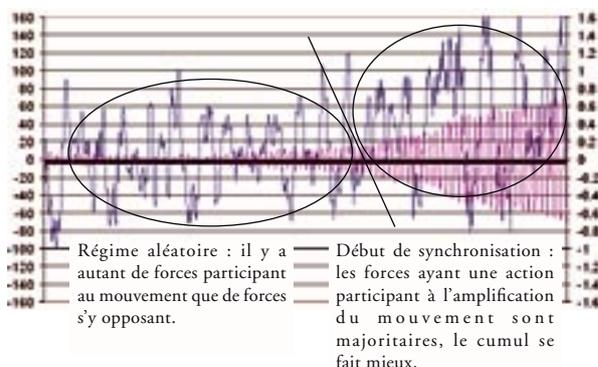


Figure 1.7 : accélération (m/s^2) et force efficace (en N) avec 10 piétons aléatoires sur la passerelle

Les graphes (figures 1.6 et 1.7) représentent sur la même figure les accélérations au cours du temps (courbe rose, échelle sur la partie droite en m/s^2 , variation de 0,1 à 0,75 m/s^2) et la force « efficace » (Force instantanée multipliée par le signe de la vitesse, en faisant la moyenne sur une période, qui est donc positive lorsque l'on injecte de l'énergie au système et négative dans le cas contraire) pour un groupe de piétons (courbe bleue, échelle sur la partie gauche en N).

On constate qu'à partir d'une certaine valeur, la force exercée par les piétons est nettement plus efficace et un début de synchronisation apparaît. Ce seuil se situe autour de 0,15 m/s^2 (droite entre la zone de régime aléatoire et la zone de début de synchronisation). Néanmoins, la synchronisation n'est que très partielle (valeurs maximales de 100 - 150 N soit 0,2 à 0,3 fois l'effet de 10 piétons), mais cela est largement suffisant pour provoquer des vibrations très inconfortables ($> 0,6 m/s^2$).

Expérience acquise suite aux essais sur la passerelle de Solférino

Diverses campagnes d'essais se sont déroulées sur plusieurs années à la suite de la fermeture à la circulation de la passerelle de Solférino, au départ pour bien identifier les problèmes et mettre au point les mesures correctives, ensuite pour contrôler l'efficacité des mesures adoptées et enfin pour dégager des enseignements utiles au milieu scientifique et technique.

Les principales conclusions qu'on peut retirer des essais de la passerelle de Solférino sont les suivantes :

- le phénomène de synchronisation forcée s'est effectivement produit pour le premier mode de balancement latéral dont le double de la fréquence se situe bien dans la plage de fréquence de marche normale des piétons ;
- à l'inverse il ne semble pas se produire pour des modes de torsion qui présentent simultanément des mouvements verticaux et horizontaux, même quand on a fait marcher la foule d'essai à une fréquence en principe de résonance. Les mouvements verticaux importants gênent et perturbent la marche des piétons mais ne semblent pas favoriser le maintien de cette marche à la fréquence de résonance repérée et choisie pour les essais. On constate alors des niveaux d'accélération horizontale élevés dont les effets semblent avoir été masqués par l'accélération verticale ;
- la notion de nombre critique de piétons est tout à fait relative : il est certain qu'en dessous d'un certain seuil la synchronisation forcée ne peut pas se produire, mais à l'inverse il se peut qu'au-delà d'un seuil pourtant avéré certaines conditions particulières font qu'elle ne se produise pas ;

- la synchronisation forcée semble s'initier et se développer plus facilement à partir d'une fréquence de marche initiale des piétons dont la moitié de la valeur est plus faible que la fréquence propre de balancement horizontal à risque de la structure. Pour le cas inverse, c'est à dire quand la marche de la foule a une cadence initiale plus rapide, plusieurs essais ont effectivement montré qu'elle ne se produisait pas. Ceci mérite d'être étudié de manière plus approfondie mais on peut déjà avancer l'explication selon laquelle le piéton en marche à cadence plutôt rapide ressent d'une manière différente, et ceci est certain, mais aussi d'une manière atténuée, et ceci est à confirmer, les effets d'une accélération horizontale ;

- la synchronisation forcée semble manifestement se produire à partir d'un certain seuil. Ce seuil peut se traduire par un nombre suffisant de piétons présents sur la passerelle (conclusion adoptée par l'équipe d'Arup), mais il peut tout aussi bien se traduire par une valeur d'accélération ressentie par le piéton, ce qui est plus pratique pour définir un critère de vérification.

Les graphes suivants (figures 1.8 à 1.13) présentent l'analyse synthétique des essais menés sur la passerelle de Solférino. On représente l'évolution de l'accélération au cours du temps (en vert), et en parallèle le taux de corrélation ou taux de synchronisation, rapport entre le nombre de piétons équivalents et le nombre de piétons présents sur la passerelle. Le nombre de piétons équivalents se déduit de la force modale instantanée. C'est le nombre de piétons qui régulièrement répartis sur l'ouvrage et tous en phase et à la même fréquence injecteraient une même énergie par période dans le système.

Dans l'essai représenté sur la figure 1.8, on constate qu'en dessous de $0,12\text{m/s}^2$, le comportement est complètement aléatoire, et qu'à partir de $0,15\text{ m/s}^2$, il devient en partie synchronisé, la synchronisation atteignant 30 - 35 % alors que les amplitudes d'accélération sont déjà élevées ($0,45\text{ m/s}^2$). La notion de seuil critique de changement de régime (passage d'un régime aléatoire à un régime partiellement synchronisé) semble apparaître.

Les différentes « boucles » correspondent au fait que les piétons ne sont pas régulièrement répartis sur la passerelle, mais concentrés par blocs. De ce fait, on voit clairement lorsque le bloc de piéton le plus important est plutôt au centre de la passerelle (ventre dont la concavité est en bosse), ou plutôt aux extrémités de la passerelle (ventre dont la concavité est en creux).

On constate également que les trois ventres de montée en accélération, qui se font à des niveaux d'accélération croissante ($0,3\text{ m/s}^2$ puis $0,4\text{ m/s}^2$ et enfin $0,5\text{ m/s}^2$) se font avec à chaque fois le même nombre de piétons équivalents. Ceci traduit bien le fait qu'il y a une montée en accélération, stoppée deux fois lorsque le groupe de piéton atteint l'extrémité de la passerelle.

Dans l'essai suivant, représenté figure 1.9, le nombre de piétons a été augmenté de façon plus progressive.

Le seuil de changement de régime semble cette fois se situer plutôt autour de $0,15 - 0,20\text{ m/s}^2$. Le taux de synchronisation maximal ne dépasse pas 30 %.

L'essai 1C, représenté figure 1.10, nous conduit aux mêmes conclusions : changement de seuil entre $0,10$ et $0,15\text{ m/s}^2$, puis synchronisation plus marquée allant jusqu'à 35 % - 40 %.

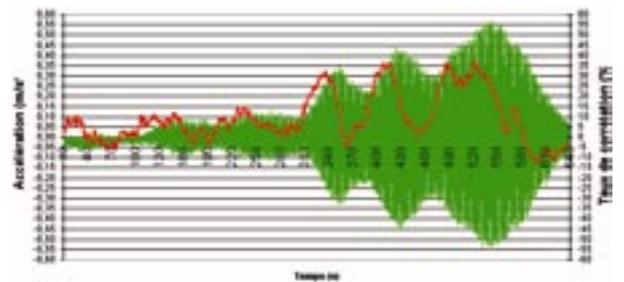


Figure 1.8 : essai aléatoire 1A de la passerelle de Solférino [on fait circuler une foule en boucle sur la passerelle en augmentant progressivement (69 - 138 - 207) le nombre de piétons]

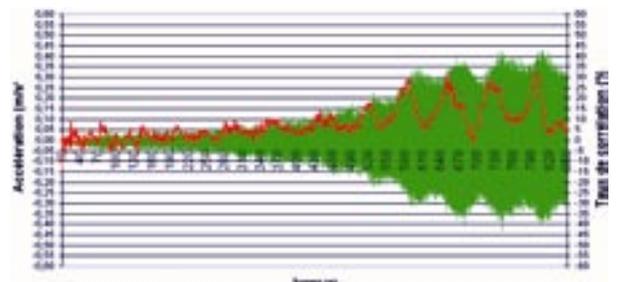


Figure 1.9 : essai aléatoire 1B de la passerelle de Solférino [on fait circuler une foule en boucle sur la passerelle en augmentant plus progressivement (92 - 115 - 138 - 161 - 184 - 202) le nombre de piétons]

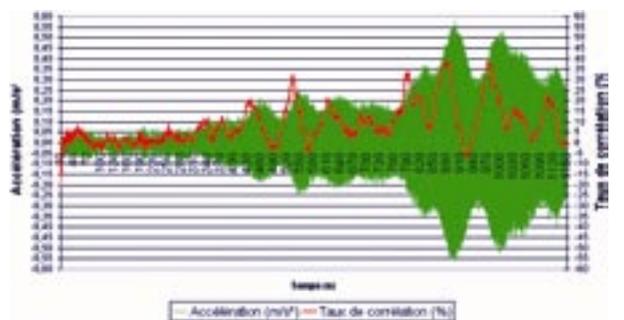


Figure 1.10 : essai aléatoire 1C de la passerelle de Solférino

Dans l'essai représenté figure 1.11, les piétons sont plus regroupés et effectuent une marche d'un bord à l'autre de la passerelle. La montée puis la descente du nombre de piétons équivalents traduit plus le mouvement des piétons, et leur passage depuis une zone sans déplacements (près des bords) et une autre avec beaucoup de déplacements (aux alentours de la mi-travée). Le taux de synchronisation monte lui à environ 60 %. C'est plus que précédemment, mais il faut signaler d'une part que le niveau des vibrations est plus élevé (0,9 m/s² au lieu de 0,5 m/s²) et d'autre part que la foule est assez resserrée, ce qui favorise le phénomène de synchronisation entre les piétons.

Dans l'essai représenté figure 1.12, il n'y a que 160 personnes, qui transitent toujours d'une extrémité à l'autre de la passerelle en marche lente. Le taux de synchronisation atteint cette fois 50 %. Les accélérations sont comparables à celles obtenues dans les essais 1A, 1B, et 1C.

Le dernier essai (figure 1.13) est identique au précédent sauf que la marche était cette fois rapide. Il n'a pas été observé de phénomène de synchronisation des piétons, bien que l'on ait une foule compacte et de 160 personnes. Ceci démontre bien que si la fréquence de marche des piétons est trop éloignée de la fréquence propre, la synchronisation ne se produit pas.

On constate dans ces essais qu'il semble se dégager un seuil de changement de régime par rapport au régime aléatoire aux alentours de 0,10 - 0,15 m/s². Après dépassement de ce seuil, les accélérations montent de manière importante mais restent bornées. On aboutit à des taux de synchronisation de l'ordre de 30 à 50 % au moment où l'essai est arrêté. Cette valeur peut monter jusqu'à 60 % voire plus lorsque la foule est compacte.

Pour le dimensionnement, on retiendra la valeur de 0,10 m/s² par sécurité. En dessous de ce seuil, le comportement des piétons peut être qualifié d'aléatoire. On pourra alors utiliser les chargements de piétons aléatoires équivalents évoqués plus haut, ce qui conduit à des taux de synchronisation de l'ordre de 5 à 10 %. Dès que ce seuil est dépassé, le taux de synchronisation peut monter à plus de 60 %. L'accélération passe donc relativement brutalement de 0,10 à plus de 0,60 m/s². L'accélération devient donc systématiquement inconfortable. Par conséquent, le seuil de changement de régime de 0,10 m/s² devient un seuil à ne pas dépasser.

Conclusions sur la synchronisation forcée

Ces différentes études proposent des conclusions qui semblent assez différentes mais qui finalement se rejoignent sur plusieurs points.

Dès que l'amplitude des mouvements devient perceptible, le comportement de la foule n'est plus aléatoire mais une forme de synchronisation se

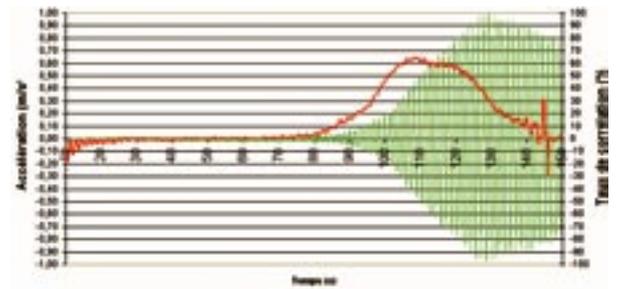


Figure 1.11 : essai aléatoire 2A1 de la passerelle de Solférino

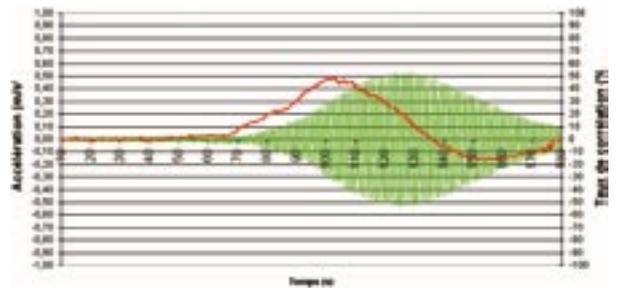


Figure 1.12 : essai aléatoire 2A2 de la passerelle de Solférino

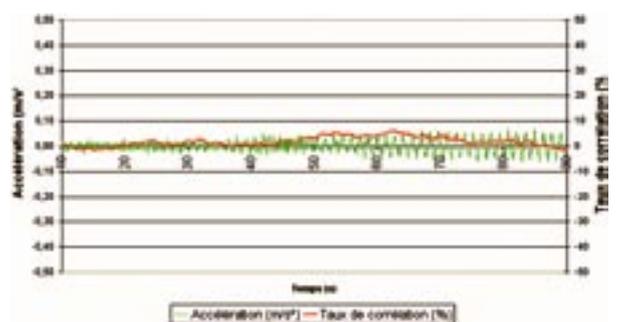


Figure 1.13 : essai aléatoire 2B de la passerelle de Solférino

développe. Plusieurs modèles sont disponibles (force fonction de la vitesse, taux de synchronisation de la foule élevée) mais ils conduisent tous à des accélérations assez supérieures aux seuils de confort couramment admis.

Le passage du régime aléatoire sur support fixe au régime synchronisé sur support mobile se produit lorsque l'on dépasse un certain seuil, caractérisé par une accélération critique ou un nombre critique de piétons. On note que la notion de nombre critique de piétons et la notion d'accélération critique peuvent être reliées. L'accélération critique peut s'interpréter comme l'accélération produite par le nombre critique de piétons, encore aléatoires mais qui ne le sont plus après.

S'il est vrai que d'une certaine manière, les grands principes et les variations du comportement observés sur les deux passerelles se rejoignent, les différences de modélisation et différences quantitatives conduisent cependant à un dimensionnement d'amortisseurs relativement différent.

La notion d'accélération critique semble plus pertinente que celle de nombre critique de piétons. Une accélération correspond réellement à ce que ressentent les piétons alors qu'un nombre critique de piétons dépend de la manière dont sont organisés et positionnés ces piétons sur la passerelle. C'est donc ce seuil d'accélération critique que l'on retiendra dans le présent guide, la façon dont les piétons sont organisés dépendant du trafic sur la passerelle (voir ci-après)

1.3 - Paramètres intervenant dans le dimensionnement : fréquence, seuil de confort, critère de confort

Les problèmes constatés sur les passerelles récentes se retrouvent aussi finalement dans le phénomène bien connu de résonance qui provient d'une adéquation entre la fréquence excitatrice des pas des piétons et la fréquence propre d'un mode de la passerelle. Il apparaît alors des mouvements notables de la passerelle car amplifiés, avec pour conséquence des sensations d'inconfort ou de gêne à la marche des piétons.

Il faut donc revenir vers les paramètres structuraux, cruciaux vis-à-vis du phénomène de résonance, que sont les modes propres (formes propres et fréquences propres) et les valeurs du pourcentage d'amortissement critique structural associées à chaque mode. Une passerelle même simple, dans la réalité, possède une infinité de modes propres, de fréquences et de pourcentages d'amortissement critique qui leur sont associés (voir annexe 1). On peut cependant, dans la plupart des cas, se contenter de l'étude des quelques premiers modes.

En regard il faut considérer les fréquences de marche des piétons qui diffèrent d'un individu à un autre, des conditions de marche et bien d'autres facteurs. Il faut donc parler plutôt d'une gamme de fréquence que d'une seule fréquence.

Le premier moyen simple pour éviter le risque de mise en résonance peut consister à éviter d'avoir une ou plusieurs fréquences propres de la passerelle se situant dans la plage de fréquence de marche des piétons. C'est ainsi qu'apparaît la notion de plage de fréquence à risque à éviter.

1.3.1 - Fréquences à risque selon la littérature et les règlements actuels

La compilation des valeurs des plages de fréquence qui sont données dans divers articles ou règlements conduit au tableau 1.2, établi pour des vibrations verticales :

Pour les vibrations latérales, on peut considérer que les plages décrites précédemment sont à diviser par deux du fait de la particularité de la marche : le pied droit et le pied gauche sont équivalents comme action verticale, mais sont opposés comme action horizontale et font que les efforts transversaux s'appliquent à une fréquence moitié de la fréquence des pas.

Toutefois sur la passerelle du Millenium on a constaté que le phénomène de synchronisation forcée s'est produit même pour un mode horizontal à fréquence largement en dessous de la limite inférieure généralement admise jusqu'ici pour la plage de fréquence de marche normale. Il paraît donc prudent d'abaisser la borne inférieure de la plage de fréquence à risque pour les modes de vibrations horizontales.

Bien que les plages de fréquence à risque soient assez bien connues et définies, dans la pratique des constructions il n'est pas souvent facile de pouvoir les éviter, à moins d'adopter des valeurs irréalistes de rigidité ou de masse. Et quand la résonance n'est pas évitable il faut essayer d'en limiter les mauvais effets en agissant sur le dernier paramètre disponible qui est l'amortissement structural ; bien évidemment il va falloir aussi disposer de critères permettant de fixer des seuils d'acceptabilité de cette résonance.

L'Eurocode 2 (Réf. [4])	1,6 Hz et 2,4 Hz et, si spécifié entre 2,5 Hz et 5 Hz.
L'Eurocode 5 (Réf. [5])	Entre 0 et 5 Hz
L'Annexe 2 de l'Eurocode 0	< 5 Hz
BS 5400 (Réf. [6])	< 5 Hz
La réglementation au Japon (Réf. [30])	1,5 Hz - 2,3 Hz
norme ISO/DIS 10137 (Réf. [28])	1,7 Hz - 2,3 Hz
Bulletin CEB 209	1,65 Hz - 2,35 Hz
Bachmann (Réf. [59])	1,6 Hz - 2,4 Hz

Tableau 1.2

1.3.2 - Seuils de confort

Avant d'aller plus loin, il convient de préciser ce que l'on entend par la notion de confort. En effet, cette notion est fortement subjective. En particulier :

- d'un individu à l'autre, les mêmes vibrations ne sont pas ressenties de la même manière ;
- pour un même individu, on peut en définir plusieurs seuils. Le premier est un seuil de perception des vibrations. Vient ensuite un second pouvant être relié à différents degrés de gêne ou d'inconfort (tolérable sur une durée courte, gênant, inadmissible). Enfin, un troisième seuil peut être fixé relativement aux conséquences que ces mêmes vibrations peuvent avoir sur la perte d'équilibre ou même sur la santé ;
- de plus, suivant qu'il est debout, assis, en mouvement ou non, un même individu peut être sensible de manière différente aux vibrations ;
- il est aussi bien connu qu'une différence existe entre les vibrations de la structure et les vibrations réellement ressenties par le piéton. Par exemple dans ce qui est ressenti par le piéton intervient notamment sa durée d'exposition aux vibrations. Mais, les connaissances dans ce domaine sont toujours imprécises et insuffisantes.

Il est donc clair que la fixation de seuils vis-à-vis du confort ressenti par le piéton pour être utilisé dans le dimensionnement des passerelles, aussi souhaitable qu'elle soit, reste une entreprise difficile. En effet, si un plafond de 1 m/s^2 pour l'accélération verticale a été donné par Matsumoto et al, (réf. [16]) d'autres comme Wheeler d'un côté et Tilly et al de l'autre, se contredisent avec des valeurs soit plus faibles ou soit plus fortes (Réf. [18] et Réf. [20]). De plus à ce jour peu de suggestions existent pour les mouvements transversaux.

Aussi pour la pratique des projets il faut considérer les valeurs recommandées comme des ordres de grandeur et il est plus commode de se baser sur ce qui peut être facilement calculable ou mesurable ; c'est ainsi qu'on assimile les seuils ressentis par les piétons aux grandeurs générées par les passerelles et c'est généralement la valeur de l'accélération de pointe qui est retenue, appelée accélération critique a_{crit} de la structure qu'il convient de ne pas dépasser, pour traduire le critère de confort à respecter. Il faut bien évidemment définir des cas de charge appropriés à appliquer à la structure pour la détermination de cette accélération. Cette vérification est considérée comme étant une vérification d'un état limite de service.

1.3.3 - Critères de confort en accélération selon la littérature et les règlements

La littérature et divers règlements proposent différentes valeurs de cette accélération critique que l'on notera

a_{crit} . Ces valeurs sont données pour l'accélération verticale et rassemblées dans la figure 1.14 suivante :

Pour les vibrations verticales de fréquence autour de 2 Hz, valeur de la fréquence usuelle de la marche, il semble qu'un consensus se dégage pour une plage de $0,5$ à $0,8 \text{ m/s}^2$. Il faut rappeler que ces valeurs sont principalement associées à l'action théorique d'un seul piéton.

Pour les vibrations latérales de fréquence autour de 1 Hz, l'Eurocode 0 Annexe 2 propose une accélération critique horizontale de $0,2 \text{ m/s}^2$ en utilisation normale et $0,4 \text{ m/s}^2$ pour des conditions exceptionnelles de foule. Malheureusement les chargements de foule qui devraient leur être associés sont absents du texte.

Il est aussi utile de rappeler que, comme les accélérations, les vitesses et les déplacements sont liés, un seuil en accélération peut se traduire en seuil de déplacement (ce qui est le plus parlant pour un projeteur) ou aussi de vitesse.

$$\bullet \text{ Accélération} = (2\pi \text{ fréquence})^2 \text{ déplacement}$$

$$\bullet \text{ Accélération} = (2\pi \text{ fréquence}) \text{ vitesse}$$

Par exemple, pour une fréquence de 2 Hz :

$0,5 \text{ m/s}^2$ d'accélération correspond à un déplacement de 3,2 mm, une vitesse de 0,04 m/s

1 m/s^2 d'accélération correspond à un déplacement de 6,3 mm, une vitesse de 0,08 m/s

mais pour une fréquence de 1 Hz :

$0,5 \text{ m/s}^2$ d'accélération correspond à un déplacement de 12,7 mm, une vitesse de 0,08 m/s

1 m/s^2 d'accélération correspond à un déplacement de 25,3 mm, une vitesse de 0,16 m/s

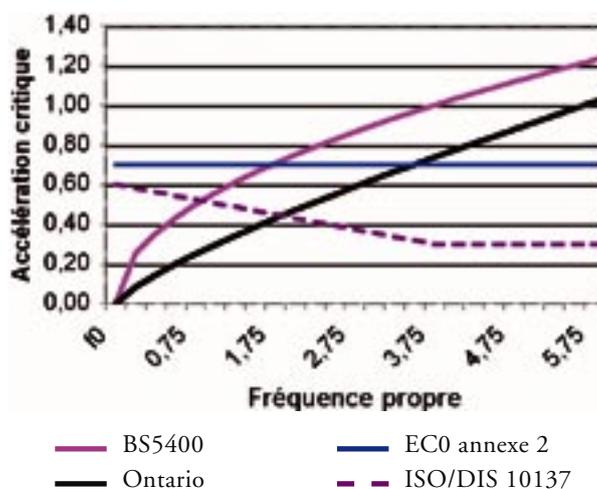


Figure 1.14 : accélérations (en m/s^2) critiques verticales en fonction de la fréquence propre pour différents règlements : certaines dépendent de la fréquence de la structure, d'autres non.

1.4 - Amélioration du comportement dynamique

Lorsque les accélérations d'une passerelle ne respectent pas les critères de confort, que faire ?

Il faut distinguer le cas d'une passerelle en projet et le cas d'une passerelle existante.

Dans le cas d'une passerelle en projet, on tentera d'abord de modifier ses fréquences propres de vibrations. S'il apparaît impossible de les modifier de telle façon qu'elles se situent hors des gammes à risque de mise en résonance vis-à-vis de l'excitation par les piétons, on essaiera d'augmenter l'amortissement structural.

Dans le cas d'une passerelle existante, on peut également tenter de modifier ses fréquences propres de vibrations. Cependant, l'expérience montre qu'il est en général plus économique d'augmenter l'amortissement.

1.4.1 - Modification des fréquences propres de vibrations

Une fréquence propre de vibration est toujours proportionnelle à la racine carrée de la raideur, et inversement proportionnelle à la racine carrée de la masse. On recherche en général à augmenter les fréquences de vibrations. Il faut donc augmenter la raideur de la structure. Mais on s'aperçoit en réalité que cette augmentation de raideur s'accompagne souvent d'une augmentation de la masse, ce qui donne un résultat inverse et que la solution n'est donc pas toujours évidente.

1.4.2 - Augmentation de l'amortissement structural

Amortissement structural naturel des ouvrages

Le pourcentage d'amortissement critique n'est pas une donnée intrinsèque d'un matériau. La plupart des résultats expérimentaux suggèrent que les forces de dissipation sont presque indépendantes de la fréquence mais dépendantes de l'amplitude du mouvement. Le pourcentage d'amortissement critique augmente aussi lorsque l'amplitude des vibrations augmente. Il dépend également des détails constructifs qui peuvent dissiper plus ou moins d'énergie (différence entre boulonnage ou soudage par exemple pour le matériau acier).

Il faut noter aussi que si les masses et les rigidités des divers éléments de structure peuvent être modélisées avec un degré de précision raisonnable, les propriétés d'amortissement sont par contre beaucoup plus difficiles à caractériser. Des coefficients d'amortissement critique compris entre 0,1 % et 2,0 % sont généralement utilisés dans les études et il est prudent ne pas surestimer l'amortissement structural afin d'éviter des sous-dimensionnements.

Le bulletin d'information N°209 du CEB (Réf. [7]), ouvrage important de synthèse traitant du problème général de vibrations des structures indique les valeurs du tableau 1.3 pouvant être utilisées pour les projets.

Pour le bois, on pourra noter que l'Eurocode 5 recommande plutôt des valeurs de 1 % ou 1,5 % suivant la présence de joints mécaniques ou non.

Type de tablier	Pourcentage d'amortissement critique	
	Valeur minimum	Valeur moyenne
Béton armé	0,8 %	1,3 %
Béton précontraint	0,5 %	1,0 %
Métallique	0,2 %	0,4 %
Mixte	0,3 %	0,6 %
Bois	1,5 %	3,0 %

Tableau 1.3

Lorsque les amplitudes de vibrations sont grandes, comme dans le cas des séismes, les pourcentages d'amortissement critique sont nettement plus élevés et sont réservés aux vérifications aux ELU. Le Guide AFPS 92 sur la protection parasismique des ponts indique par exemple (art. 4.2.3) (voir tableau 1.4).

Il faut signaler enfin qu'une estimation de l'amortissement structural réel ne peut être faite que par mesures sur ouvrage réalisé. Ceci étant, un amortissement accru peut être obtenu au départ de l'étude d'un projet, par exemple par l'emploi d'un garde-corps en grillage ou dans le cas de passerelles en membrane tendue (« stress ribbon »), par l'insertion de plaques d'élastomère disposées entre les dalles de béton préfabriquées constituant le tablier.

Mise en œuvre d'amortisseurs

L'utilisation d'amortisseurs est un autre choix efficace pour réduire les vibrations. L'Annexe 3 décrit les différents types d'amortisseurs utilisables et détaille pour certains leur principe de fonctionnement comme de dimensionnement. Il est certain que c'est une solution éprouvée comme le montre le tableau 1.5 d'exemples ci-dessous :

Note du tableau 1.5

Pour la passerelle du Millenium, des amortisseurs visqueux ont été également mis en place en plus des ADA pour amortir le mouvement horizontal.

Matériau	Pourcentage d'amortissement critique
Acier soudé	2 %
Acier boulonné	4 %
Béton précontraint	2 %
Béton non armé	3 %
Béton armé	5 %
Elastomère fretté	7 %

Tableau 1.4

Pays	Nom	Masse kg	Masse effective totale %	Pourcentage d'amortissement critique de l'amortisseur	Pourcentage d'amortissement critique de la structure sans amortisseur	Pourcentage d'amortissement critique de la structure avec amortisseur	Fréquence de la structure Hz
France	Passerelle du Stade de France (Saint-Denis)	2400 par travée	1,6	0,075	0,2 % à 0,3 %	4,3 % à 5,3 %	1,95 (vertical)
France	Passerelle Solférino (Paris)	15000	4,7		0,4 %	3,5 %	0,812 (horizontal)
Idem	Idem	10000	2,6		0,5 %	3 %	1,94 (vertical)
Idem	Idem	7600	2,6		0,5 %	2 %	2,22 (vertical)
Angleterre	Passerelle du Millenium (Londres)	2500			0,6 % à 0,8 %	2 %	0,49 (horizontal)
Idem	Idem	1000 à 2500			0,6 % à 0,8 %		0,5 (vertical)
Japon			1		0,2 %	2,2 %	1,8 (vertical)
USA	Las Vegas (Bellagio-Bally)				0,5 %	8 %	
Corée du Sud	Passerelle de Seonyu				0,6 %	3,6 %	0,75 (horizontal)
Idem	Idem				0,4 %	3,4 %	2,03 (vertical)

Tableau 1.5 : exemples d'utilisation d'amortisseurs dynamiques accordés



2. Méthodologie d'analyse dynamique des passerelles

Ce chapitre propose, à l'intention des maîtres d'ouvrage, maîtres d'œuvre et concepteurs, une méthodologie et des recommandations pour la prise en compte des effets dynamiques dus au trafic piétonnier sur les passerelles.

Les recommandations qui sont formulées, résultent d'une part de l'état des lieux décrit dans les annexes 1 à 4 et d'autre part des travaux du groupe Sétra-AFGC qui a établi ce guide. Elles traduisent donc à la fois une synthèse des connaissances existantes et les choix effectués par ce groupe.

La méthodologie proposée doit permettre de limiter les risques de mise en résonance de la structure sous les pas des piétons. Il est toutefois important de rappeler que, même sans être mises en résonance, les passerelles très légères peuvent connaître des phénomènes vibratoires.

À la source de la démarche prévue, le maître d'ouvrage doit définir la classe de la passerelle en fonction du niveau de trafic qu'elle est appelée à supporter ainsi qu'un niveau d'exigence de confort à respecter.

La classe de la passerelle implique ou non l'obligation de déterminer les fréquences propres de la structure. Lorsqu'elles sont calculées, ces fréquences propres conduisent à retenir ou non, en fonction des plages de valeurs dans lesquelles elles se situent, un ou plusieurs cas de charges dynamiques, définis pour représenter les différents effets possibles du trafic piétonnier. Le traitement de ces cas de charge donne accès aux valeurs d'accélération subies par la structure. La gamme dans laquelle se situent ces valeurs, permet de qualifier le niveau de confort obtenu.

Le principe de la méthodologie proposée est résumé par l'organigramme ci-après.

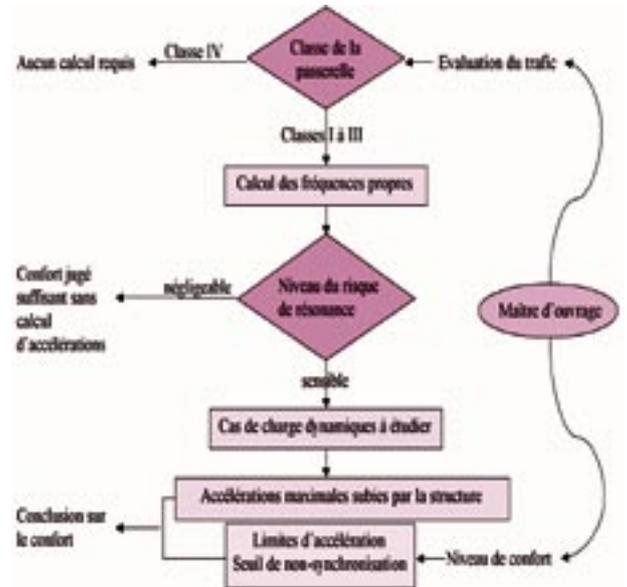


Figure 2.1 : organigramme de la méthodologie

Le chapitre présente aussi les vérifications spécifiques à mener aux ELS et aux ELU pour prendre en compte le comportement dynamique des passerelles dû au chargement piéton (sous chapitre 2.6). Il est bien sûr entendu que toutes les vérifications classiques aux ELS et aux ELU doivent être menées conformément aux textes en vigueur et ne font pas l'objet du présent guide.

2.1 - Étape 1 : Détermination de la classe de la passerelle

La classe de la passerelle permet de situer le niveau de trafic qu'elle supporte :

Classe IV : passerelle très peu utilisée, construite pour relier des zones très faiblement peuplées ou pour assurer la continuité du cheminement piétonnier dans des zones coupées par une autoroute ou une voie rapide.

Classe III : passerelle normalement utilisée, pouvant parfois être traversée par des groupes importants mais sans jamais être chargée sur toute sa surface.

Classe II : passerelle urbaine reliant des zones peuplées, soumise à un trafic important et pouvant être parfois chargée sur toute sa surface.

Classe I : passerelle urbaine reliant des zones à forte concentration piétonnière (présence d'une gare ou d'une station de métro à proximité, par exemple) ou fréquemment empruntée par des foules denses (manifestations, touristes ...), soumise à un trafic très important.

Il appartient au maître d'ouvrage de fixer la classe de la passerelle en fonction des indications données ci-dessus et en tenant compte des évolutions possibles du trafic dans le temps.

Son choix peut également être influencé par d'autres critères qu'il décide de prendre en compte. Par exemple, un sur-classement pourra être retenu pour augmenter le niveau de prévention des vibrations, face à des enjeux médiatiques forts. Au contraire, un sous-classement sera accepté afin de limiter les coûts de construction ou afin de permettre une plus grande liberté de conception architecturale, étant entendu que le risque lié à un sous classement se limite à la possibilité que parfois, lorsque l'ouvrage est soumis à un chargement dépassant en trafic et en intensité les valeurs courantes, certaines personnes puissent éprouver un sentiment d'inconfort.

Les passerelles placées en classe IV sont considérées ne nécessiter aucun calcul de vérification du comportement dynamique. Pour les passerelles très légères, il paraît prudent de retenir au moins la classe III, afin qu'un minimum de contrôle du risque soit effectué. En effet, une passerelle très légère peut présenter de fortes accélérations sans qu'il y ait nécessairement résonance.

2.2 - Étape 2 : Choix du niveau de confort par le maître d'ouvrage

2.2.1 - Définition des niveaux de confort

Le Maître d'ouvrage fixe le niveau de confort à donner à la passerelle.

Confort maximum : les accélérations subies par la structure sont pratiquement imperceptibles par les usagers.

Confort moyen : les accélérations subies par la structure sont simplement perceptibles par les usagers.

Confort minimum : dans des configurations de chargement peu fréquentes, les accélérations subies par la structure sont ressenties par les usagers, sans pour autant devenir intolérables.

Il convient de noter que les indications ci-dessus ne peuvent constituer des critères absolus : la notion de confort est fortement subjective et une même accélération est ressentie différemment suivant les personnes. Par ailleurs, on ne couvre pas ici le confort dans les locaux à occupation permanente ou prolongée que certaines passerelles peuvent supporter, en plus de leur fonction piétonnière.

Le choix d'un niveau de confort doit normalement être influencé par la population utilisant la passerelle et par l'importance de celle-ci. On peut être plus exigeant pour des utilisateurs plus sensibles (écoliers, personnes âgées ou handicapées), plus tolérant pour des passerelles de faible longueur (durées courtes de transit).

Dans les cas où le risque de mise en résonance est évalué comme négligeable à l'issue du calcul des fréquences propres de la structure, le confort est directement considéré comme suffisant.

2.2.2 - Plages d'accélération associées aux niveaux de confort

Le niveau de confort atteint est évalué par référence à l'accélération subie par la structure, déterminée par calculs, sous différents cas de charge dynamiques. Il ne s'agit donc pas directement de l'accélération ressentie par les usagers de l'ouvrage.

Compte tenu du caractère subjectif de la notion de confort, il a été jugé préférable de raisonner en plages plutôt qu'en seuils. Les tableaux 2.1 et 2.2 définissent, respectivement pour les accélérations verticales et pour les accélérations horizontales, 4 plages de valeurs désignées 1, 2, 3 et 4. Les 3 premières correspondent, dans l'ordre croissant, aux niveaux de confort maximal, moyen et minimal, décrits au paragraphe précédent. La plage 4 correspond à des niveaux d'accélération inconfortables qui ne peuvent pas être acceptés.

2.3 - Étape 3 : Détermination des fréquences et de la nécessité de mener ou non un calcul avec cas de charge dynamiques

Pour les passerelles de classes I à III, il est nécessaire de déterminer les fréquences propres de vibration de la structure. Ces fréquences concernent les vibrations dans les 3 directions : verticale, horizontale transversale et horizontale longitudinale. Elles sont déterminées pour 2 hypothèses de masses : passerelle vide et passerelle chargée sur toute sa surface, à raison d'un piéton de 700 N par mètre carré (70 kg/m²).

Les plages dans lesquelles se situent ces fréquences permettent d'évaluer le risque de mise en résonance par le trafic piétonnier et d'arrêter, en fonction de ce risque, les cas de charge dynamiques à étudier pour vérifier les critères de confort.

2.3.1 - Classification des plages de fréquence

On distingue, dans la direction verticale comme dans les directions horizontales, 4 plages de fréquences, correspondant à un risque décroissant de mise en résonance :

Plage 1 : risque maximal de mise en résonance.

Plage 2 : risque moyen de mise en résonance.

Plage 3 : risque faible de mise en résonance pour les situations courantes de chargement.

Plage 4 : risque négligeable de mise en résonance.

Le tableau 2.3 définit les plages de fréquence pour les vibrations verticales et pour les vibrations horizontales longitudinales. Le tableau 2.4 concerne les vibrations horizontales transversales.

Accélération	0	0,5	1	2,5
Plage 1	Max			
Plage 2		Moyen		
Plage 3			Min	
Plage 4				

Tableau 2.1 : plages d'accélération (en m/s²) pour les vibrations verticales

Fréquence	0	1	1,7	2,1	2,6	5
Plage 1						
Plage 2						
Plage 3						
Plage 4						

Tableau 2.3 : plages de fréquence (en Hz) des vibrations verticales et longitudinales

Accélération	0	0,10	0,15	0,3	0,8
Plage 1	Max				
Plage 2			Moyen		
Plage 3				Min	
Plage 4					

Tableau 2.2 : plages d'accélération (en m/s²) pour les vibrations horizontales - L'accélération est limitée dans tous les cas à 0,10 m/s² pour éviter la synchronisation forcée

Fréquence	0	0,3	0,5	1,1	1,3	2,5
Plage 1						
Plage 2						
Plage 3						
Plage 4						

Tableau 2.4 : plages de fréquence (en Hz) des vibrations horizontales transversales

		Cas de charge à retenir pour le contrôle des accélérations		
Trafic	Classe	Plage où se situe la fréquence propre		
		1	2	3
Peu dense	III	Cas 1	Néant	Néant
Dense	II	Cas 1	Cas 1	Cas 3
Très dense	I	Cas 2	Cas 2	Cas 3

Cas 1 : foule peu dense et dense

Cas 2 : foule très dense

Cas 3 : complément foule (2° harmonique)

Tableau 2.5 : vérifications - cas de charge à considérer

2.3.2 - Définition des calculs dynamiques à mener

Suivant la classe de la passerelle et les plages dans lesquelles se situent ses fréquences propres, il y a lieu d'effectuer un calcul dynamique de la structure, pour tout ou partie d'un ensemble de 3 cas de charge :

Cas 1 : foule peu dense et dense

Cas 2 : foule très dense

Cas 3 : complément pour une foule répartie de piétons (effet de la 2° harmonique)

Le tableau 2.5 définit précisément les calculs à mener dans chaque cas.

2.4 - Étape 4 si nécessaire : calcul avec cas de charge dynamiques

Lorsque l'étape précédente conclut à la nécessité de mener des calculs dynamiques, ceux-ci doivent permettre :

- la vérification en service, sous les cas de charge dynamiques définis ci-après, des critères de confort du paragraphe 2.2 correspondant au niveau requis par le Maître d'Ouvrage ;
- les vérifications classiques de types E.L.S. et E.L.U. en incluant les cas de charge dynamiques.

2.4.1 - Cas de charge dynamiques

Les cas de charge définis ci-après ont été élaborés pour représenter, de manière simplifiée et pratiquement utilisable, les effets des piétons en plus ou moins grand nombre sur la passerelle. Ils sont construits pour chaque mode propre dont la fréquence a été repérée dans une plage à risque de résonance. Des indications sur la manière de prendre en compte ces chargements, de les intégrer dans un logiciel de calcul de structures,

et aussi de modéliser les structures sont données dans le chapitre suivant.

Il est à noter que le nombre de piétons équivalents utilisé ci-après est enveloppe de toutes les situations. Sur des exemples précis, et moyennant des études particulières (*cf.* chapitre 1) il est possible de le diminuer.

Cas 1 : foule peu dense et dense

Ce cas n'est à considérer que pour les passerelles de classe III (foule peu dense) et II (foule dense). La densité d de la foule de piétons à envisager est fonction de la classe de la passerelle :

Classe	Densité d de la foule
III	0,5 piéton/m ²
II	0,8 piéton/m ²

Cette foule est considérée comme uniformément répartie sur la surface totale de la passerelle S . Le nombre de piétons impliqués est donc : $N = S \times d$.

Le nombre de piétons équivalents, c'est-à-dire le nombre de piétons qui, étant tous à la même fréquence et en phase, produirait les mêmes effets que des piétons aléatoires, en fréquence et en phases est : $10,8 \times (\xi \times N)^{1/2}$ (*cf.* chapitre 1).

La charge que l'on prend en compte est affectée d'un coefficient réducteur ψ qui traduit le fait que la mise en résonance des passerelles est d'autant moins probable que l'on s'éloigne de la plage 1,7 Hz - 2,1 Hz pour les accélérations verticales, et 0,5 Hz - 1,1 Hz pour les accélérations horizontales. Ce coefficient tombe à 0 lorsque la fréquence de la passerelle est inférieure à 1 Hz pour l'action verticale et 0,3 Hz pour l'action horizontale. Pareillement, au-delà de 2,6 Hz pour l'action verticale et 1,3 Hz pour l'action horizontale, le coefficient s'annule. Dans ce cas cependant, il faut regarder la seconde harmonique de la marche des piétons.

Le tableau ci-contre résume la charge **par unité de surface** à appliquer pour chaque direction de vibration, pour une foule aléatoire quelconque, lorsque l'on s'intéresse aux modes verticaux et longitudinaux. ξ représente le taux d'amortissement critique (sans unité), N le nombre de piétons sur la passerelle ($d \times S$).

Direction	Charge par m ²
Verticale (v)	$d \times (280 \text{ N}) \times \cos(2\pi f_v t) \times 10,8 \times (\xi / N)^{1/2} \times \psi$
Longitudinale (l)	$d \times (140 \text{ N}) \times \cos(2\pi f_l t) \times 10,8 \times (\xi / N)^{1/2} \times \psi$
Transversale (t)	$d \times (35 \text{ N}) \times \cos(2\pi f_t t) \times 10,8 \times (\xi / N)^{1/2} \times \psi$

Les chargements sont à appliquer sur l'ensemble de la passerelle, et le signe de l'amplitude de la force doit être en tout point choisi pour produire l'effet maximal : le sens du chargement doit donc être le même que le sens de la déformée modale, et s'inverser à chaque fois que la déformée modale change de sens, au passage d'un nœud par exemple (cf. chapitre 3 pour plus de détails).

Cas 2 : foule très dense

Ce cas de charge n'est à prendre en compte que pour les passerelles de classe I.

La densité de la foule de piétons à envisager est fixée à 1 piéton par m². Cette foule est considérée comme uniformément répartie sur toute la surface de la passerelle.

Remarque 1 : pour obtenir ces valeurs, on calcule le nombre de piétons équivalents par la formule $10,8 \times (\xi \times N)^{1/2}$ puis l'on divise par la surface chargée S , que l'on remplace par N/d (rappel $N = S \times d$) ce qui donne $d \times 10,8 \times (\xi / N)^{1/2}$ à multiplier par l'action individuelle de ces piétons équivalents ($F_0 \cos(\omega t)$) et par le coefficient réducteur ψ .

On considère que les piétons sont tous à la même fréquence et présentent des phases aléatoires. Dans ce cas, le nombre de piétons tous en phase équivalent au nombre de piétons présentant des phases aléatoires (N) est de $1,85 \sqrt{N}$ (voir chapitre 1).

Remarque 2 : Il est bien évident que ces cas de charge ne sont pas à appliquer simultanément. On applique le cas de charge vertical pour chaque mode vertical à risque, et le cas de charge longitudinal pour chaque mode longitudinal à risque, en ajustant à chaque fois la fréquence du chargement à la fréquence propre concernée.

Le deuxième coefficient réducteur, ψ , tenant compte de l'incertitude sur la coïncidence entre la fréquence de sollicitation par la foule et la fréquence propre de la structure, est défini par la figure 2.3 en fonction de la fréquence propre du mode considéré, pour les vibrations verticales et longitudinales d'une part, transversales d'autre part.

Remarque 3 : Les cas de charge précédents ne font pas apparaître la partie statique de l'action des piétons, G_0 . Cette composante n'a en effet aucune influence sur l'accélération, néanmoins, il faut bien garder à l'esprit que la masse de chacun des piétons réellement présents doit être intégrée à la masse de la passerelle.

Le tableau ci-après résume la charge à appliquer par unité de surface pour chaque direction de vibration. Les mêmes remarques que celles du paragraphe précédent s'appliquent :

Remarque 4 : ces chargements sont à appliquer jusqu'à obtention de l'accélération maximale à la résonance. On rappelle que le nombre de piétons équivalents a en effet été construit de façon à comparer des piétons réels avec des piétons fictifs en nombre plus réduit présentant une résonance parfaite. Voir le chapitre 3 pour plus de détails.

Direction	Charge par m ²
Verticale (v)	$1,0 \times (280 \text{ N}) \times \cos(2\pi f_v t) \times 1,85 (1/N)^{1/2} \times \psi$
Longitudinale (l)	$1,0 \times (140 \text{ N}) \times \cos(2\pi f_l t) \times 1,85 (1/N)^{1/2} \times \psi$
Transversale (t)	$1,0 \times (35 \text{ N}) \times \cos(2\pi f_t t) \times 1,85 (1/N)^{1/2} \times \psi$

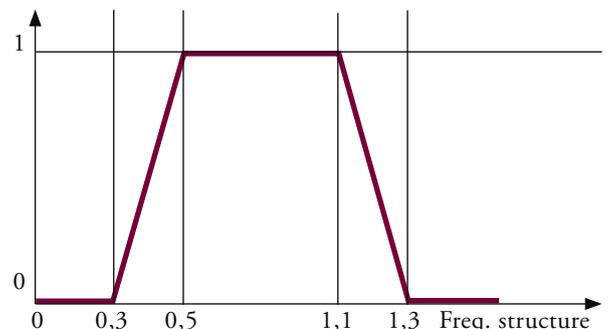
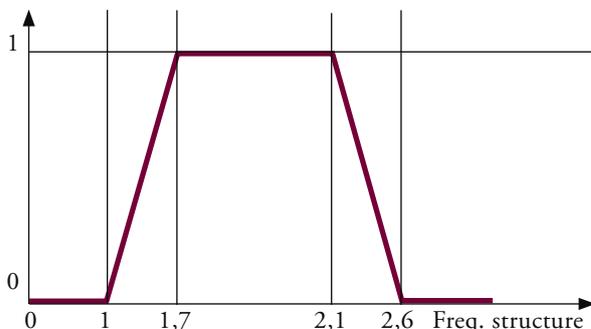


Figure 2.3 : facteur ψ dans le cas de la marche, pour les vibrations verticales et longitudinales à gauche et pour les vibrations latérales à droite

Cas 3 : effet de la 2^e harmonique de la foule

Ce cas est similaire aux cas 1 et 2, mais en considérant la 2^e harmonique de la sollicitation de la marche des piétons, située en moyenne au double de la fréquence de la première harmonique. Il n'est à prendre en compte que pour les passerelles de classe I et II.

La densité de la foule de piétons à envisager est de 0,8 piéton/m² pour la classe II, et 1,0 pour la classe I.

Cette foule est considérée comme uniformément répartie. La force individuelle exercée par un piéton est réduite à 70 N en vertical, 35 N en longitudinal et 7 N en transversal.

Pour les passerelles de classe II, on tient compte du caractère aléatoire des fréquences et des phases des piétons, comme pour le cas de charge n°1.

Pour les passerelles de classe I, on tient compte du caractère aléatoire des phases des piétons uniquement, comme pour le cas de charge n° 2.

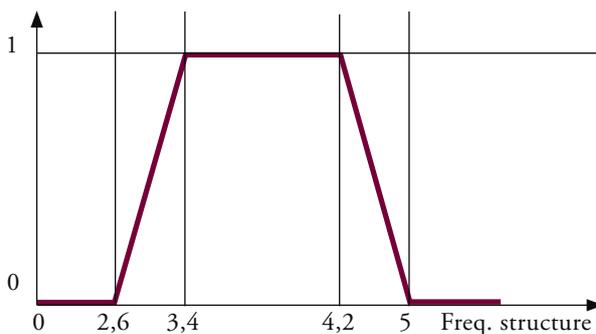
Le deuxième coefficient réducteur, ψ , tenant compte de l'incertitude sur la coïncidence entre la fréquence de sollicitation par la foule et la fréquence propre de la structure est donné par la figure 2.4 en fonction de la fréquence propre du mode considéré, pour les vibrations verticales et longitudinales d'une part, transversales d'autre part.

2.4.2 - Amortissement de l'ouvrage

Les calculs dynamiques sont conduits en prenant en compte l'amortissement structurel suivant :

Type	Pourcentage d'amortissement critique
Béton Armé	1,3 %
Béton précontraint	1 %
Mixte	0,6 %
Acier	0,4 %
Bois	1 %

Tableau 2.6 : pourcentage d'amortissement critique à prendre en compte



Dans le cas de structures différentes cumulant plusieurs matériaux, le pourcentage d'amortissement critique à prendre en compte peut être pris à la moyenne des pourcentages d'amortissement critique des différents matériaux pondérée par les participations respectives de ces matériaux à la rigidité globale dans le mode considéré :

$$\xi_{\text{mode } i} = \frac{\sum_{\text{matériau } m} \xi_m k_{m,i}}{\sum_{\text{matériau } m} k_{m,i}} \text{ où } k_{m,i} \text{ est la participation du}$$

matériau m à la rigidité globale dans le mode i .

En pratique, la détermination des rigidités $k_{m,i}$ est difficile. Pour des passerelles classiques de section peu variables, on peut utiliser la formule approchée suivante :

$$\xi_{\text{mode } i} = \frac{\sum_{\text{matériau } m} \xi_m EI_m}{\sum_{\text{matériau } m} EI_m} \text{ où } EI_m \text{ est la participation du}$$

matériau m à la rigidité globale EI de la section, par rapport au centre mécanique de cette section.

(de sorte que $\sum_{\text{matériau } m} EI_m = EI$)

2.5 - Étape 5 : Modification du projet ou de la passerelle

Si les calculs précédents n'apportent pas les justifications suffisantes, le projet est à reprendre s'il s'agit d'une passerelle neuve, ou des dispositions sont à prendre en compte s'il s'agit d'une passerelle existante (mise en place ou non d'amortisseurs). Ce paragraphe donne des recommandations pour réduire les effets dynamiques sur les passerelles. Ces recommandations sont classées par importance décroissante.

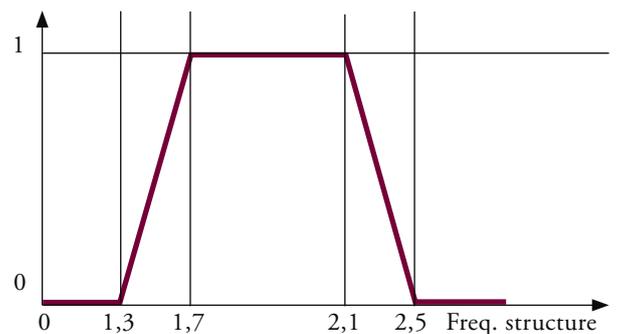


Figure 2.4 : facteur ψ dans le cas de la marche, pour les vibrations verticales et longitudinales à gauche et pour les vibrations latérales à droite

2.5.1 - Modification des fréquences propres

La modification des fréquences propres est la façon la plus saine de résoudre les problèmes vibratoires d'une structure. Néanmoins, pour modifier sensiblement les fréquences propres d'une structure, il faut bien souvent effectuer des modifications structurelles très importantes de façon à augmenter la raideur de la structure.

La plupart du temps, on cherche à augmenter les fréquences propres, de sorte que le premier mode, et donc tous les suivants, soient en dehors de la plage à risque. Dans certains cas, lorsque la fréquence du premier mode est basse mais dans la plage à risque et celle du second mode suffisamment élevée, il peut être intéressant de diminuer les fréquences afin d'amener le premier mode en dessous de la plage à risque à condition que le second mode reste au-dessus de cette plage. Ceci n'est cependant pas très satisfaisant. En plus, en diminuant la rigidité de l'ouvrage, on l'assouplit et on augmente les flèches statiques.

Parmi les moyens d'augmenter les fréquences propres de la passerelle, on peut citer les suivants :

Vibrations verticales

Considérons par exemple le cas des vibrations verticales d'un tablier constitué par un caisson métallique. Si la hauteur du caisson peut être augmentée, on peut alors augmenter la raideur sans augmenter la masse. Il suffit en effet de conserver les épaisseurs des membrures inférieure et supérieure, et de diminuer les épaisseurs des âmes proportionnellement à l'augmentation de leur hauteur.

Mais dans un grand nombre de cas, la hauteur du caisson ne peut pas être augmentée, ou pas suffisamment, pour des raisons fonctionnelles (gabarit de passage sous la passerelle) ou architecturales. Si on augmente alors les épaisseurs des membrures et des âmes du caisson, l'inertie augmente proportionnellement à l'épaisseur, mais la masse propre augmente également, ce qui atténue l'effet global. Dans ce cas il n'y a pas de solution pour augmenter les fréquences propres, si ce n'est modifier le schéma statique de la structure : créer des encastres sur les piles, ajouter des haubans,...

Dans le cas d'un tablier en poutre à âme pleine mixte acier-béton, l'augmentation de l'épaisseur de la membrure métallique inférieure est plus efficace pour augmenter la fréquence de vibration. En effet la masse propre n'augmente pas aussi vite, puisqu'elle comporte une part importante due à la masse de la dalle béton, qui elle n'augmente pas.

Dans le cas d'un tablier en treillis, l'inertie varie comme le carré de la hauteur alors que la section des membrures (donc la masse des membrures) varie comme l'inverse de la hauteur. Il est donc intéressant d'augmenter la hauteur pour augmenter la fréquence de vibration.

Dans le cas d'un tablier en béton, l'augmentation de la résistance du béton permet d'augmenter son module, et donc la raideur du tablier, sans augmenter sa masse, mais dans des proportions réduites puisque le module n'augmente que comme la racine cubique de la résistance en compression. Un autre moyen classique d'augmentation de la raideur sans augmentation de la masse consiste à remplacer une section rectangulaire par une section en I. Un tablier constitué par un caisson aura ainsi une fréquence de vibration plus élevée qu'un tablier de même épaisseur constituée de poutres rectangulaires.

On peut aussi remplacer du béton normal par du béton léger pour diminuer la masse (avec une diminution faible de la raideur) et donc augmenter la fréquence de vibration.

Dans le cas d'un tablier haubané, l'augmentation des sections des haubans permet en général d'augmenter la raideur sans augmenter beaucoup la masse. Cette solution est efficace, mais elle n'est pas économique puisqu'on est obligé d'augmenter la quantité de haubanage sans contrepartie. Un haubanage en éventail est plus raide qu'un haubanage en harpe. Des pylônes plus hauts conduisent également à une augmentation de la raideur sans augmentation de la masse, donc à une augmentation de la fréquence de vibration.

Dans le cas d'un tablier suspendu, la fréquence de vibration augmente comme la racine carrée de la tension des câbles divisée par la masse linéique des câbles et du tablier. Il est donc sans intérêt d'augmenter simplement la section des câbles. Il faut surtout diminuer leur flèche.

On peut également augmenter la raideur verticale d'un tablier en faisant participer les garde-corps à cette raideur.

Vibrations de torsion

Les vibrations de torsion du tablier provoquent des mouvements verticaux de celui-ci dès que l'on n'est pas dans l'axe longitudinal de l'ouvrage. Il faut donc veiller également aux valeurs des fréquences de vibrations de torsion du tablier lorsque l'on étudie les vibrations verticales ressenties par les piétons. La fréquence de vibration de torsion est proportionnelle à la racine carrée de la raideur en torsion et inversement proportionnelle à la racine carrée de la masse polaire du tablier. Il y a donc tout intérêt à concevoir des tabliers rigides en torsion.

Il existe plusieurs moyens d'augmenter la fréquence des vibrations de torsion d'un tablier. Pour cela, il est bien sûr possible d'augmenter l'inertie de torsion. Un tablier en caisson a ainsi une inertie de torsion plus grande qu'un tablier constitué de poutres latérales. On peut encore augmenter son inertie de torsion en augmentant la surface de la section fermée délimitée par le caisson. L'adjonction, à un tablier constitué d'un hourdis supporté par des poutres latérales, d'un contreventement horizontal inférieur en treillis reliant les membrures inférieures des deux poutres, permet aussi d'augmenter la raideur en torsion, mais dans des proportions moindres qu'un caisson.

Dans le cas d'un pont haubané à suspension latérale dont le tablier est constitué de deux poutres latérales, le fait d'ancrer les haubans dans le plan axial de la structure (sur un pylône axial ou sur la partie supérieure d'un pylône en Y inversé ou en V inversé), et non sur deux pylônes latéraux indépendants, permet d'augmenter la fréquence de torsion d'un facteur voisin de 1,3 (Réf. [52]). C'est ce qui a été fait pour la passerelle du Palais de Justice de Lyon.

Vibrations horizontales

La fréquence de vibration horizontale est proportionnelle à la racine carrée de la raideur horizontale et inversement proportionnelle à la racine carrée de la masse du tablier.

Un moyen évident d'augmenter la raideur horizontale est d'augmenter la largeur du tablier. Mais cela a un coût non moins évident.

À largeur donnée, une façon d'augmenter la raideur horizontale consiste à placer les éléments résistants sur les rives du tablier : on placera par exemple deux poutres latérales de section S , plutôt que quatre poutres de section $S/2$ également espacées sous le platelage.

Dans le cas de passerelles haubanées ou suspendues très étroites par rapport à leur portée, on pourra placer des câbles latéraux pour raidir la structure. C'est le cas de la passerelle suspendue de Tours, sur le Cher.

2.5.2 - Diminution structurelle des accélérations

Si l'on ne parvient pas à augmenter suffisamment les fréquences, ou si cette augmentation conduit à une conception qui remet en cause l'existence même du projet, ou encore s'il s'agit d'un ouvrage ancien sur lequel on ne peut pas faire de modifications conséquentes, il faut essayer de diminuer les accélérations (sans jouer directement sur l'amortissement). Pour cela, on peut augmenter la masse de la structure en utilisant un platelage « lourd » (enrobé, béton ou autre). Ceci joue directement sur les accélérations (on rappelle que celles-ci sont inversement proportionnelles à la masse). En plus, si ce platelage est connecté à la

structure, les fréquences ne seront pas trop diminuées, et l'amortissement apporté par ce platelage pourra être intéressant dans sa contribution à l'amortissement total.

Un autre moyen de réduire les accélérations est d'utiliser des matériaux naturellement amortissants. Cependant, il faut savoir que pour mobiliser l'amortissement de ces matériaux, ceux-ci doivent intervenir dans la rigidité globale, et donc être participants. Un amortissement accru peut être obtenu par exemple par l'emploi d'un garde-corps en grillage. Dans le cas de passerelles en membrane tendue (« *stress ribbon* »), des plaques d'élastomère disposées entre les dalles de béton préfabriquées constituant le tablier peuvent permettre d'augmenter l'amortissement.

2.5.3 - Mise en place d'amortisseurs

En dernier recours, si les solutions précédentes ne fonctionnent pas, on peut prévoir la mise en place de systèmes amortisseurs, qui sont le plus souvent des amortisseurs dynamiquement accordés (ce sont les plus simples à mettre en place : les amortisseurs visqueux nécessitent souvent la construction de dispositifs complexes recréant des déplacements différentiels importants, pour un bon fonctionnement). Un amortisseur dynamique accordé est constitué par une masse reliée à la structure par un ressort et par un amortisseur disposé en parallèle. Ce dispositif permet de diminuer dans des proportions importantes les vibrations d'une structure dans un mode de vibration donné, sous l'action d'une excitation périodique de fréquence proche de la fréquence propre de ce mode de vibration de la structure (voir Annexe 3 §3.3).

Ceci ne doit se prévoir qu'en dernier recours, car malgré le caractère attractif a priori de ces solutions (augmentation forte de l'amortissement à un coût peu élevé), il y a des inconvénients. Si l'on utilise des amortisseurs dynamiquement accordés, ce qui est le cas le plus courant :

- il faut autant d'amortisseurs qu'il y a de fréquences à risque. Pour des passerelles complexes, qui ont beaucoup de modes (flexion, torsion, modes verticaux, transversaux, longitudinaux...) à risque, cela peut s'avérer très lourd à mettre en œuvre ;
- il est nécessaire de caler l'amortisseur (à 2 - 3 % près) sur une fréquence de structure qui évolue dans le temps (phénomènes différés) ou en fonction du nombre de piétons (modification de la masse). La baisse d'efficacité est sensible ;
- l'ajout d'un amortisseur dégenère et donc dédouble la fréquence propre considérée : ceci complique le comportement dynamique de l'ensemble ainsi que la mesure des fréquences propres ;

- même si les fabricants précisent que les amortisseurs ont une durée de vie très élevée, ceux-ci doivent faire l'objet d'un minimum d'entretien : les maîtres d'ouvrage doivent en être conscients ;
- compte-tenu du poids ajouté (environ 3 à 5 % de la masse modale du mode considéré), cette solution ne fonctionne sur une passerelle existante que si celle-ci a une réserve de dimensionnement suffisante. Sur une passerelle en projet, le projeteur peut être amené à redimensionner l'ouvrage ;
- on atteint au mieux 3 % d'amortissement garanti : sur des structures très légères (dont le rapport Force excitatrice divisée par la masse est élevé), cela peut ne pas suffire.

2.6 - Vérifications structurelles sous charges dynamiques

2.6.1 - Vérifications de type E.L.S. spécifiques au comportement dynamique

En plus des vérifications habituelles à mener aux états limites de services, définies par les règlements en vigueur, il convient de former des combinaisons de service spécifiques au chargement dynamique des piétons, en cumulant :

- les effets (solicitations, déplacements, ...) résultant de l'un des cas de charge dynamique 1 à 3, en appliquant la même méthodologie que pour la détermination du confort. Ainsi, lorsque l'on doit calculer les accélérations, on doit aussi calculer les efforts correspondants et vérifier que ceux-ci restent admissibles. Lorsque la méthodologie n'impose pas le calcul des accélérations, cette vérification n'est pas à réaliser ;
- les effets du chargement statique associé au cas dynamique envisagé, correspondant d'une part aux charges permanentes et d'autre part au poids des piétons disposés de manière identique, en retenant une charge de 700 N par piéton.

Il est important de noter que l'on cumule des déformées statiques et des déformées dynamiques, et donc que des précautions doivent être prises lors de l'utilisation de logiciels de calcul.

2.6.2 - Vérifications de type E.L.U. spécifiques au comportement dynamique

S'agissant de vérifier la résistance de la structure, avec des niveaux de contraintes supposés proches de la limite d'élasticité des matériaux (sinon le problème de

la résistance ne se pose évidemment pas), les calculs dynamiques sont conduits en prenant en compte l'amortissement structurel donné dans le tableau 2.7 suivant :

Types de structure	Amortissement
Métalliques soudées	2 %
Métalliques boulonnées	4 %
Béton armé	5 %
Béton précontraint	2 %

Tableau 2.7

De même que pour les états limites de service, les états limites ultimes présentés ici doivent être réalisés en plus des ELU classiques imposés par les règlements en vigueur. Il convient de former une combinaison de type accidentel afin de simuler un cas de vandalisme ou de manifestation importante exceptionnelle sur la passerelle. La vérification est à faire dès qu'une vérification de confort pour une fréquence propre dans une plage à risque est effectuée. Le cas de charge à considérer est similaire au cas de charge n°1 défini précédemment (voir § 2.3.2) quelle que soit la classe de la passerelle avec les modifications suivantes :

- la densité de la foule est prise égale à 1 piéton par m² ;
- outre les charges permanentes de la passerelle, on doit tenir compte de la charge statique apportée par la foule que l'on prend égale à 700 N/m² ;
- les effets individuels de piétons sont directement cumulés, sans aucun coefficient réducteur ($N_{eq} = N$ et $\psi = 1$).

Ce cas de charge est extrêmement pessimiste, puisque l'on suppose la coordination parfaite d'une foule entière de piétons. Néanmoins, il peut survenir dans des conditions très exceptionnelles (manifestations rythmiques, courses, défilés etc.) ou dans des situations de synchronisation forcée.

L'expérience montre qu'il peut y avoir un problème de résistance dans des cas particuliers seulement car il ne faut pas oublier qu'un tel cas de charge correspond à un ELU accidentel, pour lequel on peut pondérer différemment les charges permanentes par rapport à l'ELU fondamental, ou être plus tolérant sur les limites des matériaux.

Quoi qu'il en soit, il peut dans certains cas particuliers subsister un manque de résistance si la structure est optimisée et tout juste dimensionnée. Si tel est le cas, et si les conséquences sur le dimensionnement sont importantes (ce qui ne devrait pas être le cas compte-tenu du faible écart entre le dimensionnement avec charges dynamiques et sans charges dynamiques), on pourra avantageusement regarder à quelle accélération correspond l'effort maximal dynamique ainsi calculé. Si cette accélération est trop importante, on pourra

borner celle-ci à une valeur raisonnable inférieure à l'accélération de la pesanteur (entre 0,5 g et g) au-delà de laquelle on peut considérer que la marche devient impossible.

Dans le sens transversal, la mise en cause de la résistance de la structure est peu probable car :

- l'action latérale du piéton est nettement plus faible que l'action verticale (35 N au lieu de 280 N) ;
- les conséquences sur le dimensionnement peuvent être négligeables du fait du dimensionnement de la passerelle au vent, en supposant que l'on ne cumule pas des situations de vent extrême, et de densité forte sur la passerelle ;
- l'accélération transversale au-delà de laquelle le piéton ne peut plus maintenir son équilibre est nettement plus réduite que l'accélération verticale. On peut par exemple la limiter à une valeur comprise entre 0,1 g et 0,3 g.

Il est donc peu probable qu'une foule de piétons exceptionnelle puisse remettre en cause le dimensionnement d'une passerelle piétonne, ou puisse mettre en cause la résistance d'une passerelle, mais il est nécessaire de s'en assurer au préalable.

Il est à noter enfin que dans ces vérifications n'a pas été abordée la sécurité individuelle des piétons en cas d'accélération trop importantes du fait de ces manifestations exceptionnelles. C'est pour cela que le présent guide recommande aux maîtres d'ouvrages de ne pas autoriser que se produisent des manifestations exceptionnelles sur une passerelle piétonne, mais de les prendre en compte dans le dimensionnement de la passerelle car une telle interdiction peut sur toute la durée de vie de la passerelle être difficile à faire respecter.



3. Méthodes de calcul pratique

3.1 - Méthodes de calcul utilisables

Pour le calcul dynamique des structures et des systèmes continus, deux grandes méthodes sont utilisables : le calcul par intégration directe et le calcul modal.

3.1.1 - Intégration directe

Cette méthode consiste à intégrer directement les équations de la dynamique avec un chargement imposé. Elle est en pratique peu utilisée pour les vibrations de passerelles car les phénomènes affectant celles-ci sont des phénomènes de résonance qui supposent donc pour les prévoir de connaître les fréquences propres des structures. Elle est plus utilisée dans le calcul au séisme pour lequel on connaît l'excitation (accélérogramme de séisme imposé par exemple)

La méthode d'intégration directe, plus coûteuse en temps d'analyse que le calcul modal, peut cependant s'avérer nécessaire dans l'un des cas suivants :

- lorsque la méthode de superposition modale ne peut pas s'employer avec un nombre réduit de modes ;
- lorsque l'amortissement n'est pas proportionnel ou lorsqu'il est concentré (amortisseurs visqueux par exemple) ;
- lorsque le problème n'est pas linéaire.

Les deux derniers points peuvent se rencontrer dans certains problèmes de vibration de passerelles (utilisation d'éléments finis, amortisseurs, ouvrage à comportement non linéaire). Il existe cependant des méthodes pour se rapprocher des méthodes modales,

et il est souvent utile tout de même de déterminer des « fréquences apparentes » d'auto-vibrations pour pouvoir caler les chargements dynamiques produisant l'effet maximal.

3.1.2 - Calcul modal

La méthode modale procède toujours en deux étapes, à savoir la détermination des modes propres dans un premier temps, et le calcul de la réponse réelle (si nécessaire) dans la base formée par ces modes propres.

La puissance de cette méthode est que les modes propres sont les modes d'auto vibrations de la structure. Ils représentent donc les modes de vibration privilégiés de la structure.

Le second avantage est qu'ils forment une base, et que la solution réelle est donc une combinaison linéaire de ces modes. On réduit ainsi considérablement le nombre de degrés de liberté et on a des équations découplées.

Enfin le troisième avantage est que, lorsqu'on excite une structure à une de ses fréquences propres et uniquement dans ce cas, il se produit un phénomène de résonance. Un des modes présente alors une réponse beaucoup plus importante que les autres. On restreint alors un problème à plusieurs degrés de liberté à un problème à un degré de liberté, donc facile à résoudre. Il n'y a donc plus qu'une seule inconnue au problème, l'amplitude de cette résonance. La connaissance de ces fréquences de résonance est cruciale pour l'analyse du problème dynamique.

3.2 - Calcul dynamique appliqué aux passerelles

3.2.1 - Calcul des fréquences propres et des modes propres

En pratique, le calcul des modes propres se fait en utilisant des logiciels pour des structures complexes (ce qui est en pratique atteint dès que l'on a plusieurs poutres ...). Cependant, un certain nombre de situations peuvent être déterminées analytiquement. Il est aussi souvent possible d'avoir des ordres de grandeur des fréquences propres, même dans le cas de structures complexes.

Poutre sur 2 appuis simples

Pour une poutre sur appuis simples de caractéristiques constantes, le calcul analytique est possible (voir tableau 3.1).

ρS est la masse linéique de la structure (incluant les charges permanentes et les charges variables), ρI_r est l'inertie massique de rotation de la structure autour du centre de torsion, ES la rigidité de traction-compression, EI la rigidité de flexion, GJ la rigidité de torsion.

Ces formules supposent que le centre de gravité coïncide avec le centre de torsion, et qu'il n'y a donc pas de couplage flexion-torsion.

En pratique, pour des passerelles peu larges (largeur faible en comparaison de la portée) et rigides en torsion (profils fermés), les modes de torsion sont à des fréquences élevées tout comme les modes de traction-compression. Dans ce cas, seule l'analyse des modes de flexion est pertinente. Si les sections sont souples en torsion (cas des profils ouverts), les modes de torsion doivent être pris en compte. Si les sections sont larges (dalles ou bipoutres par exemples), il faut en outre prendre en compte des modes de flexion différentielle ou flexion transversale. (Voir figure 3.1). Dans un tel cas, des modélisations de type « plaques et coques » peuvent s'avérer nécessaire.

Mode	Pulsation propre	Fréquence Propre	Déformée modale
Flexion simple à n ventres	$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$	$f_n = \frac{n^2 \pi}{2L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$	$v_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$
Traction-compression à n ventres	$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{ES}{\rho S}}$	$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{ES}{\rho S}}$	$u_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$
Torsion à n ventres	$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{GJ}{\rho I_r}}$	$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{GJ}{\rho I_r}}$	$\theta_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

Tableau 3.1 : modes analytiques pour une poutre appuyée-appuyée

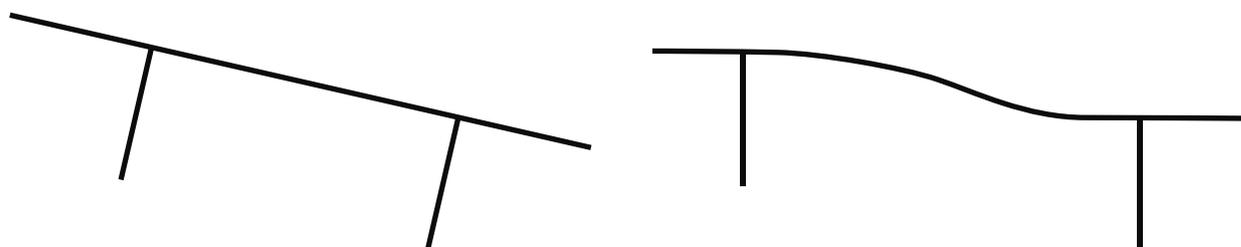


Figure 3.1 : mode de torsion (à gauche) et mode de flexion différentielle (à droite) à prendre en compte lorsque les profils sont ouverts (à gauche), ou lorsque les sections sont larges (à droite), ou encore dans les deux cas.

Les figures 3.2 suivantes illustrent les modes de flexion et de torsion rencontrés sur une passerelle dont la largeur correspond au cinquième de la portée.

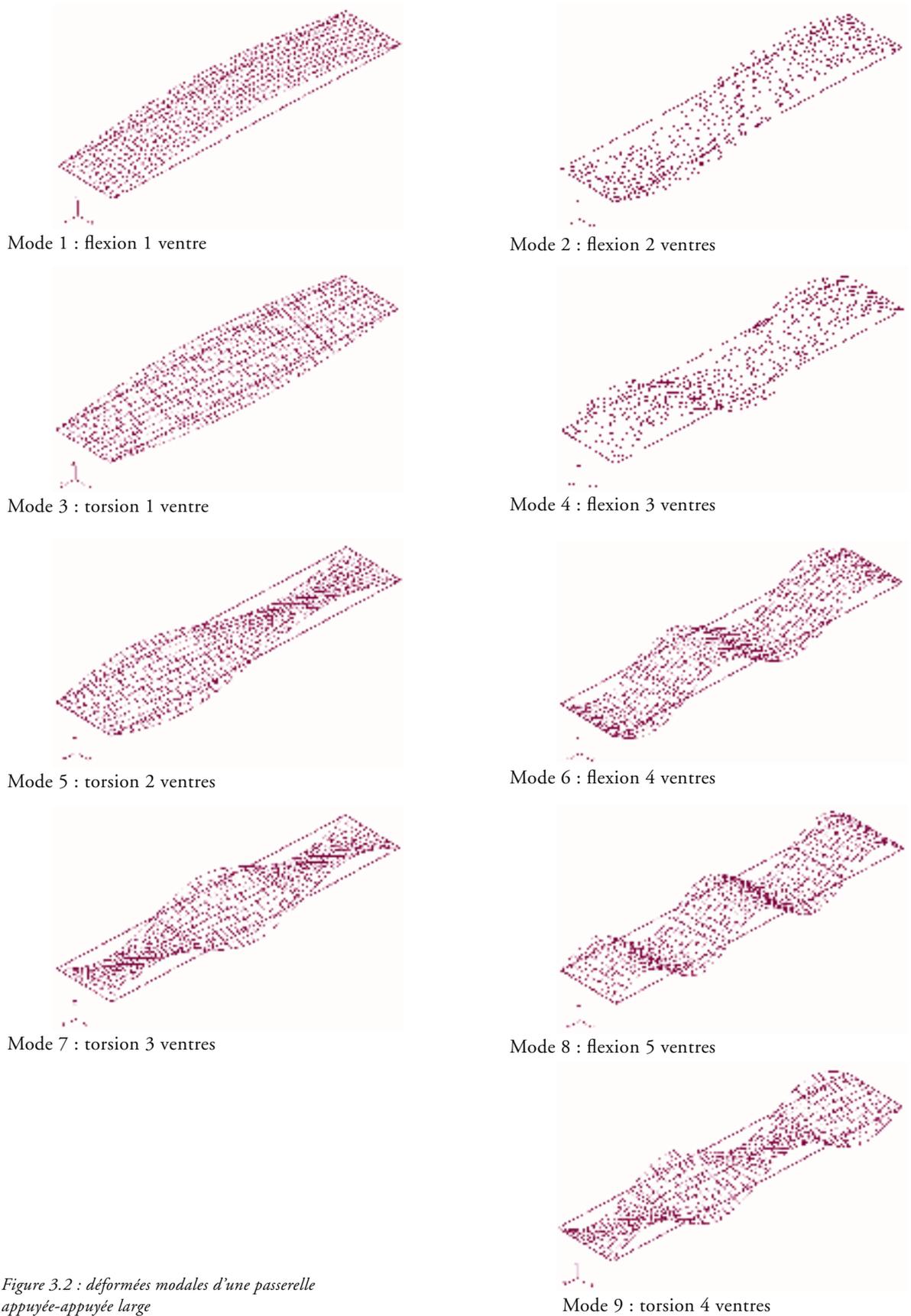


Figure 3.2 : déformées modales d'une passerelle appuyée-appuyée large

Poutre simple avec diverses conditions aux limites

Pour une poutre quelconque, continue sur appuis, avec des conditions aux limites différentes, les pulsations propres sont toujours de la forme $\omega_n = \frac{\lambda_n}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$ qui peut se décomposer en un facteur dépendant de la forme de la poutre λ_n , un facteur dépendant du matériau $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ et un facteur dépendant de la section $\sqrt{\frac{I}{S}}$, appelé aussi rayon de giration.

Le tableau suivant, issu des règles CECM 89 (réf. [8]) donne les valeurs du coefficient λ_n en fonction des conditions d'appui :

Structures quelconques

Avant de réaliser tout calcul numérique de dynamique des passerelles, que ce soit pour les cas simples en utilisant les formules de calcul de fréquences et d'accélération, ou pour la modélisation de structures plus complexes sur des programmes de calcul adaptés, il convient de se poser un certain nombre de questions sur les hypothèses du calcul et le modèle réalisé.

La liste suivante se propose d'énumérer les principaux points sur lesquels il est nécessaire d'être vigilant pour mener à bien la modélisation. Ces points concernent le calcul dynamique proprement dit. Il va de soi que toutes les hypothèses et techniques habituelles de modélisation de structures en statique sont reconduites. Ceci concerne par exemple la pertinence du maillage aux éléments finis, les réflexions sur la modélisation des liaisons pour les ouvrages métalliques etc.

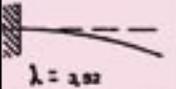
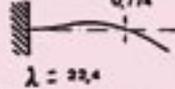
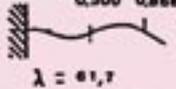
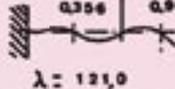
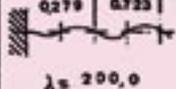
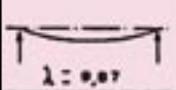
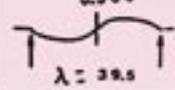
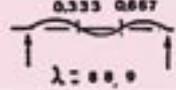
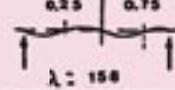
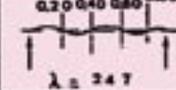
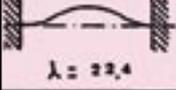
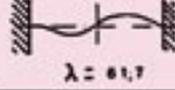
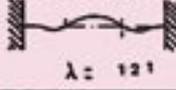
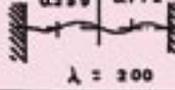
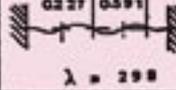
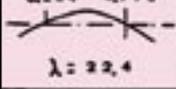
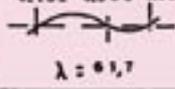
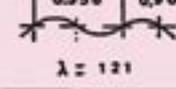
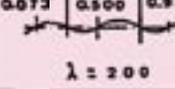
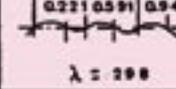
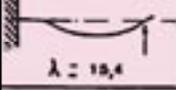
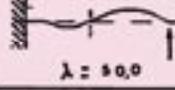
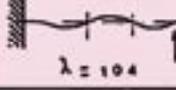
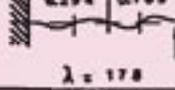
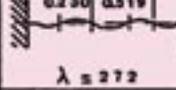
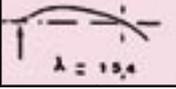
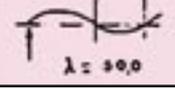
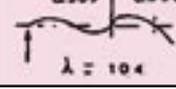
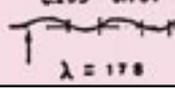
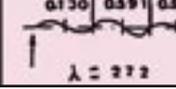
r = 1	r = 2	r = 3	r = 4	r = 5	r > 5
 $\lambda = 1,87$	 $\lambda = 3,14$	 $\lambda = 6,17$	 $\lambda = 12,10$	 $\lambda = 20,00$	$[(2r-1) \frac{\pi}{2}]^2$
 $\lambda = 0,87$	 $\lambda = 3,93$	 $\lambda = 8,99$	 $\lambda = 1,58$	 $\lambda = 24,7$	$[r \pi]^2$
 $\lambda = 3,14$	 $\lambda = 6,17$	 $\lambda = 12,1$	 $\lambda = 2,00$	 $\lambda = 29,8$	$[(2r+1) \frac{\pi}{2}]^2$
 $\lambda = 3,14$	 $\lambda = 6,17$	 $\lambda = 12,1$	 $\lambda = 2,00$	 $\lambda = 29,8$	$[(2r+1) \frac{\pi}{2}]^2$
 $\lambda = 1,87$	 $\lambda = 3,00$	 $\lambda = 10,4$	 $\lambda = 1,78$	 $\lambda = 27,2$	$[(4r+1) \frac{\pi}{4}]^2$
 $\lambda = 1,87$	 $\lambda = 3,00$	 $\lambda = 10,4$	 $\lambda = 1,78$	 $\lambda = 27,2$	$[(4r+1) \frac{\pi}{4}]^2$

Tableau 3.2 : influence des conditions aux limites sur les modes propres – Source : CECM

Le modélisateur doit être particulièrement vigilant aux aspects et aux questions suivantes avant de démarrer la modélisation numérique de la structure :

Structure du tablier

On doit se demander si le platelage est participant ou non. Si non, il ne joue que par sa masse, si oui, il apporte en plus une rigidité qui joue directement sur les fréquences, et un amortissement qui joue directement sur l'amortissement structural global.

Les liaisons entre les différents éléments doivent être décrites et prises en compte : rotules, encastresments, liaisons intermédiaires jouent directement sur les fréquences.

Les soudures ou les boulonnages conduisent à des amortissements différents.

Appuis

Une attention toute particulière doit être accordée aux appuis. En effet, le comportement dynamique de la structure du tablier des passerelles est souvent pris en compte mais pas celui de ses appuis. Dans la majorité des cas courants, cette simplification est licite car les appuis ont souvent des rigidités plus importantes que les tabliers de passerelle, et des amortissements plus importants. Mais ce n'est pas toujours le cas.

A la base de l'appui, on trouve la fondation, sur pieux ou sur semelle superficielle. Cette fondation a une certaine souplesse liée à celle du sol. En général, elle a aussi un fort amortissement lié au frottement sol / structure. Dans certains cas, elle peut être prise en compte, pour les composantes horizontales et/ou verticales.

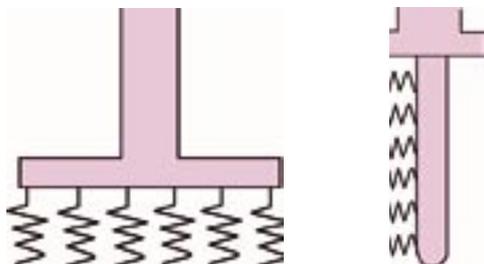


Figure 3.3 : sur semelle ou sur pieux, une fondation a une certaine rigidité K_{sol}

Puis on trouve la pile. Si celle-ci est de grande hauteur, sa souplesse devient importante et elle peut intervenir dans les fréquences propres de la structure globale.



Figure 3.4 : pile de grande hauteur : La rigidité de ce type d'appui encastré à la base et libre en tête peut être évaluée à $K_{pile} = 3EI/h^3$ où h est la hauteur, I l'inertie et E le module élastique.

Enfin, il ne faut pas oublier les appareils d'appui et leur effet sur la rigidité globale de la structure et sur l'amortissement global.

Pour un appareil d'appui en élastomère fretté, de dimensions $a \times a$, dont l'épaisseur d'un feuillet est e , de module de cisaillement G et comportant n feuillets, la raideur horizontale est :

$$K_{\text{appareil appui}} = G a^2 / n e$$

Tous ces éléments intermédiaires peuvent modifier les fréquences propres et les amortissements associés de la passerelle. Le modèle théorique et schématique simplifié peut devenir celui présenté sur la figure 3.5 :

Dans le cas de systèmes continus, il n'y a pas nécessairement une seule raideur pour chacun des éléments précédents. Un modèle complet, souvent numérique, est alors nécessaire.

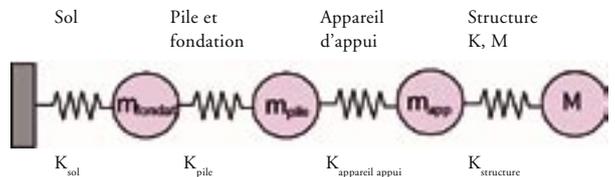


Figure 3.5 : schéma « simplifié » de la structure jusqu'aux fondations

Prise en compte de la masse

Certains logiciels de calcul en dynamique restent confus quant à la prise en compte de la masse. C'est un facteur important qui doit être bien traité par le logiciel en le distinguant des effets statiques du poids propre. Il faut en effet être vigilant par exemple pour ne pas confondre l'inertie de rotation, utile pour le calcul de l'inertie massique en rotation, de l'inertie de torsion, utile pour le calcul de la rigidité en torsion.

De plus, la masse influant directement sur les fréquences des modes, celle des piétons, qu'ils soient fixes ou mobiles, circulant sur la passerelle doit être prise compte.

Ainsi, pour chaque mode, la fréquence du mode en question est située dans une plage variable comprise entre deux fréquences extrêmes f_1 et f_2 , l'une calculée avec la masse de la structure et des piétons (f_1) et l'autre avec la masse de la structure uniquement (f_2). Pour les passerelles très légères, ces deux fréquences peuvent être assez éloignées.

Il convient donc de les calculer toutes les deux. De même, lors du calcul des accélérations, il y a lieu d'être cohérent entre le cas de chargement réalisé et la masse prise en compte.

Prise en compte des amortisseurs

Le calcul dynamique peut être réalisé avec prise en compte d'amortisseurs dynamiquement accordés (dans le cas d'un recalcul de passerelle existante qu'il faut renforcer par des amortisseurs, ou dans le cas d'une passerelle dont la conception ne permettrait pas de faire l'économie d'amortisseurs).

Ces amortisseurs peuvent être intégrés directement au modèle numérique si celui-ci permet leur modélisation. Comme il s'agit d'ajouter dans la plupart des cas un système masse, ressort, amortissement, les logiciels de calcul le permettent en général aisément.

Le calcul analytique peut être fait mode par mode si l'on connaît les fréquences de la passerelle, ainsi que ses masses modales et raideurs modales. On peut dans ce cas pour chacun des modes calculer les fréquences propres du système suivant :

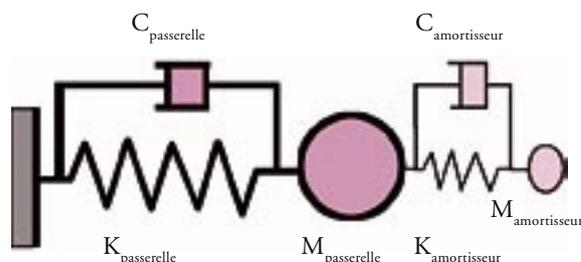


Figure 3.6 : représentation schématique d'un système Structure - Amortisseur

$M_{\text{passerelle}}$ est la masse généralisée du mode considéré de la passerelle, $K_{\text{passerelle}}$ la raideur généralisée du mode considéré de la passerelle et $C_{\text{passerelle}}$ son amortissement généralisé. L'annexe 3 donne la solution analytique de l'amplification dynamique en fonction du rapport de la fréquence excitatrice et de la fréquence initiale de la passerelle. Cette courbe permet de connaître les 2 modes propres ainsi dégénérés, et leurs amplifications (donc les amortissements) associées.

Particularités

Les points suivants, susceptibles de modifier le modèle dynamique de la passerelle, doivent enfin être pris en compte :

- existence d'une contrainte initiale qui influence les fréquences propres (précontrainte dans le béton précontraint, prétension dans les haubans ou tirants, poussée dans les arcs etc.) ;
- non-linéarités du fait des câbles ou des tirants, des matériaux, grands déplacements, effets de pendule etc. ;
- distinction des modes locaux (par exemple, vibration d'un élément de dalle sur une passerelle, sans risque pour une foule de piétons) et des modes globaux ;
- caractéristiques dynamiques des matériaux à prendre en compte (béton, raideur de sol etc.).

3.2.2 - Calcul pratique de la réponse au chargement

Principe

On rappelle l'équation régissant le comportement du mode i avec amortissement modal (cf. annexe 1) :

$$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = p_i(t) = \frac{[\phi_i] \|F(t)\|}{m_i}$$

Chacune de ces réponses q_i se calcule séparément des autres, puis on déduit la réponse globale en recomposant les modes. Si la fonction $[F(t)]$ est harmonique ($[F(t)] = [F_0] \sin(\omega t)$), à la fréquence de l'un des modes (le mode j par exemple), il y a alors résonance de ce mode. La réponse q_j du mode j est beaucoup plus importante que les autres et la réponse globale est, après une période transitoire, proche de

$$[X(t)] = \sum_{i=1}^n [\phi_i] q_i(t) \approx [\phi_j] q_j(t)$$

L'amplitude de la réponse dynamique $q_j(t)$, après la période transitoire, est obtenue en multipliant la réponse statique celle obtenue comme si le chargement était constant et égal à $[F_0]$ c'est-à-dire

telle que : $\omega^2 q_{j, \text{statique}} = \frac{[\phi_j] [F_0]}{m_j}$ par le coefficient d'amplification dynamique $\frac{1}{2\xi_j}$.

La réponse obtenue est donc :

$$\begin{aligned} \text{Déplacement : } q_j(t) &= -\frac{1}{2\xi_j} \frac{1}{\omega_j^2} \frac{[\phi_j]^T [F_0]}{m_j} \cos(\omega_j t) \\ &\quad + \text{réponse transitoire} \\ \text{Accélération : } \ddot{q}_j(t) &= \frac{1}{2\xi_j} \frac{[\phi_j]^T [F_0]}{m_j} \cos(\omega_j t) \\ &\quad + \text{réponse transitoire} \end{aligned}$$

On constate que le déplacement et l'accélération sont déphasés d'un quart de période propre par rapport à l'excitation. La vitesse est quant à elle en phase avec l'excitation.

La réponse globale en déplacement s'écrit :

$$[X(t)] = [X]_{stationnaire} + q_j(t) [\phi_j]$$

et en accélération :

$$[\ddot{X}(t)] = \ddot{q}_j(t) [\phi_j]$$

On rappelle que les différents calculs présentés dans ce guide sont basés sur la notion de nombre de piétons équivalents, qui est le nombre de piétons fictifs qui sont tous en phase, à la fréquence propre de la passerelle, régulièrement espacés, dont l'action est dans le même sens que la déformée modale en chaque point, et surtout lorsqu'on se place à la résonance maximale, c'est à dire en régime établi. Par conséquent, la réponse transitoire n'est pas intéressante et seule l'amplitude de la réponse permanente :

$$\frac{1}{2\xi_j} \frac{[\phi_j]^T [F_0]}{m_j} [\phi_j]$$

est intéressante,
avec $m_j = [\phi_j]^T [M] [\phi_j]$

Positionnement du chargement

Comme cela est spécifié dans le chapitre précédent, le chargement doit être tel que l'amplitude de la force doit être du même signe que la déformée modale.

Dans le cas de modes à plusieurs ventres dans le sens longitudinal ou transversal, cela signifie que l'amplitude de la force doit avoir la forme donnée figure 3.7 :

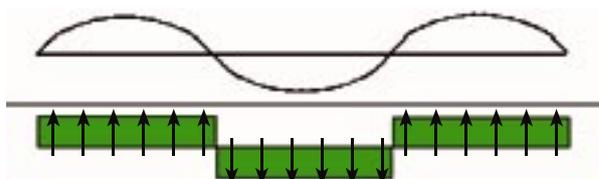


Figure 3.7 : signe de l'amplitude du chargement dans le cas d'un mode à plusieurs ventres

Dans le cas de modes de torsion à plusieurs ventres, l'amplitude de la force doit avoir la forme donnée figure 3.8

Calcul pratique dans le cas général

Dans le cas général, il faut utiliser un logiciel de calcul dynamique pour évaluer les fréquences propres, et aussi les accélérations obtenues avec les différents chargements. Plusieurs logiciels prenant en compte le calcul dynamique existent. Si la plupart des logiciels permettent le calcul des modes propres et fréquences propres, en revanche, il en existe moins qui permettent le calcul temporel des accélérations sous chargement variable. Ceci vient du fait que ces logiciels, qui font des calculs en dynamique, sont en pratique surtout orientés vers le calcul sismique, et que dans ce type de calcul, on se contente en général du calcul des modes propres, et de l'application des spectres de réponses normalisés qui évitent tout calcul dynamique réel.

Dans le cas des passerelles piétonnes, ces logiciels orientés vers le séisme ne sont pas nécessairement pertinents. Néanmoins, on peut utiliser les résultats qu'ils fournissent pour calculer les accélérations maximales, de la manière explicitée ci-après :

Logiciels calculant uniquement les modes propres et caractéristiques modales.

Pour ce type de logiciel, il convient, pour chaque mode propre dans la plage à risque de récupérer les informations modales : déformée en tout point du mode, fréquence propre, amortissement modal (si possible), masse généralisée. Il convient d'être vigilant sur la notion de masse généralisée qui est différente de la masse modale, souvent donnée par les logiciels. En effet, la masse généralisée est la grandeur $m_j = [\phi_j]^T [M] [\phi_j]$ qui intervient dans l'équation modale de la dynamique et qui dépend

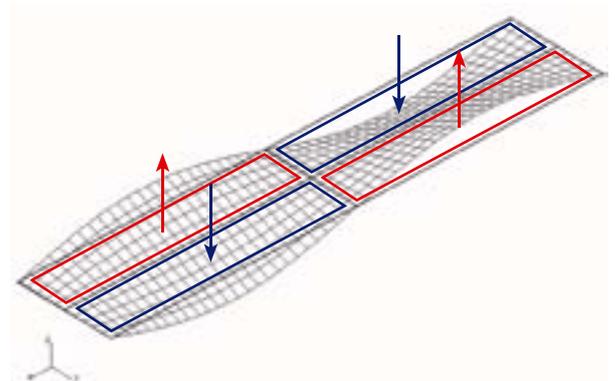


Figure 3.8 : signe de l'amplitude du chargement dans le cas d'un mode de torsion à plusieurs ventres.

[En rouge sont notées les zones dans lesquelles l'amplitude du chargement est de signe positif, et en bleu les zones dans lesquelles l'amplitude du chargement est de signe négatif]

de la normalisation que l'on choisit (le résultat final en est cependant indépendant) alors que la masse

modale, dont l'expression est $\frac{([\phi_j][M][\Delta])^2}{([\phi_j][M][\phi_j])}$, est une

grandeur couramment utilisée dans les calculs sismiques pour évaluer le nombre de modes à prendre en compte pour bien représenter la réponse à une sollicitation sismique. En pratique, cela permet d'éliminer les modes propres de masse modale faible par rapport à la masse de la structure. Mais la masse modale n'a aucune réalité physique par rapport à la masse généralisée du mode qui représente bien la masse vibrante dans le mode considéré, étant donnée la norme choisie.

En pratique, pour le mode j considéré, il faut demander au logiciel de fournir pour chaque maille i du modèle les valeurs de déplacements de la déformée modale V_{ij} , ainsi que la valeur de la fréquence propre. On forme ensuite la masse généralisée par $m_j = \sum_i M_i V_{ij}^2$ où M_i est la masse de la maille i .

On forme ensuite le chargement modal, projection du chargement sur le mode en écrivant $f_j = \sum_i F_i V_{ij}$

où F_i représente la valeur de la force sur la maille i . Elle s'écrit $F_i = F_0 \cos(\omega t)$. Compte-tenu du mode de chargement des poutres, F_0 a le même signe que V_{ij} . Sa valeur est donnée dans le chapitre 2. Le second membre de l'équation modale s'écrit

alors $\frac{f_j}{m_j}$. L'amplitude de la réponse en accélération, à la résonance, s'écrit ensuite simplement, au niveau de

$$\text{la maille } k : \frac{1}{2\xi_j} \frac{f_j}{m_j} V_{kj} = \frac{1}{2\xi_j} \frac{\sum_i \bar{F}_i V_{ij}}{\sum_i M_i V_{ij}^2} V_{kj} \quad (\text{grandeur}$$

indépendante de la norme choisie pour les modes. En effet, si on multiplie tous les V_{ij} par une même constante, on ne modifie pas le résultat)

Logiciels permettant le calcul dynamique temporel.

Pour les logiciels permettant le calcul dynamique temporel, il n'est pas nécessaire d'utiliser les artifices présentés ci-dessus.

On peut soit définir un chargement variable dans le temps de la forme $q \cos(\omega t)$, en ayant préalablement déterminé exactement les fréquences propres, et en regardant la réponse dynamique au bout d'un temps suffisamment long (en pratique, temps au bout duquel l'amplitude des accélérations devient quasi constante). Il faut par contre bien s'assurer que la fréquence du chargement correspond exactement à la fréquence propre de la structure, ce qui est un risque pour le calcul.

La seconde méthode, plus facile à mettre en œuvre et moins risquée, consiste à sélectionner pour le calcul dynamique uniquement le mode considéré (il faut pouvoir désactiver les autres modes), puis lui appliquer le même chargement que précédemment, mais supposé constant (donc q seul sans la partie temporelle) ce qui est plus aisé à définir. Puis on détermine le déplacement obtenu au bout d'un temps suffisamment long (c'est-à-dire lorsque les vibrations se sont amorties) et on le multiplie par $\omega_j^2 \frac{1}{2\xi_j}$ pour avoir l'accélération à la résonance du point considéré.

Calcul théorique pour une poutre sur deux appuis

Pour une passerelle d'inertie constante sur deux appuis, les grandeurs caractéristiques de la passerelle se calculent aisément comme le montre le tableau 3.3.

Type de grandeur	Expression littérale
Pulsations propres	$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$
Fréquences propres	$f_n = \frac{n^2 \pi}{2L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$
Flèche maximale	$v_{\max} = \frac{1}{2\xi_n} \frac{1}{n^4} \frac{4FL^4}{EI\pi^5}$
Moment maximal	$M_{\max} = \frac{1}{2\xi_n} \frac{1}{n^2} \frac{4FL^2}{\pi^3}$
Effort tranchant maximal	$V_{\max} = \frac{1}{2\xi_n} \frac{1}{n} \frac{4FL}{\pi^2}$
Accélération maximale	$Accélération_{\max} = \frac{1}{2\xi_n} \frac{4F}{\pi \rho S}$

Tableau 3.3 : grandeurs modales pour une poutre appuyée-appuyée soumise à un chargement sur une passerelle en fonction du mode à n ventres. F représente l'amplitude de la force linéique.



4. Cahier des charges études et travaux, épreuves

4.1 - Exemples d'éléments pour un cahier des charges d'études de dynamique des passerelles

Le cahier des charges doit préciser que le dimensionnement de la passerelle est réalisé conformément aux recommandations du guide Sétra / AFGC sur le comportement dynamique des passerelles piétonnes.

Le maître d'ouvrage doit néanmoins spécifier :

- la classe de la passerelle (I à IV) ;
- le niveau de confort acceptable (maximal, moyen, minimal).

4.2 - Exemples d'éléments à insérer dans le CCTP Travaux d'une passerelle

Il est conseillé d'annexer le présent guide au CCTP « Travaux » d'une passerelle et de préciser que les études d'exécution doivent suivre les recommandations de ce guide. Il faut donc à nouveau préciser :

- la classe de la passerelle (I à IV) ;
- le niveau de confort acceptable (maximal, moyen, minimal).

De plus, si les études montrent que le comportement dynamique n'est assuré qu'avec la présence d'amortisseurs, ou bien avec des hypothèses d'amortissements importants, vraisemblables mais non garantis, il est nécessaire de faire procéder à des épreuves dynamiques (Voir paragraphe suivant) de façon à valider ces hypothèses ou amortisseurs.

4.3 - Épreuves dynamiques ou essais sur des passerelles

La réalisation d'épreuves dynamiques sur une passerelle neuve, ou d'essais sur une passerelle existante est une opération lourde, très coûteuse, qui ne doit s'envisager que dans des cas bien particuliers, et qui doit être réalisée par des entreprises compétentes dans le domaine.

Une telle opération s'envisage sur une passerelle neuve quand les études n'ont pas réussi à démontrer que l'ouvrage satisfait entièrement aux critères précédents, quand la conception a imposé l'usage d'amortisseurs qu'il faut valider, ou encore quand le comportement dynamique est assuré avec des hypothèses d'amortissements supérieurs à ceux recommandés dans le présent guide, mais vraisemblables. Si le comportement dynamique est assuré sans amortisseurs et selon les recommandations du présent guide, il est possible de s'abstenir de réaliser des essais.

Dans le cas où des amortisseurs sont prévus dès l'origine, il est vivement recommandé de mesurer les fréquences et amortissements des modes de la passerelle terminée avant le dimensionnement final des amortisseurs, pour ajuster éventuellement ce dimensionnement. Le planning de construction devra en tenir compte.

Sur une passerelle existante, une campagne d'essais peut être programmée quand l'ouvrage a eu des problèmes de vibrations plusieurs fois au cours de son existence, et qu'une amélioration est nécessaire.

Les paragraphes suivants donnent des recommandations pour mener à bien une telle campagne d'essais. En fonction de l'importance de l'ouvrage, de l'importance des phénomènes rencontrés et aussi de ce que l'on veut

mesurer, on peut adapter ces recommandations.

Au niveau du matériel, il faut prévoir les systèmes suivants :

- mise en place de capteurs dynamiques, (accéléromètres ou capteurs de déplacements), ainsi qu'une centrale d'acquisition, et un système d'enregistrement. Les accéléromètres doivent être suffisamment nombreux et doivent être positionnés aux ventres des modes théoriques ;
- mise en place d'un système de surveillance visuelle de la passerelle afin de pouvoir relier les mesures dynamiques à l'image de la passerelle. Il est nécessaire que ce système soit synchronisé avec la centrale d'acquisition ;
- Utilisation éventuelle d'un excitateur mécanique (de type balourd par exemple) afin de pouvoir caractériser précisément les modes propres, fréquences propres, masses modales et amortissements modaux de la passerelle. Ce système doit permettre une excitation fiable et contrôlée, horizontale et/ou verticale (suivant la passerelle), à des fréquences programmables couvrant la gamme 0,5 Hz / 3 Hz au minimum.

Les essais se déroulent de la manière suivante :

4.3.1 - Étape 1 : Caractérisation des modes propres

Cette étape est réalisée à l'aide de l'excitateur dynamique si l'on veut avoir une bonne précision quant aux grandeurs mesurées. En l'absence d'excitateur dynamique, il est possible de mesurer les vibrations de la passerelle, en service normal, et d'en déduire avec des outils informatiques adaptés les fréquences propres ainsi que les déformées propres. Dans ce cas, il se peut que certains modes soient oubliés. De plus, il est possible de mesurer les amortissements à l'aide de la méthode du décrétement logarithmique, mais pas les masses généralisées, sauf si on utilise un excitateur dynamique. L'analyse dynamique est tout de même possible, mais moins précise.

4.3.2 - Étape 2 : Essais de foule

Des essais de foule sont à programmer, car ce sont eux qui permettent de valider effectivement le comportement dynamique et la validité des amortisseurs. Le nombre de piétons est à déterminer en fonction de la taille de la passerelle, de ses caractéristiques théoriques, mais aussi de la complexité de la gestion d'une telle foule. Plusieurs dizaines de piétons sont tout de même nécessaires pour avoir un essai représentatif.

Les essais peuvent inclure les éléments suivants :

- marches aléatoires, circulaires sur la passerelle et en continu ou bien d'une extrémité à l'autre ;
- marches cadencées à l'aide d'un métronome, aux fréquences propres de la passerelle ;

- marches cadencées, puis arrêt brutal de la marche afin de mesurer les amortissements de la passerelle ;
- courses, sauts, genuflexions afin de tester la passerelle sous sollicitations extrêmes.

Les essais doivent être préparés de façon à définir a priori des seuils d'alerte au-delà desquels les essais doivent être arrêtés.

En présence d'amortisseurs, les essais doivent être conduits avec les amortisseurs en fonctionnement et bloqués dans un second temps de façon à déterminer leur efficacité réelle.

Les essais sont réussis si les vibrations ressenties lors du passage de foules désynchronisées conduisent à des vibrations acceptables par le maître d'ouvrage, tolérables en cas de foules synchronisées, et pas trop intolérables en cas d'essais de chargement exceptionnels (sauts, courses, genuflexions, vandalisme etc.). La décision revient dans tous les cas au maître d'ouvrage qui doit juger du niveau de confort de sa passerelle en fonction de ses besoins.



Annexe 1

Rappels de dynamique des structures

A.1.1 - L'oscillateur simple

A.1.1.1 - Introduction

L'oscillateur simple est l'élément de base de la mécanique des vibrations. Son étude permet d'appréhender les phénomènes caractéristiques de l'analyse dynamique. En outre, on verra que l'analyse dynamique de structures ramène celles-ci à des oscillateurs simples.

L'oscillateur simple est constitué d'une masse m , reliée à un point fixe par l'intermédiaire d'un ressort linéaire de raideur k , et d'un amortisseur linéaire de viscosité c (figure A.1.1).

Cet oscillateur est entièrement déterminé lorsque l'on connaît sa position $x(t)$; un seul paramètre étant suffisant pour le décrire, on dit qu'il a 1 degré de liberté (1 ddl) : on l'appelle également oscillateur à 1 ddl. La masse peut être soumise à une excitation dynamique $F(t)$.

Nous supposons toujours que l'oscillateur effectue des petits mouvements autour de sa configuration d'équilibre : $x(t)$ désigne sa position autour de cette configuration d'équilibre.

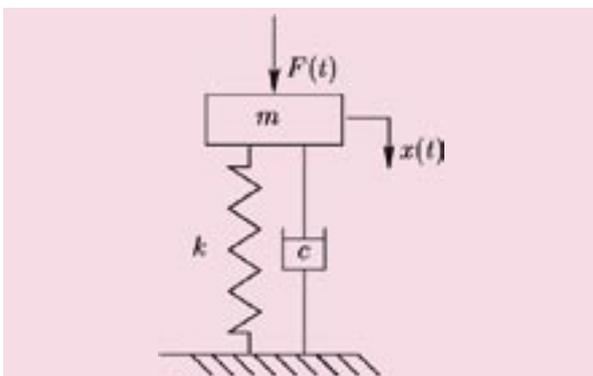


Figure A.1.1 : oscillateur simple

On réalise une étude exhaustive de cet oscillateur :

- oscillation libre amortie/non-amortie,
- oscillation forcée amortie/non-amortie.

Le cas « non-amorti » correspond à une valeur d'amortissement nulle. On dit alors que le système est conservatif.

Le cas « libre » correspond à une excitation nulle.

On mettra également en évidence le phénomène de résonance : on définira la pulsation propre d'un système. Enfin, un bref exposé sur l'amortissement sera présenté.

A.1.1.2 - Mise en équation

La masse m (figure A.1.1) est soumise à

- la force de rappel du ressort $-k x$: si la raideur k est négative, le ressort va dans le sens du mouvement : on est en présence de flambement ;
- la force de dissipation visqueuse $-c \dot{x}$: si la viscosité c est négative, la structure ne peut pas dissiper d'énergie : on est en présence d'instabilité dynamique ;
- la force extérieure $F(t)$.

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit donc :

$$m \ddot{x} = F - c \dot{x} - k x \quad (\text{Eq. A.1.1})$$

qui se réécrit sous la forme :

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = F \quad (\text{Eq. A.1.2})$$

Pour résoudre une telle équation, il faut évidemment disposer des conditions initiales :

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= \dot{x}_0 \end{aligned}$$

On a donc une équation différentielle à coefficients constants et à une entrée, la force $F(t)$. D'un point de

vue pratique, le système étant linéaire, on peut séparer l'étude de cet oscillateur selon deux régimes :

- le régime propre ou libre: le système est uniquement excité par des conditions initiales non nulles : on obtient alors les vibrations libres du système ;
- le régime forcé : seule la force $F(t)$ est non nulle ; cette force peut être sinusoïdale, périodique, aléatoire ou quelconque.

Il est courant et pratique de diviser l'équation (A.1.2) par m . On pose alors :

- $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f_0$: pulsation naturelle ou propre de l'oscillateur (rad/s) ; f_0 étant la fréquence propre de l'oscillateur (en Hz).
- $\xi = \frac{c}{2\sqrt{k m}}$: taux d'amortissement critique (sans dimension).

L'équation (A.1.2) devient :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} \quad (\text{Eq. A.1.3})$$

A.1.1.3 - Oscillation libre

Le système est mis en vibration uniquement par des conditions initiales non nulles :

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0 \\ x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= \dot{x}_0 \end{aligned}$$

La solution de cette équation différentielle à coefficients constants est du type :

$$x(t) = A e^{(r)t}$$

avec r vérifiant l'équation caractéristique :

$$r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

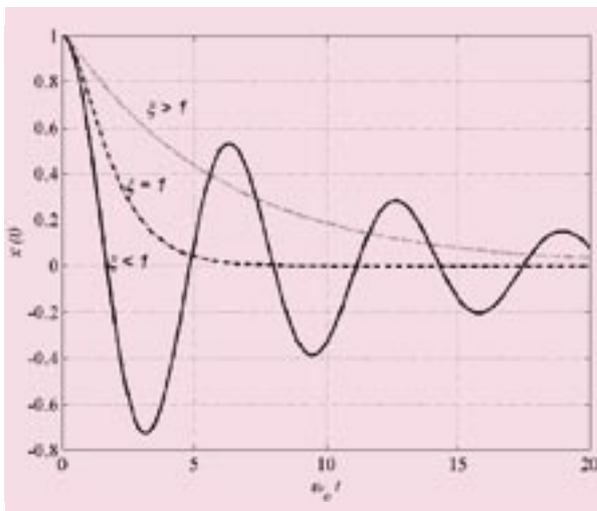


Figure A.1.2 : oscillations libres

dont le discriminant réduit vaut :

$$\Delta = \omega_0^2 (\xi^2 - 1)$$

On supposera que ξ est positif (système dissipatif) ou nul. Ainsi on obtient des régimes différents selon si ξ est inférieur, égal ou supérieur à 1 (figure A.1.2). On étudiera ici le seul cas courant dans la pratique : ξ est strictement plus petit que 1.

Amortissement $\xi = 0$: le système est non-amorti (ou conservatif)

La solution est alors :

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)$$

A et B sont deux constantes à déterminer à l'aide des conditions initiales :

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 = B \\ \dot{x}(0) &= \dot{x}_0 = A\omega_0 \end{aligned}$$

A noter que la solution peut également s'écrire sous la forme :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Les constantes d'intégration sont maintenant A et la phase ϕ , qui sont également obtenues à l'aide des conditions initiales.

Amortissement ξ est strictement compris entre 0 et 1

Il s'agit du cas le plus intéressant en pratique. Les solutions de l'équation caractéristique sont :

$$r_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$$

La solution générale de l'équation de mouvement s'écrit selon une des trois écritures suivantes :

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{(-\xi\omega_0 + i\omega_0\sqrt{1-\xi^2})t} + A_2 e^{(-\xi\omega_0 - i\omega_0\sqrt{1-\xi^2})t} \\ &= B_1 e^{-\xi\omega_0 t} \cos(\omega_0\sqrt{1-\xi^2} t) + B_2 e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_0\sqrt{1-\xi^2} t) \\ &= C_1 e^{-\xi\omega_0 t} \cos(\omega_0\sqrt{1-\xi^2} t + \phi) \end{aligned}$$

On appellera pulsation naturelle du système amorti ou pseudo-pulsation, la pulsation ω_a :

$$\omega_a = \omega_0 \sqrt{1-\xi^2}$$

Les constantes sont évidemment déterminées grâce aux conditions initiales.

Remarque

Notons que si l'amortissement ξ était négatif, on aurait une solution qui deviendrait divergente : les oscillations auraient une amplitude qui augmenterait exponentiellement. On rencontre ce problème dans le cadre de structures excitées par le vent : le vent peut induire une force proportionnelle à la vitesse et de même sens ; il est alors possible d'obtenir un amortissement négatif, dès que ce coefficient de proportionnalité devient supérieur à l'amortissement de la structure.

A.1.1.4 - Vibration forcée

Exposé du problème

L'objectif est de résoudre l'équation (A.1.3). Différents cas peuvent être examinés pour $F(t)$: F peut être harmonique, périodique, aléatoire ou encore quelconque.

D'un point de vue mathématique, la solution générale de (A.1.3) est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre (mouvement ou régime transitoire) et d'une solution particulière de l'équation complète (mouvement ou régime permanent) $x_{sp}(t)$. Elle peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$x(t) = A e^{-\zeta \omega_0 t} \cos(\omega_0 t - \phi) + x_{sp}(t) \quad (\text{Eq. A.1.4})$$

Les constantes sont déterminées avec les conditions initiales.

Le régime transitoire est associé au mouvement libre : son influence devient vite négligeable (en fait au bout de quelques périodes propres il est déjà amorti). Lors de l'étude avec excitation harmonique ou périodique, on n'en tiendra pas compte.

À l'aide de l'excitation harmonique, on va introduire la notion de fonction de transfert. Cette notion est fondamentale en mécanique des vibrations.

Excitation harmonique

Une excitation harmonique est une fonction sinusoïdale :

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t) = \Re(F_0 e^{i \omega t})$$

Une solution particulière intéressante est de la forme :

$$x(t) = X(\omega) \cos(\omega t + \phi)$$

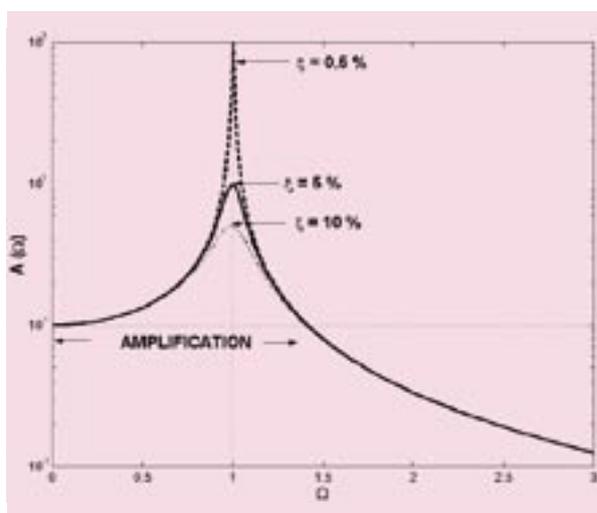


Figure A.1.3 : phénomène de résonance

Pour effectuer plus simplement et plus rapidement les calculs, on travaille en nombres complexes. On cherche donc une solution de la forme :

$$\bar{x}(t) = X(\omega) e^{i(\omega t - \phi)} \quad (\text{Eq. A.1.5})$$

avec $X(\omega) \in \mathbb{R}^+$.

La solution recherchée est donc la partie réelle de : $\bar{x}(t) ; x(t) = \Re(\bar{x}(t))$

On injecte (A.1.5) dans l'équation (A.1.3). Après simplification par le facteur $e^{i \omega t}$, on obtient :

$$e^{-i \phi} (-\omega^2 X(\omega) + 2i \xi \omega_0 \omega X(\omega) + \omega_0^2 X(\omega)) = \frac{F_0}{m}$$

On définit alors la fonction de transfert, appelée également réponse en fréquence, $H_{x,F}(\omega)$ entre l'excitation et la réponse (ici en déplacement) par le rapport :

$$H_{x,F}(\omega) = \frac{X(\omega) e^{-i \phi}}{F_0 / m} = \frac{1}{-\omega^2 + 2i \xi \omega_0 \omega + \omega_0^2} \quad (\text{Eq. A.1.6})$$

Cette fonction caractérise la dynamique du système étudié. Si on pose $\Omega = \omega / \omega_0$, on définit l'amplification dynamique par :

$$A(\Omega) = \omega_0^2 H_{x,F}(\Omega) = \frac{X(\Omega) e^{-i \phi}}{F_0 / k} = \frac{X(\Omega) e^{-i \phi}}{x_{statique}} = \frac{1}{1 - \Omega^2 + 2i \xi \Omega} \quad (\text{Eq. A.1.7})$$

$x_{statique}$ est la valeur du déplacement que l'on obtiendrait si on exerçait une force statique F_0 sur l'oscillateur dont la rigidité est k : il est important de remarquer que cette valeur est prise par $X(\omega)$ à la fréquence nulle. Ainsi l'ordonnée à l'origine de la fonction $H_{x,F}$ se détermine avec un calcul statique : cette valeur est souvent appelée souplesse statique. Cette fonction $A(\Omega)$ montre que, à F_0 donné, la réponse maximale de l'oscillateur dépend effectivement de la fréquence (figure A.1.3) : pour certaine fréquence cette réponse est supérieure (voire très supérieure) à la réponse statique.

La solution complexe est donc :

$$\bar{x}(t) = \frac{F_0}{m} \frac{e^{i \omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i \xi \omega_0 \omega}$$

L'étude de $A(\Omega)$ montre que si ξ est compris entre 0 et $1/\sqrt{2}$ on obtient le phénomène de résonance (figure A.1.3) : $|A(\Omega)|$ admet un maximum pour $\Omega = \Omega_R = \sqrt{1 - 2\xi^2}$ qui vaut :

$$|A(\Omega_R)| = \frac{1}{2\xi} \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

On constate que plus l'amortissement est faible (*i.e.* plus ξ tend vers 0), plus l'amplification au niveau de la résonance est importante et tend vers $\frac{1}{2\xi}$: ainsi, pour $\xi = 0,5\%$, on constate figure A.1.3 une amplification de l'ordre de 100.

Remarque 1

À l'aide de cet oscillateur à 1 ddl, on illustre immédiatement la différence entre « statique » et « dynamique ». En statique, seule l'amplitude de l'excitation joue sur l'amplitude de la réponse ; en dynamique, il faut également tenir compte de la fréquence : exciter une structure à sa résonance peut produire (surtout si la structure est faiblement amortie) de grands déplacements donc un niveau de contraintes élevé dans la structure. C'est pourquoi il est si important de déterminer les fréquences de résonance d'une structure dès que l'on a une excitation dynamique.

Remarque 2

On constate que la résonance est atteinte pour une valeur de pulsation inférieure à la pulsation propre du système ω_0 . Néanmoins pour les systèmes faiblement amortis, on confond la pulsation de résonance en déplacement et la pulsation propre du système. En ce qui concerne la phase, on est à la résonance lorsque celle-ci vaut $\pi/2$.

Remarque 3

Dans ce qui précède, on n'a pas tenu compte des conditions initiales et du transitoire, car, comme on l'a fait remarquer précédemment, cette composante de la solution devient vite négligeable, comme on peut le voir sur la figure A.1.4. Toutefois, il est clair que plus l'amortissement est élevé, plus la composante transitoire devient vite négligeable.

Excitation périodique de période T

On se ramène au cas précédent. En effet, on peut développer la fonction de chargement en série de Fourier :

$$F(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} C_p \exp(i \frac{2\pi}{T} t)$$

Ainsi, en déterminant la solution $x_p(t)$ pour chaque harmonique p (paragraphe précédent), on obtient la solution en superposant (en sommant) les $x_p(t)$.

Excitation quelconque

En prenant la transformée de Fourier de l'équation (A.1.3), on obtient l'équation fréquentielle :

$$X(\omega) = \frac{F(\omega)/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i \xi \omega \omega_0} = H_{i,f}(\omega) \times \frac{F(\omega)}{m}$$

où $X(\omega)$ et $F(\omega)$ sont les transformées de Fourier de $x(t)$ et de $F(t)$. Par transformée de Fourier inverse, on en déduit alors $x(t)$ qui s'exprime à l'aide de l'intégrale de Duhamel :

$$x(t) = \frac{1}{m \omega_0 \sqrt{1-\xi^2}} \int_0^t F(\tau) e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} (t-\tau)) d\tau$$

(Eq. A.1.8)

En pratique, on réalise une intégration numérique de l'équation différentielle du mouvement (A.1.3), à l'aide d'un logiciel.

Excitation aléatoire

On suppose que l'excitation F est modélisée par un processus stochastique. La réponse x du système à 1 ddl est également un processus stochastique : on ne peut donc l'appréhender que par l'intermédiaire de grandeurs caractérisant ce processus (moyenne, écart-type, fonction d'autocorrélation, densité spectrale de puissance, ...).

Toutefois, l'étude des vibrations aléatoires dépasse l'objectif de cette annexe, aussi le lecteur est renvoyé à des ouvrages de références.

Excitation base

On impose maintenant un mouvement $u(t)$ au support : $F(t)$ et les conditions initiales sont donc supposées nulles.

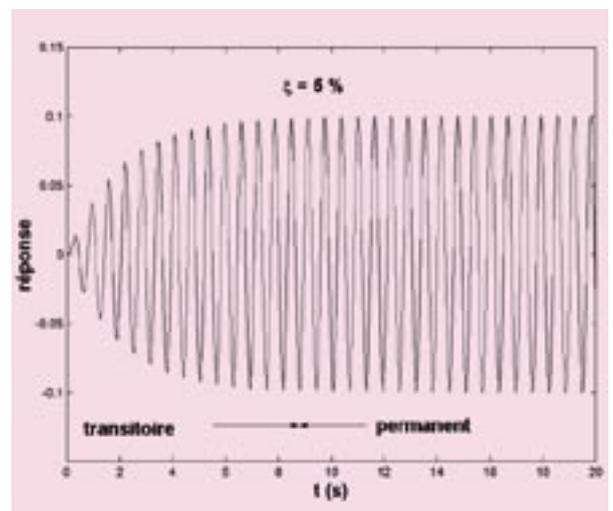
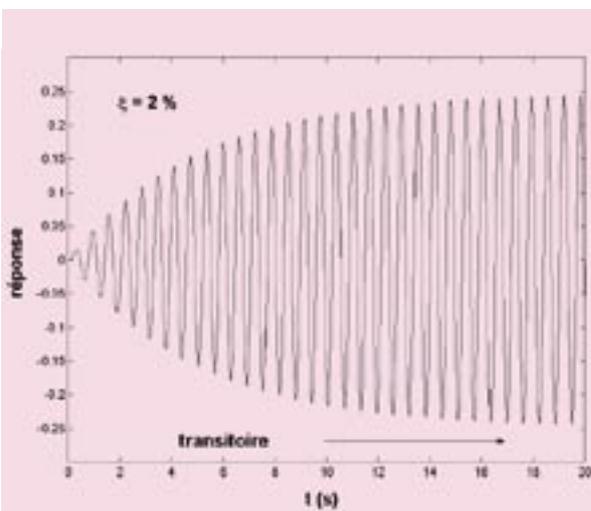


Figure A.1.4 : transitoire et amortissement

Nota Bene

x(t) et u(t) désignent des déplacements dans un repère absolu.

On ne s'intéressera qu'au mouvement harmonique du support :

$$u(t) = U e^{i \omega t}$$

On cherche à nouveau une solution de la forme : $X(\omega) e^{i(\omega t - \phi)}$. En injectant ces deux expressions dans l'équation (1.3) :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 2\xi\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u$$

On en déduit la fonction de transfert entre le déplacement de la base et le déplacement de la masse m :

$$H_{x,u}(\Omega) = \frac{X(\Omega)e^{-i\psi}}{U} = \frac{1+2i\xi\Omega}{1-\Omega^2+2i\xi\Omega} \quad (\text{Eq. A.1.9})$$

Le module de cette fonction de transfert est tracé sur la figure A.1.5.

Il est intéressant de constater l'existence d'un point fixe :

$$\forall \xi, |H_{x,u}(\sqrt{2})| = 1$$

De ce fait, lors d'une excitation base un compromis doit être trouvé afin d'optimiser l'amortissement : si des ξ élevés limitent les débattements jusqu'à $\sqrt{2}\omega_0$, après cette valeur, il vaut mieux des valeurs faibles de ξ .

L'excitation base est une excitation beaucoup plus courante qu'on pourrait le penser en premier abord : en effet, c'est l'excitation sismique (donc rare) qui vient à l'esprit en priorité pour illustrer une excitation base. Cependant, tous les systèmes sont excités par leur support. C'est d'ailleurs pour cette raison que l'on cherche à les « isoler » (plots élastiques, sandows).

En effet, si un système est excité, il transmet un signal (déplacement) à son : cela produit alors une onde qui est transmise (sol, mur, air...) et produit le déplacement du support d'un autre système.

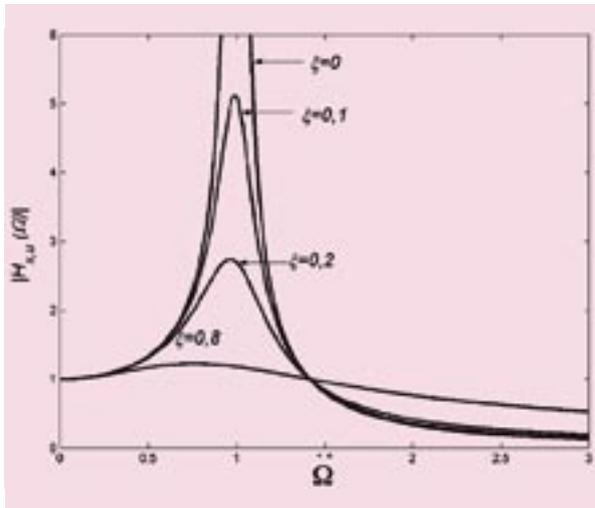


Figure A.1.5 : FRF en déplacement, vis-à-vis d'une excitation base

Si l'excitation base est périodique ou quelconque, on fait une étude identique à celle menée pour l'excitation forcée.

A.1.1.5 - Amortissement

Généralités

Nous l'avons vu : le phénomène de résonance occasionne dans les structures des déplacements donc des contraintes (très) supérieures à ce que l'on obtiendrait par un calcul statique. En outre, l'amplification maximale est directement liée à l'amortissement. Il est donc indispensable de bien estimer ce paramètre afin de réaliser un dimensionnement dynamique correct.

Les sources d'amortissement les plus communes sont :

- l'amortissement interne lié au matériau lui-même ; sa valeur est liée à la température et à la fréquence d'excitation ;
- l'amortissement par frottement (Coulomb) : il est lié à l'assemblage d'éléments de structure ; il est induit par le déplacement relatif de deux pièces en contact.

Expérimentalement, on constate que le taux d'amortissement critique ne dépend généralement pas de la fréquence : l'amortissement est alors appelé amortissement structural :

$$\xi_n = \xi$$

Classiquement, cet amortissement est modélisé par de l'amortissement visqueux : cela se traduit par une force qui s'oppose à la vitesse de la structure. Il est intéressant de savoir que, parfois, il existe des forces excitatrices qui « s'accordent » avec la vitesse (certaines modélisations du comportement du piéton) : cela génère un « amortissement négatif » qui engendre des oscillations de la structure qui deviennent de plus en plus grande de la structure. On est alors en présence d'instabilité (voir figure A.1.6) qui peut aller jusqu'à la ruine de la structure.

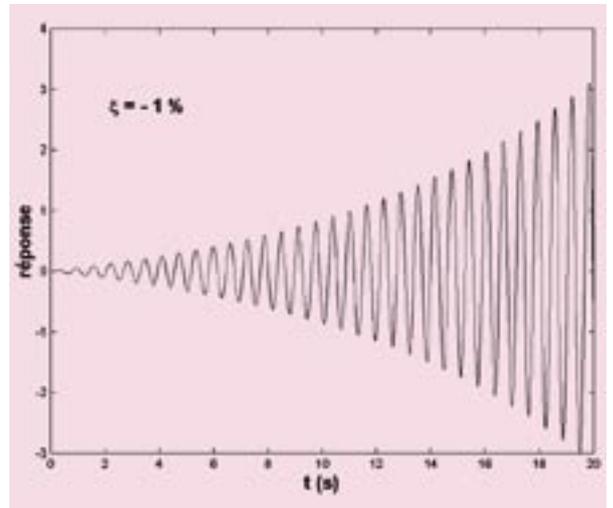


Figure A.1.6 : divergence induite par de l' « amortissement négatif »

Détermination expérimentale de ξ et ω_0 : essais de relaxation

Lorsque l'on étudie un système réel (ξ est a priori inférieur à 1) que l'on modélise par un oscillateur simple, identifier ses paramètres mécaniques caractéristiques, ω_0 et ξ , est indispensable.

Ceci est réalisable à l'aide d'un essai de vibration libre : on impose des conditions initiales au système et on mesure sa réponse temporelle. Puis on mesure (voir figure A.1.7) :

- la durée T_a entre deux maxima successifs situés en t_1 et t_2 ($T_a = t_2 - t_1$) : on obtient alors :

$$\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} = (2 \pi) / (T_a),$$

- la valeur $x(t_1)$ et $x(t_2)$ de deux maxima successifs : on en déduit alors la valeur du décrement logarithmique δ :

$$\exp(\delta) = \frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \exp(\xi \omega_0 T_a) = \exp\left(\frac{2 \pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right)$$

Soit : $\delta = \text{Log} (x(t_1) / (x(t_2))) \cong (2 \pi \xi) / \sqrt{1 - \xi^2}$

Donc, si $\xi \ll 1$ (ce qui est courant), $\xi \cong \delta / (2 \pi)$

Ainsi, les mesures de T_a et du décrement logarithmique δ permettent de déterminer les caractéristiques mécaniques d'un oscillateur simple.

Détermination expérimentale de ω_0 et ξ : méthode du pic

Définition : on appelle bande passante $\Delta\Omega$ (ou largeur de bande) à -3 décibels, la différence entre Ω_1 et Ω_2 tels que :

$$|A(\Omega_{1,2})| = \frac{|A(\Omega)|_{\max}}{\sqrt{2}}$$

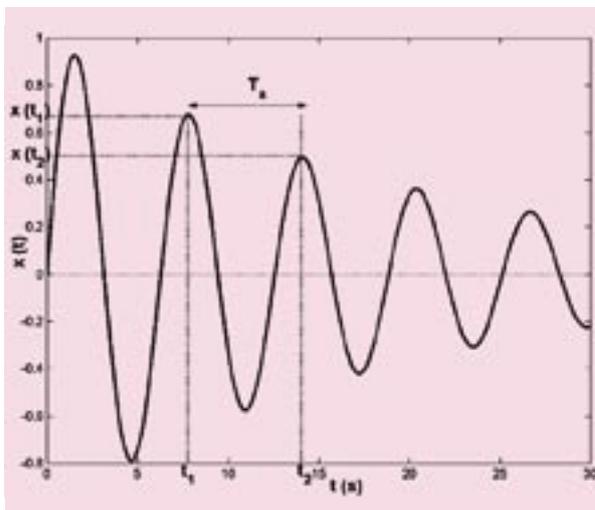


Figure A.1.7 : réponse de l'oscillateur 1 ddl

On montre que la bande passante est reliée à l'amortissement par la relation :

$$\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 \cong 2 \xi \sqrt{1 - \xi^2} \sim 2 \xi \text{ (si l'amortissement est faible)}$$

Plus cette largeur de bande tend vers 0, plus la résonance est aiguë, donc l'amortissement faible (figure A.1.8). En conséquence, pour déterminer Ω_R (et donc ω_0) et ξ , on trace expérimentalement $|A(\Omega)|$, en effectuant un essai de sinus balayé. La pulsation correspondant au maximum de la courbe, donne Ω_R . En outre, cette courbe permet d'obtenir la bande passante, donc, ξ .

Amortissement hystérétique

L'amortissement utilisé dans notre modèle est un amortissement de type visqueux : la force d'amortissement est proportionnelle à la vitesse. Ce modèle est très largement employé pour représenter l'amortissement. Cependant, en réalité, les structures ne sont que très peu soumises à ce type d'amortissement : son emploi est dû à sa simplicité.

Lors d'une sollicitation harmonique, ce modèle d'amortissement indique que l'énergie dissipée par cycle, pour une amplitude de déplacement donnée, dépend de la fréquence d'excitation : expérimentalement, on constate que tel n'est pas le cas. D'autres modèles doivent être déterminés pour pallier ce problème. Lorsque la sollicitation est harmonique, un modèle simple intéressant est le modèle d'amortissement hystérétique. Ce modèle consiste à utiliser un élément de ressort dont la rigidité k_s est complexe :

$$k_s = k (1 + i \eta)$$

où η est appelé facteur d'amortissement structural. Si on écrit alors l'équilibre dynamique de la masse m :

$$m \ddot{x} + k_s x = F(t)$$

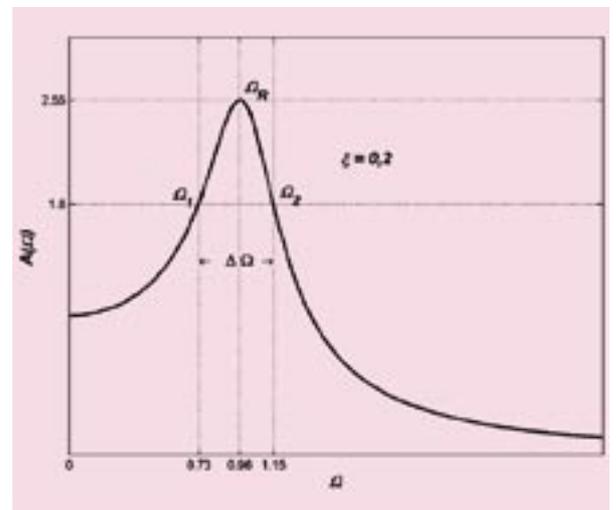


Figure A.1.8 : bande passante pour $\xi = 0,2$

Sous excitation harmonique, on peut définir un ξ équivalent à η de sorte à conserver l'énergie dissipée par cycle :

$$W_d = \pi k \eta x_0^2 = \pi \omega c x_0^2$$

Ce qui conduit à : $\eta = 2 \xi \frac{\omega}{\omega_0}$

A.1.2 - Systèmes linéaires à n ddl

Après avoir exposé l'oscillateur simple, on peut directement étudier les systèmes discrets à n ddl, puisque à partir de 2 ddl, les méthodes pour appréhender les phénomènes vibratoires sont les mêmes, quel que soit le nombre n de ddl.

Cependant, étudier des systèmes à 2 ddl permet de mener les calculs jusqu'au bout : c'est pourquoi, sans perte de généralité, les calculs, lorsqu'ils sont menés, sont effectués sur des systèmes à 2 ddl.

La méthode générale consiste à :

- écrire les équations dynamiques sous forme matricielle : les matrices de masse, raideur et d'amortissement sont alors définies ;
- étudier ensuite le système non-amorti : on définit alors les modes propres du système, la base modale ;
- si besoin, déterminer la solution temporelle (en se plaçant dans la base modale, par exemple).

Ainsi, à travers ce chapitre nous aborderons les notions de matrices de masse, de raideur et d'amortissement, les notions de modes propres d'une structure, de couplage entre les ddl.

A.1.2.1 - Mise en équation

Les systèmes à n ddl sont constitués de n masses reliées entre elles par des ressorts et des amortisseurs (figure A.1.9) : si tel n'est pas le cas, on est ramené à n oscillateurs simples. Ainsi, le déplacement d'une masse est dépendant du déplacement d'une autre masse : on dit que les n masses sont couplées par l'intermédiaire des ressorts et des amortisseurs.

Bien évidemment les n ddl sont les positions $x_i(t) = 1, \dots, n$ des n masses.

Pour le système représenté figure A.1.9, les équations de la dynamique s'écrivent :

$$\begin{cases} M_1 \ddot{x}_1(t) + (C_1 + C_2) \dot{x}_1(t) - C_2 \dot{x}_2(t) + (K_1 + K_2) x_1(t) - K_2 x_2(t) = F_1(t) \\ M_2 \ddot{x}_2(t) + (C_2 + C_3) \dot{x}_2(t) - C_2 \dot{x}_1(t) + (K_2 + K_3) x_2(t) - K_2 x_1(t) = F_2(t) \end{cases}$$

(Eq. A.1.10)

Ce système peut facilement s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 \\ -C_2 & C_2 + C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 + K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}$$

(Eq. A.1.11)

Ce qui s'écrit donc :

$$[M][\ddot{X}(t)] + [C][\dot{X}(t)] + [K][X(t)] = [F(t)] \quad (\text{Eq. 1.12})$$

Cette équation matricielle rappelle l'équation régissant l'oscillateur à 1 ddl. On appelle :

- $[X]$: vecteur des ddl ;
- $[M]$: matrice de masse ;
- $[C]$: matrice d'amortissement visqueux ;
- $[K]$: matrice de raideur ;
- $[F]$: vecteur des efforts extérieurs.

Les matrices de masse et de raideur peuvent être retrouvées par des considérations énergétiques :

- la matrice de masse est une matrice associée à l'énergie cinétique T du système qui est la somme des énergies cinétiques de chaque masse :

$$T = \frac{1}{2} M_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{x}_2^2 = \frac{1}{2} \dot{[X]} [M] [\dot{X}]$$

- la matrice de raideur est une matrice associée à l'énergie de déformation J du système, i.e. à l'énergie potentielle élastique de chaque ressort :

$$J = \frac{1}{2} K_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K_2 (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} K_3 x_2^2 = \frac{1}{2} [X] [K] [X]$$

Ces matrices sont donc des matrices symétriques associées à des grandeurs énergétiques.

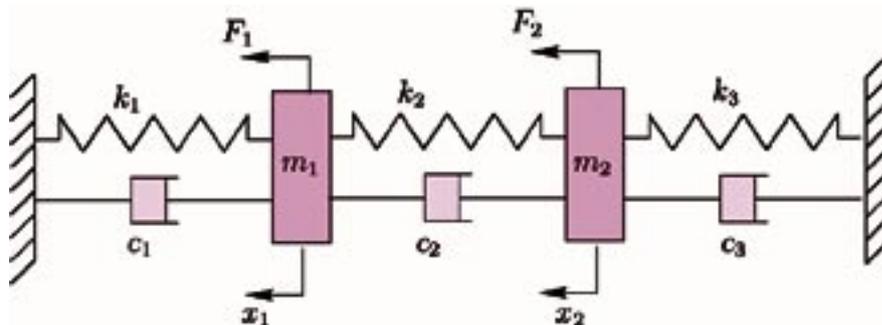


Figure A.1.9 : système à 2 ddl

A.1.2.2 - Système non-amorti

On suppose ici que la matrice d'amortissement est nulle.

Mouvement libre

Ce cas particulier ($[C]$ et $[F]$ nuls) est fondamental dans l'étude des systèmes dynamiques : il met en évidence la notion de modes propres. L'équation matricielle (A.1.11) devient alors :

$$[M][\ddot{X}] + [K][X] = [0] \quad (\text{Eq. A.1.13})$$

Les conditions initiales sont alors non nulles, sinon le système reste évidemment au repos. On cherche des solutions de la forme :

$$[X] = [\phi_0] e^{rt}$$

En injectant dans l'équation ci-dessus, on obtient le système homogène en ϕ_{0i} suivant :

$$[K + r^2 M] [\phi_0] = [0]$$

Soit, pour le système à 2 ddl de la figure A.1.9 :

$$\begin{bmatrix} K_1 + K_2 + r^2 M_1 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 + K_3 + r^2 M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{01} \\ \varphi_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ce système admet la solution nulle qui ne peut pas nous satisfaire dès que l'on a des conditions initiales non nulles. Pour obtenir une solution intéressante, il faut que le déterminant du système soit nul. On en déduit donc l'équation suivante en r :

$$\text{Det}([K + r^2 M]) = 0 \quad (\text{Eq. A.1.14})$$

Soit pour le système à 2 ddl ci-dessus on obtient :

$$((K_1 + K_2) + r^2 M_1)((K_2 + K_3) + r^2 M_2) - K_{22} = 0$$

Pour un système à n ddl cette équation caractéristique possède $2n$ solutions : $\pm i \omega_k$, $k = 1, \dots, n$. A chaque indice k est associé un vecteur propre ϕ_k , solution du système :

$$[K - \omega_k^2 M] [\phi_k] = [0]$$

Soit pour le système à 2 ddl :

$$\begin{bmatrix} K_1 + K_2 - \omega_k^2 M_1 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 + K_3 - \omega_k^2 M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{k1} \\ \varphi_{k2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les pulsations ω_k sont appelées les pulsations propres du système. Les vecteurs propres $[\phi_k]$ sont les vecteurs modaux du système. La solution s'écrit alors sous la forme :

$$[X(t)] = \sum_{k=1, \dots, n} [\phi_k] (\alpha_k e^{-i\omega_k t} + \beta_k e^{i\omega_k t})$$

où les α_k et les β_k sont déterminés par les conditions initiales.

Les composantes du vecteur ϕ_k sont évidemment

liées. Un vecteur modal est défini à une constante multiplicative près : on doit donc choisir une norme pour ces vecteurs. Les choix les plus fréquents sont les suivants :

- une des composantes est prise égale à 1 ;
- chaque mode est unitaire : $\|\phi_i\| = 1$;
- on norme par rapport à la matrice de masse : ${}^t[\phi_i] [M] [\phi_i] = 1$

Choisissons la première normalisation : $[\phi_i] = \begin{bmatrix} 1 \\ \phi_{2,i} \end{bmatrix}$

On est donc maintenant capable d'exprimer la solution générale du système à 2 ddl non-amorti sous excitation libre :

$$\begin{cases} x_1(t) = \alpha_1 e^{-i\omega_1 t} + \alpha_2 e^{i\omega_1 t} + \alpha_3 e^{-i\omega_2 t} + \alpha_4 e^{i\omega_2 t} \\ x_2(t) = \phi_{21}(\alpha_1 e^{-i\omega_1 t} + \alpha_2 e^{i\omega_1 t}) + \phi_{22}(\alpha_3 e^{-i\omega_2 t} + \alpha_4 e^{i\omega_2 t}) \end{cases}$$

Ces expressions sont réelles : x_1 et x_2 peuvent s'exprimer sous forme trigonométrique :

$$\begin{cases} x_1(t) = a_1 \cos(\omega_1 t) + a_2 \sin(\omega_1 t) + a_3 \cos(\omega_2 t) + a_4 \sin(\omega_2 t) \\ x_2(t) = \phi_{21}(a_1 \cos(\omega_1 t) + a_2 \sin(\omega_1 t)) + \phi_{22}(a_3 \cos(\omega_2 t) + a_4 \sin(\omega_2 t)) \end{cases}$$

Les constantes sont déterminées à l'aide des conditions initiales.

En résumé, un mode d'un système linéaire est une solution particulière du problème libre non-amorti telle que toutes les composantes du vecteur des ddl sont synchrones (elles atteignent leurs maxima et minima en même temps) :

$$[X_{\text{mod } i}(t)] = [\phi_i] e^{i\omega_i t}$$

Les pulsations propres ω_i sont les racines carrées des valeurs propres positives de la matrice $[M]^{-1} [K]$. Les formes propres d'un système discret sont les vecteurs propres ϕ_i associés.

Le couple (ω_i, ϕ_i) s'appelle un mode propre.

On cherche les modes directement en écrivant :

- pulsation propre ω_i : c'est l'ensemble des solutions de l'équation :

$$\det([K - \omega_i^2 M]) = 0$$

- vecteur propre $[\phi_i]$:

$$[K - \omega_i^2 M] [\phi_i] = [0]$$

Orthogonalité des modes

Les modes propres sont orthogonaux par rapport à la matrice de masse et par rapport à la matrice de raideur :

$$\forall i, j \quad {}^t[\phi_j] [M] [\phi_i] = m_i \delta_{ij}$$

$$\forall i, j \quad {}^t[\phi_j] [K] [\phi_i] = k_i \delta_{ij}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker et m_i et k_i sont la masse et la raideur généralisée associées au mode i :

ces grandeurs dépendent de la norme des vecteurs propres choisie.

Excitation harmonique

Encore une fois, avant de passer à une excitation forcée générale, on s'intéresse à l'excitation harmonique : on généralisera ainsi la notion de fonction de transfert.

On considère donc que la structure est excitée par un vecteur force dont chaque composante est harmonique et en phase avec les autres composantes :

$$[F(t)] = e^{i\omega t} [F_0]$$

On suppose donc que la solution est de la forme :

$$[X(t)] = e^{i\omega t} [X_0]$$

L'équation matricielle de la dynamique devient donc :

$$([K] - \omega^2 [M]) [X_0] e^{i\omega t} = e^{i\omega t} [F_0]$$

d'où :

$$[X_0] = ([K] - \omega^2 [M])^{-1} [F_0] = [\alpha(\omega)] [F_0]$$

la matrice $[\alpha]$ est appelée matrice admittance ou matrice des coefficients d'influence dynamique : c'est une matrice de réponse en fréquence entre l'excitation forcée $[F]$ et la réponse $[X(t)]$.

On met en évidence le phénomène de résonance : si on excite à une fréquence propre, la réponse devient infinie.

Le terme général de cette matrice, α_{ij} traduit l'influence de la composante j de la force sur la composante i du déplacement ; en effet si toutes les composantes de $[F_0]$ sont nulles sauf la composante j , on a :

$$\alpha_{ij}(\omega) = \frac{x_{0i}}{F_{0j}}$$

Ceci n'est pas sans rappeler la fonction de transfert d'un système à 1 ddl entre l'excitation F_{0j} et la réponse x_{0i} . On dit encore que α_{ij} est la fonction de transfert entre F_{0j} et x_{0i} ou encore sa fonction de réponse en fréquence (FRF).

Remarque

On a un pic de résonance pour chaque fréquence propre du système. En théorie ce pic est infini. Cela vient de l'hypothèse (irréaliste) que le système n'est pas amorti.

Excitation quelconque

Rappelons l'équation à résoudre :

$$[M]\ddot{[X]} + [K][X] = [F(t)]$$

Pour déterminer les composantes de $[X(t)]$, il est toujours possible d'effectuer une intégration temporelle (numérique) des équations. Cela nécessite par ailleurs de déterminer l'inverse de la matrice de masse (coût numérique élevé si le nombre de ddl est

élevé). En fait, on a un système différentiel d'équations couplées. Si les équations à résoudre n'étaient pas couplées, cela simplifierait la résolution : on aurait n équations différentielles du second ordre à résoudre (cf. chapitre précédent).

C'est pourquoi, il est courant de procéder autrement : on utilise une méthode modale qui découple les équations.

Le principe est de se placer en base modale : la solution $[X(t)]$ est donc exprimée à l'aide d'une combinaison des vecteurs propres, qui forment une base. On effectue donc le changement de repère à l'aide de la transformation :

$$[X(t)] = [\phi][q(t)] = \sum_{i=1}^n [\phi_i] q_i(t) \quad (\text{Eq. A.1.15})$$

où :

- $[\phi] = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]$: est une matrice carrée dont les colonnes sont les vecteurs propres ;
- $[q(t)]$ est le vecteur des nouvelles variables, appelées variables modales.

Si on remplace $[X(t)]$ par son expression (Eq. A.1.15), dans l'équation matricielle de la dynamique, et si on pré-multiplie cette équation par $[\phi]$, on obtient :

$$[\phi][M][\phi]^{-1}[\ddot{q}(t)] + [\phi][K][\phi]^{-1}[q(t)] = [\phi][F(t)]$$

Vu l'orthogonalité des modes vis-à-vis des matrices de masse et de raideur, on a :

$$\begin{bmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix} [\ddot{q}(t)] + \begin{bmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & k_i & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix} [q(t)] = [\phi][F(t)]$$

Ainsi, les deux matrices $[\phi][M][\phi]$ et $[\phi][K][\phi]$ étant diagonales, on obtient un système d'équations différentielles découplées du type :

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \frac{[\phi_i][F(t)]}{m_i} = p_i(t) \quad (\text{Eq. A.1.16})$$

Le vecteur $[p(t)]$ est le vecteur des facteurs des participations modales de la force $[F(t)]$: c'est la composante par unité de masse généralisée de $[F(t)]$ dans la base modale.

On est donc ramené au chapitre sur l'oscillateur à 1 ddl : l'intégrale de Duhamel permet d'obtenir chaque $q_i(t)$. On en déduit ensuite le vecteur $[X]$ par superposition modale, d'après l'équation (A.1.15).

À l'aide du principe de superposition modale, on ramène l'étude d'un système à n ddl à l'étude de n oscillateurs simples.

Cas particulier : pour une excitation harmonique, on a :

$$q_i(t) = q_{i0} \cos(\omega t)$$

avec :

$$q_{i0} = \frac{P_{i0}}{\omega_i^2 - \omega^2}$$

d'où :

$$[X] = \sum_{i=1}^n [\phi_i] \frac{P_{i0}}{\omega_i^2 - \omega^2} \cos(\omega t)$$

Cette expression met bien en évidence le phénomène de résonance pour chaque pulsation propre.

A.1.2.3 - Systèmes amortis

Pour simplifier l'étude, seul l'amortissement visqueux est considéré. L'équation du problème est donc l'équation (A.1.12) déjà énoncée :

$$[M][\ddot{X}] + [C][\dot{X}] + [K][X] = [F]$$

Il est, là encore, possible d'intégrer directement les équations. Nous verrons même que cela peut être indispensable pour prendre en compte les effets de dissipation.

Néanmoins nous allons appliquer la méthode modale à notre système : nous serons alors effectivement amenés à discuter de sa validité.

Dans ce qui suit, le couple $(\omega_i, [\phi_i])$ désigne le mode i du système équivalent non-amorti. Nous allons décomposer l'équation (A.1.12) sur la base des vecteurs propres en suivant le même cheminement qu'au paragraphe précédent :

$$[\phi] [M] [\phi]^T \ddot{q}(t) + [\phi] [C] [\phi]^T \dot{q}(t) + [\phi] [K] [\phi]^T q(t) = [\phi] [F](t)$$

Si les matrices $[\phi] [M] [\phi]^T$ et $[\phi] [K] [\phi]^T$ sont évidemment toujours diagonales, il n'en est a priori pas de même pour la matrice $[\phi] [C] [\phi]^T$; a priori les vecteurs modaux ne sont pas orthogonaux vis-à-vis de la matrice d'amortissement :

$$\gamma_{ij} = [\phi_i]^T [C] [\phi_j] \neq \text{constante} \times \delta_{ij}$$

Ainsi, la projection sur la base des modes propres ne découple pas les équations du système amorti : la méthode modale semble perdre beaucoup de son intérêt pour déterminer une solution numérique de $[X]$.

Hypothèse de Basile

Si le couplage dû à l'amortissement était nul, la méthode modale retrouverait tout son intérêt. Cela n'est réaliste que si la répartition de l'amortissement est semblable à celle de la masse et de la rigidité : une telle hypothèse n'est pas justifiable a priori.

En pratique, la répartition de l'amortissement est très mal connue. Cependant, lorsque la structure est faiblement dissipative et que les fréquences propres sont bien séparées, on peut montrer que l'hypothèse d'amortissement diagonal est raisonnable : c'est l'hypothèse dite de Basile.

Caughey a montré que les modes propres sont effectivement orthogonaux à toute matrice d'amortissement qui s'exprime sous la forme générale :

$$[C] = \sum_{k=1}^N a_k [M] ([M]^{-1} [K])^{k-1}$$

Dans le cas particulier où N vaut 2, on retrouve l'amortissement proportionnel : la matrice d'amortissement s'exprime selon une combinaison linéaire de $[K]$ et $[M]$; il est alors clair que, dans ce cas particulier, les modes propres du système sont orthogonaux vis-à-vis de la matrice d'amortissement.

L'amortissement est souvent faible s'il est bien réparti. Dans ce cas, on peut également montrer que les modes de la structure sont bien approchés par les modes propres de la structure non-amortie. On appliquera donc encore le principe de superposition modale en utilisant les modes de la structure non-amortie.

Ainsi, si on pose :

$$\xi_i = \frac{\gamma_i}{2\omega_i m_i}$$

on retrouve un système d'équations découplées :

$$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = p_i(t) = \frac{[\phi_i]^T [F]}{m_i} \quad (\text{Eq. A.1.17})$$

Chacune représente l'équation du mouvement d'un oscillateur simple amorti sous excitation forcée.

En pratique, chaque taux d'amortissement critique ξ_i doit être recalé expérimentalement. En fait il est très rare de trouver une structure dont l'amortissement répond à une modélisation simple.

Il est courant de considérer que la valeur du taux d'amortissement critique ne dépend pas du mode considéré : $\xi_i = \xi$. Cette constante ξ est alors fixée par l'expérimentation ou le règlement.

Excitation harmonique - cas des systèmes faiblement dissipatifs

Les modes propres sont donc supposés orthogonaux vis-à-vis de la matrice d'amortissement.

On effectue une résolution par superposition modale : on cherche $[X]$ la solution du problème à l'aide des variables modale :

$$[X] = [\phi] [q]$$

Chaque variable modale q_i est alors soumise à l'équation (A.1.17). La solution cherchée et l'excitation sont, classiquement, de la forme :

$$\begin{aligned} [q] &= [q_0] e^{i\omega t} \quad (\text{Eq. A.1.18}) \\ [p] &= [p_0] e^{i\omega t} \end{aligned}$$

$[p]$ étant toujours le vecteur des facteurs de participation modale à la force $[F]$:

$$p_i = \frac{[\phi_i] \parallel F]}{[\phi_i] \parallel M \parallel \phi_i]} = \frac{[\phi_i] \parallel F]}{m_i} = p_{0i} e^{i\omega t}$$

La solution est donc :

$$[X_0] = \sum_{i=1}^n q_{0i} [\phi_i] = \sum_{i=1}^n \frac{p_{0i} [\phi_i]}{\omega_i^2 - \omega^2 + i2\xi_i \omega_i \omega} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} \frac{[\phi_i] \parallel F]}{\omega_i^2 - \omega^2 + i2\xi_i \omega_i \omega} [F]$$

On reconnaît alors que chaque terme de cette somme est en fait la réponse d'un oscillateur à 1 ddl sous excitation harmonique. La réponse d'un oscillateur à n ddl s'exprime donc en fonction de la réponse de n oscillateurs à 1 ddl.

Excitation quelconque

Grâce à la méthode de superposition modale, on est ramené à l'étude d'un système à un ddl sous excitation quelconque. La solution est alors donnée par l'intégrale de Duhamel :

$$q_i(t) = \frac{1}{\omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}} \int_0^t p_i(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin(\omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} (t - \tau)) d\tau$$

ce qui conduit à la détermination de la solution, par superposition modale :

$$[X] = \sum_{i=1}^n [\phi_i] q_i(t)$$

A.1.2.4 - Troncature modale

Une structure complexe peut être modélisée par n ddl avec n très grand. Aussi, il est courant de représenter les ddl physiques par une combinaison linéaire des N premiers modes (ils sont supposés être rangés par ordre croissant de la fréquence), avec N inférieur, voire très inférieur à n .

Une telle opération doit être pratiquée avec certaines précautions : il faut donc définir un critère fiable permettant de justifier cette troncature modale.

Cette approche va dépendre du spectre de l'excitation : s'il est limité dans une gamme de pulsation inférieure à ω_{N_2} , cela peut se justifier. Néanmoins, pour plus de rigueur et de précision, il est alors indispensable de tenir compte de ces modes négligés. Si on estime que ces modes ont une réponse quasi-statique on peut montrer qu'il est possible d'exprimer les modes négligés en fonction des modes retenus :

$$\begin{aligned} [X] &= \sum_{i=1}^N q_i(t) [\phi_i] + \left(\sum_{i=N+1}^n \frac{[\phi_i] \parallel F]}{m_i \omega_i^2} \right) [F] \\ &= \sum_{i=1}^N q_i(t) [\phi_i] + [K]^{-1} - \sum_{i=1}^N \frac{[\phi_i] \parallel F]}{m_i \omega_i^2} [F] \end{aligned}$$

On appelle raideur résiduelle K_{res} et souplesse résiduelle S_{res} les matrices telles que :

$$[S_{res}] = [K_{res}]^{-1} = [K]^{-1} - \sum_{i=1}^N \frac{[\phi_i] \parallel [\phi_i]}{m_i \omega_i^2}$$

Il est très important de noter que cette matrice ne dépend que des caractéristiques statiques ($[K]$) et des N premiers modes : on tient ainsi compte des modes négligés sans avoir à les calculer !

Remarque : l'expression ci-dessus vient de la décomposition modale de l'inverse de la matrice de raideur :

$$[K]^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{[\phi_i] \parallel [\phi_i]}{m_i \omega_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{[\phi_i] \parallel [\phi_i]}{k_i} \quad (\text{Eq. A.1.19})$$

En effet, si le système est sollicité statiquement, les équations modales (1.17) deviennent

$$\omega_i^2 q_i = \frac{[\phi_i] \parallel F]}{m_i}$$

et alors la réponse modale est :

$$[X] = \sum_{i=1}^n [\phi_i] q_i = \sum_{i=1}^n [\phi_i] \frac{[\phi_i] \parallel F]}{\omega_i^2 m_i} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{[\phi_i] \parallel [\phi_i]}{\omega_i^2 m_i} \right) [F] = [K]^{-1} [F]$$

Par identification, on retrouve effectivement l'équation (A.1.19).

A.1.2.5 - Méthode de Rayleigh-Ritz

Méthode de Rayleigh

Nous proposons une approche énergétique pour déterminer une estimation de la première fréquence propre d'une structure : c'est la méthode de Rayleigh.

Cette méthode repose sur un principe d'approximation du champ de déplacement du système étudié : on postule a priori la déformée de la structure, soit, ici, un vecteur déplacement $[\bar{X}_0]$:

$$[\bar{X}(t)] = [\bar{X}_0] d(t)$$

Ce vecteur doit être cinématiquement admissible.

On calcule alors les énergies de déformation et cinétique associées à cette déformée. La première pulsation propre est alors estimée par le rapport :

$$\omega_1^2 = \frac{[\bar{X}_0] \parallel [K] \parallel \bar{X}_0]}{[\bar{X}_0] \parallel M \parallel \bar{X}_0]} \quad (\text{Eq. A.1.20})$$

Si le vecteur $[\bar{X}_0]$ correspond au premier vecteur propre, alors la solution obtenue est la première pulsation propre. Plus on se rapproche du vecteur propre, meilleure est l'estimation.

Tout le problème est de choisir un « bon » vecteur $[\tilde{X}_0]$, c'est-à-dire d'avoir une idée sur le vecteur propre. En général, le vecteur des déplacements obtenus sous un chargement statique proportionnel à la valeur des masses, est un vecteur proche du premier vecteur propre.

Méthode de Rayleigh-Ritz

C'est en quelque sorte une généralisation de la méthode de Rayleigh : elle permet non seulement d'obtenir une estimation des N premières fréquences propres (souvent N est très inférieur à n), mais également d'obtenir de façon approchée les vecteurs propres. Le principe est le même : on postule N vecteurs $\{\tilde{X}_{0i}\}_{i=1 \dots N}$ indépendants, cinématiquement admissibles : le vecteur déplacement $[X(t)]$ est alors approché par :

$$[X(t)] = [\tilde{X}(t)] = [\tilde{X}_{01} \dots \tilde{X}_{0N}] \begin{bmatrix} d_1(t) \\ \vdots \\ d_N(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N [\tilde{X}_{0i}] d_i(t) = \frac{[\tilde{X}_0]}{n \times n} d(t)$$

On obtient alors une estimation des N premières fréquences propres en résolvant le problème suivant :

$$\underbrace{[\tilde{X}_0][K][\tilde{X}_0]}_{N \times N} - \omega_i^2 \underbrace{[\tilde{X}_0][M][\tilde{X}_0]}_{N \times N} = 0$$

Si on pose :

$$[\tilde{K}] = [\tilde{X}_0][K][\tilde{X}_0]$$

$$[\tilde{M}] = [\tilde{X}_0][M][\tilde{X}_0]$$

on est donc ramené à déterminer les valeurs et vecteurs propres associés au problème :

$$[\tilde{K}] - \omega^2 [\tilde{M}] = 0$$

Ce problème est plus intéressant à résoudre que le problème original dans la mesure où N est (très) inférieur à n .

Ainsi les $\tilde{\omega}_i$ obtenus sont des approximations des N premières pulsations propres ω_i du système. A chacune de ces valeurs propres correspond un vecteur propre :

$$\tilde{\psi}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_{i1} \\ \vdots \\ \tilde{\psi}_{iN} \end{bmatrix}$$

On obtient alors l'approximation du vecteur propre i par :

$$[\tilde{\phi}_i] = [\tilde{X}_{01} \dots \tilde{X}_{0N}] \tilde{\psi}_i = [\tilde{X}_0] \tilde{\psi}_i = \sum_{j=1}^N [\tilde{X}_{0j}] \tilde{\psi}_{ij}$$

A.1.2.6 - Conclusion

Représenter un système à n ddl par n oscillateurs simples : voilà l'idée fondamentale de ce chapitre et de la mécanique des vibrations linéaires des systèmes discrets en général. Cela se traduit par le schéma de la figure A.1.10.

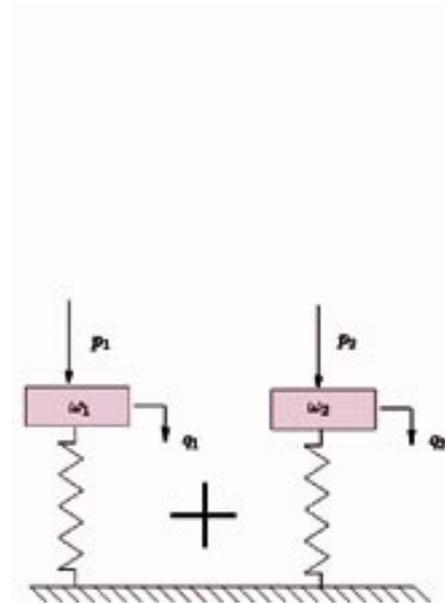
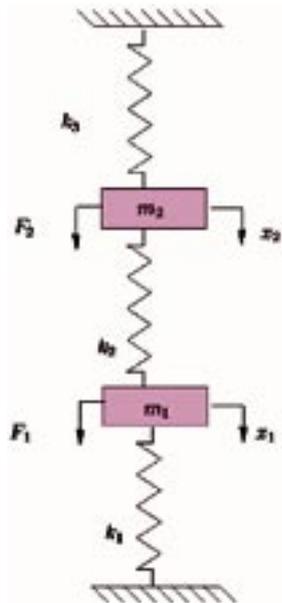


Figure A.1.10 : approche modale d'un système à 2 ddl

A.1.3 - Systèmes élastiques continus

A.1.3.1 - Généralités

Les systèmes réels sont rarement discrets. Ainsi, une poutre est déformable en tout point, possède en tout point une certaine inertie et est apte à dissiper de l'énergie en tout point.

Nous sommes donc en présence d'un problème de dynamique des milieux continus : aux équations de la statique, il faut donc rajouter le terme qui correspond aux forces d'inertie.

Cependant il ne faut pas croire que l'étude des systèmes discrets était inutile : nous verrons que, d'un point de vue pratique, l'étude de systèmes continus se ramène finalement à l'étude de systèmes discrets. Une telle approche sera nécessairement une approximation, puisqu'un système discret a un nombre fini de ddl, alors qu'un système continu a une infinité de ddl.

L'étude dynamique d'un système élastique continu nécessite de :

- poser le problème vibratoire (formuler les équations) :
 - déterminer l'équation aux dérivées partielles régissant le champ de déplacement $X(x, y, z, t)$: c'est l'équation du mouvement ;
 - donner les équations exprimant les conditions aux limites : ces équations peuvent également être des équations aux dérivées partielles ;
 - donner les conditions initiales ;
- résoudre le problème :
 - calcul des modes propres du système élastique continu ;
 - calcul de la réponse du système élastique continu.

Pour ce faire, nous supposons que les systèmes étudiés vérifient les hypothèses suivantes :

- le système élastique continu ne subit que des petites déformations autour de son état naturel ;
- le système élastique continu a (par définition) une loi de comportement élastique linéaire ; ses caractéristiques mécaniques sont E son module de Young et ρ sa masse volumique ;
- le système élastique continu vibre dans le vide.

A.1.3.2 - Mise en équation

On étudie une poutre (à entendre ici au sens large) dans ce chapitre : c'est un milieu continu unidimensionnel rectiligne susceptible de se déformer :

- par traction-compression (barre) ;
- par flexion pure.

Nous étudierons successivement ces 2 cas.

Nous n'étudierons que des structures bidimensionnelles sans perte réelle de généralité : l'aspect tridimensionnel rajoute uniquement des variables supplémentaires.

D'une manière générale le champ de déplacement $X(x, y, z, t)$ d'un point $M(x, y, z, t)$ d'une poutre est

$$\text{caractérisé par ses ddl : } X(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} u(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \\ \theta(x, y, z, t) \end{bmatrix}$$

où :

- u est le déplacement longitudinal i.e. selon la direction de la poutre ;
- w est le déplacement transverse (flèche) i.e. selon la direction perpendiculaire à la poutre ;
- θ est la rotation autour d'un axe orthogonal au plan de la structure : c'est la pente prise par la poutre, due au moment fléchissant.

En outre, on travaille dans un repère lié à la poutre : l'axe de la poutre est confondu avec (x', x) et le système est dans le plan (x, z) .

Mouvement longitudinal d'une barre

On ne s'intéresse donc qu'à la composante $u(x, t)$ de $X(x, t)$. L'équilibre d'un tronçon de poutre d'épaisseur (supposée infinitésimale) dx et de section S , soumis à :

- l'effort normal en x ;
- l'opposé de l'effort normal en $x + dx$;
- un effort extérieur réparti (précontrainte) $p(x) dx$;

conduit à l'équation du mouvement d'une barre de section constante :

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - E S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = p(x, t) \quad (\text{Eq. A.1.21})$$

Mouvement transverse

On étudie une poutre en flexion pure. On prend l'hypothèse de Navier : les sections droites restent droites. On supposera en outre que le cisaillement transverse est négligeable (poutre de Euler-Bernoulli).

On ne s'intéresse donc qu'à la composante $w(x, t)$ de $X(x, t)$. L'équilibre d'un tronçon de poutre d'épaisseur dx , de section S et d'inertie I , soumis à :

- l'effort tranchant et au moment fléchissant en x ;
- l'opposé de l'effort tranchant et du moment fléchissant en $x + dx$;
- un effort extérieur réparti $F(x, t)$;

conduit à l'équation du mouvement d'une poutre en flexion à section constante est :

$$\rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + E I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = F(x, t) \quad (\text{Eq. A.1.22})$$

Équations aux limites

Pour résoudre les équations de mouvement, il faut des conditions initiales (temporelles) et des conditions aux limites (spatiales).

Les conditions aux limites sont des données très importantes, car elles fixent les fréquences de résonance de la structure. Elles sont associées à :

- des déplacements imposés (condition géométrique) : encastrement, appuis, rotules,...
- des efforts imposés :
 - extrémités libres (condition naturelle) : effort normal, tranchant nul, moment fléchissant nul,...
 - des masses localisées,
 - des raideurs localisées.

Exemple 1 :

Poutre en flexion – traction - compression encastree en $x = 0$ et libre en $x = L$:

$x = 0$	$x = L$
$u = 0$	$N = 0$
$w = 0$	$T = 0$
$\theta = 0$	$M = 0$

Exemple 2 :

Poutre en flexion – traction - compression appuyée en $x = 0$ et appuyée en $x = L$:

$x = 0$	$x = L$
$N = 0$	$N = 0$
$w = 0$	$w = 0$
$M = 0$	$M = 0$

Exemple 3 :

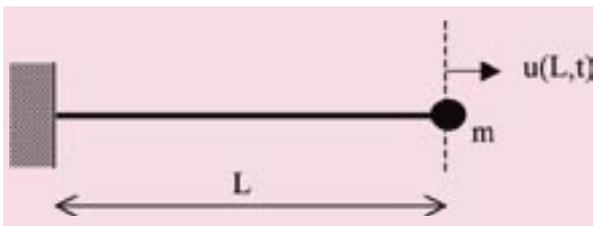


Figure A.1.11 : barre (E, S, L) en traction-compression encastree en $x = 0$ avec une masse localisée m en $x = L$.

Pour obtenir la condition aux limites en $x = L$, on écrit l'équilibre de la masse m :

$$N(L, t) = m \ddot{u}(L, t)$$

soit :

$$-E S u'(L, t) = m \ddot{u}(L, t)$$

Exemple 4 :

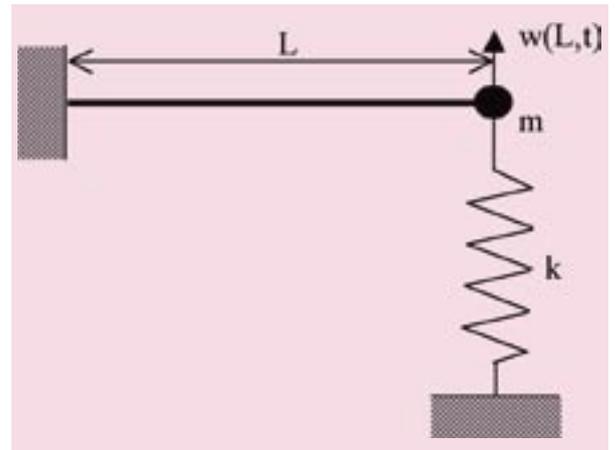


Figure A.1.12 : poutre (E, I, L) en flexion pure encastree en $x = 0$ avec une masse localisée m en $x = L$ et une raideur localisée k transverse en $x = L$.

Pour obtenir la condition aux limites en $x = L$, on écrit l'équilibre de la masse M :

$$\begin{aligned} T(L, t) - k w(L, t) &= m \ddot{w}(L, t) \\ M(L, t) &= 0 \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} E I w^{(3)}(L, t) - k w(L, t) &= m \ddot{w}(L, t) \\ w^{(2)}(L, t) &= 0 \end{aligned}$$

On remarque que dans les deux exemples ci-dessus on a 6 conditions aux limites : 2 associées à la traction-compression (équation du second ordre) et 4 associées à la flexion (équation du quatrième ordre).

A.1.3.3 - Modes propres d'un système élastique continu

Méthodologie

Pour déterminer les modes propres d'un système élastique continu, on dispose de :

- l'équation d'équilibre,
- des conditions aux limites.

Un mode propre d'un système élastique continu est une solution $u(x, t)$ du problème qui s'écrit sous la forme :

$$u(x, t) = \phi(x) a(t) \quad (\text{Eq. A.1.23})$$

En outre, on peut montrer que la fonction temporelle est harmonique :

$$a(t) = a_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

Un mode est constitué de la donnée d'une forme propre $\phi(x)$ (déformée de la structure) et d'une pulsation propre ω . Un mode est donc une onde stationnaire : tous les points du système vibrent en phase.

Pour déterminer les modes propres du système la méthode est la suivante :

- on injecte la solution (A.1.23) dans l'équation d'équilibre sans second membre et sans amortissement ;
- on sépare les variables de temps et d'espace : il apparaît alors une constante dont le signe est clair pour avoir une solution physiquement acceptable ;
- on résout alors l'équation (a priori différentielle) associée à la grandeur spatiale : des constantes d'intégration apparaissent. La solution générale obtenue permettra ensuite de déterminer les formes propres $\phi(x)$ du système ;
- on détermine les constantes d'intégration à l'aide des conditions aux limites : on obtient un système d'équations homogène. Sa solution ne pouvant pas être la solution nulle (toutes les constantes nulles), pour déterminer les constantes il est nécessaire d'imposer la nullité du déterminant du système : cette condition donne l'équation caractéristique du système ;
- la solution de l'équation caractéristique fournit alors les pulsations propres du système.

Appliquons ces principes aux deux cas classiques : vibration longitudinale d'une barre et vibration en flexion d'une poutre.

Vibrations longitudinales

On injecte la solution suivante : $u(x, t) = \phi(x) a(t)$ dans l'équation d'équilibre d'une barre (E, S, L, ρ) :

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - E S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Après simplifications et séparation des variables, on a :

$$\frac{E \phi''(x)}{\rho \phi(x)} = \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = \text{constante} = -\omega^2$$

La constante est nécessairement négative, sinon on obtient une solution qui croît exponentiellement dans le temps et donc physiquement inacceptable. On retrouve donc que $a(t)$ est sinusoïdale :

$$a(t) = a_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

De même, on obtient la forme générale des déformées propres d'une barre :

$$\phi(x) = A \sin\left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} x\right) + B \cos\left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} x\right)$$

Ainsi, la solution modale est :

$$u(x, t) = a_0 \cos(\omega t + \alpha) \left(A \sin\left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} x\right) + B \cos\left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} x\right) \right)$$

Il reste donc à déterminer les constantes d'intégration et la pulsation ω :

- a_0 et α se déterminent avec les conditions initiales ;
- A, B et ω s'obtiennent avec les conditions aux limites.

Exemple : Barre encastree-libre : les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 = a(t) \phi(0) \\ N(L, t) = 0 = E S \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = E S a(t) \phi'(L) \end{cases}$$

On en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} B = 0 \\ \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} A \cos\left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} L\right) = 0 \end{cases}$$

B étant nulle, pour obtenir une solution non nulle, il faut :

$$\cos\left(\omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} L\right) = 0$$

On en déduit donc les pulsations propres :

$$\omega_n = \frac{(2n-1)}{2L} \pi \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad n = 1, 2, \dots$$

Les déformées propres (définies à une constante multiplicative près) sont donc :

$$\phi_n(x) = A \sin\left(\frac{2n-1}{2L} \pi x\right)$$

De même que dans le cas discret, on peut définir une raideur généralisée k_n et une masse généralisée m_n :

$$\begin{aligned} m_n &= \int_0^L \rho S \phi_n^2(x) dx \\ k_n &= \int_0^L E S \phi_n'^2(x) dx \end{aligned}$$

On retrouve la relation : $\omega_n^2 = \frac{k_n}{m_n}$

Vibrations transversales (flexion pure)

On injecte la solution suivante : $w(x, t) = \phi(x) a(t)$ dans l'équation d'équilibre :

$$\rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + E I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0$$

Après simplifications et séparation des variables, on a :

$$\frac{E I \phi^{(4)}(x)}{\rho S \phi(x)} = \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = \text{constante} = \omega^2$$

Là encore, le signe de la constante découle d'une solution physiquement acceptable ; on retrouve que $a(t)$ est sinusoïdale. En outre l'équation différentielle régissant ϕ est du quatrième ordre :

$$\frac{d^4 \phi}{dx^4}(x) - \frac{\rho S}{E I} \omega^2 \phi(x) = 0$$

Si on pose $k = \sqrt{\frac{\rho S \omega^2}{EI}}$, la solution générale de l'équation ci-dessus (donc la déformée) est :

$$\phi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) + C \sinh(kx) + D \cosh(kx)$$

On utilise les conditions aux limites pour déterminer les constantes d'intégration et la pulsation.

Exemple : poutre appuyée-appuyée :

les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{aligned} w(0,t) &= 0 \\ M(0,t) &= 0 = EI w''(0,t) \\ w(L,t) &= 0 \\ M(L,t) &= 0 = EI w''(L,t) \end{aligned}$$

d'où le système :

$$\begin{aligned} B + D &= C \\ -B + D &= C \\ A \sin(kL) + B \cos(kL) + C \sinh(kL) + D \cosh(kL) &= C \\ -Ak^2 \sin(kL) - Bk^2 \cos(kL) + Ck^2 \sinh(kL) + Dk^2 \cosh(kL) &= C \end{aligned}$$

Ce système étant homogène, on ne peut avoir une solution non-nulle que si le déterminant du système est nul ; on en déduit l'équation caractéristique qui se ramène à :

$$\sin(kL) = 0$$

La résolution de cette équation conduit aux pulsations propres :

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

et finalement aux déformées modales :

$$\phi_n = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

On peut également définir une masse et une raideur généralisée :

$$\begin{aligned} m_n &= \int_0^L \rho S \phi_n^2(x) dx \\ k_n &= \int_0^L EI \phi_n''^2(x) dx \end{aligned}$$

A.1.4 - Discrétisation des systèmes continus

A.1.4.1 - Introduction

Ainsi que cela a été mentionné, peu de problèmes d'analyse modale de systèmes élastiques continus ont une solution analytique. C'est pourquoi il est nécessaire d'avoir recours à des méthodes d'approximations :

- méthode de discrétisation directe des masses : la structure est approchée par des masses et des ressorts ;
- méthode de Rayleigh-Ritz : la variation spatiale des fonctions est postulée a priori ;
- méthode des éléments finis : la structure est découpée en sous-partie, sur lesquelles on applique une méthode de Rayleigh-Ritz.

Ces méthodes sont des méthodes de discrétisation : on passe d'un nombre infini de ddl pour les systèmes continus, à un nombre fini de ddl.

A.1.4.2 - Discrétisation directe des masses

Cette méthode peut dépendre fortement de l'aptitude du « modélisateur » à discrétiser une structure : elle est néanmoins très importante car elle est largement utilisée pour effectuer des modélisations en génie civil (notamment en calcul parasismique). Elle permet d'obtenir très simplement les matrices de masse et de raideur.

Cette méthode consiste à :

- réaliser un découpage géométrique de la structure ;
- concentrer la masse de chaque partie découpée au niveau d'un nœud (en général son centre de gravité) sous forme de :
 - masse agissant en translation ;
 - inertie massique agissant en rotation.

En conséquence, les ddl du système discret sont les ddl « physiques » associés au point où on a concentré la masse : on suppose donc que chaque partie « suit rigidement » les ddl du nœud d'où l'importance du choix des découpages. Une telle méthode conduit à une matrice de masse diagonale. En ce qui concerne la rigidité, on détermine la raideur en reliant 2 ddl entre eux : la matrice de rigidité n'est pas forcément diagonale.

Exemple : discrétisation d'une barre encastrée libre (figure A.1.13) : le premier nœud est situé au 1/3 de la longueur, le deuxième au 2/3 de la longueur et le dernier à l'extrémité. Pour chaque nœud, on affecte la moitié de la masse de chaque élément avec lequel il est connecté ; la raideur de chaque ressort est calculée à partir de la rigidité d'un élément de barre.

Le choix des k_i et m_i est important et détermine la précision que l'on aura sur les fréquences propres. On peut choisir un découpage en trois parties de même longueur :

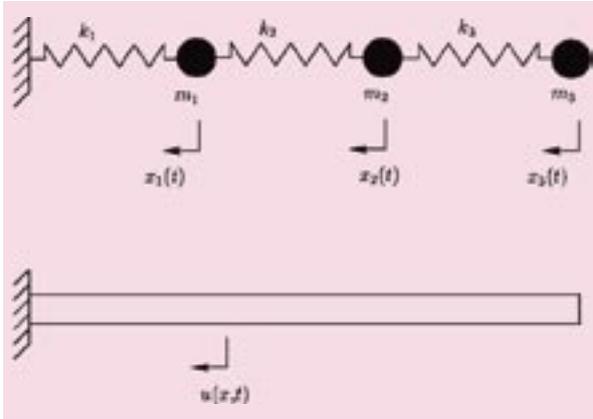


Figure A.1.13 : discrétisation directe de la masse d'une barre

A.1.4.3 - Méthode de Rayleigh-Ritz

Le système à calculer étant continu, il est déterminé dès que l'on connaît les fonctions continues décrivant les ddl de chaque point : translations, rotations. On se propose donc de ramener la connaissance de ces fonctions continues $u(M, t)$ par la détermination d'un nombre fini de paramètres $\{a_i(t)\}_{i=1, \dots, N}$ (constituant le vecteur $[a(t)]$) grâce aux fonctions d'approximation $\psi_i(M)$:

$$u(M, t) \approx \tilde{u}(M, t) = \sum_{i=1}^N \psi_i(M) a_i(t) = [\psi][a(t)]$$

avec :

- $a_i(t)$: coordonnée généralisée. Ce sont nos inconnues à déterminer : on les regroupe dans le vecteur des coordonnées généralisées $[a(t)]$; la dimension n du vecteur $[a(t)]$ donne le nombre de ddl du système discrétisé,
- $\psi_i(M)$: fonction spatiale donnée. Elle doit être cinématiquement admissible et définie sur toute la structure, qui occupe le domaine V .

Ainsi, lorsque l'on connaît les coordonnées généralisées, à l'aide des fonctions d'approximation $\psi_i(M)$, on a u en n'importe quel point du système.

La méthode générale consiste à :

- écrire l'énergie cinétique, l'énergie de déformation du système ainsi que le travail des efforts extérieurs en fonction du champ approché \tilde{u} ;
- réécrire ces énergies sous forme matricielle en mettant en évidence les vecteurs des coordonnées généralisées :

$$\begin{aligned} T &= 1/2 [\dot{a}(t)][M][\dot{a}(t)] \\ J &= 1/2 [a(t)][K][a(t)] \\ W_{ext} &= [a(t)][F] = [F][a(t)] \end{aligned}$$

• les matrices $[M]$ et $[K]$ qui apparaissent alors sont les matrices de masse et de raideur du système discrétisé ; l'équation régissant $[a(t)]$ est alors :

$$[M][\ddot{a}(t)] + [K][a(t)] = [F(t)]$$

• pour déterminer les modes propres $(\omega, [\phi(x)])$, on utilise alors la procédure décrite dans le chapitre sur les systèmes discrets à n ddl ; on résout :

$$[K][\phi(x)] = -\omega^2 [M][\phi(x)]$$

Suivons la procédure décrite dans l'introduction de ce chapitre :

$$T = 1/2 \int_V \rho \dot{u}^2(M, t) dV = 1/2 [\dot{a}(t)] \left[\int_V \rho [\psi]' [\psi] dV \right] [\dot{a}(t)]$$

On en déduit l'expression de la matrice de masse du système discrétisé :

$$[M] = \int_V \rho [\psi]' [\psi] dV$$

Dans le cas simple d'une barre ou d'une poutre, la matrice de masse devient donc :

$$[M] = \rho S \int_0^L [\psi(x)]' [\psi(x)] dx$$

• calcul de l'énergie de déformation :

On ne fait pas ici le calcul général de l'énergie de déformation : en fonction des hypothèses RDM, on obtient des expressions « simplifiées » différentes, selon si le système est modélisé par une poutre, un barre,...

On rappelle toutefois les énergies les plus courantes :

Traction-compression	$1/2 E S \int_0^L (u'(x))^2 dx$
Flexion	$1/2 E I \int_0^L (w''(x))^2 dx$

On en déduit alors, les matrices de raideurs :

Traction-compression	$[K] = E S \int_0^L [\psi'(x)]' [\psi'(x)] dx$
Flexion	$[K] = E I \int_0^L [\psi''(x)]' [\psi''(x)] dx$

• calcul du travail :

$$W_{ext} = \int_V [u(M, t)] [f(M, t)] dV = [a(t)] [F(t)] = [F(t)] [a(t)]$$

Connaissant toutes ces matrices, on en déduit alors l'équation d'équilibre :

$$[M][\ddot{a}(t)] + [K][a(t)] = [F(t)]$$

On peut alors appliquer tout l'arsenal développé pour les systèmes à n ddl :

- calcul des modes propres du système discret,
- réponse à une sollicitation extérieure,...

Une fois le problème discret résolu, il est immédiat de

revenir au système continu. Ainsi, si on a déterminé les vecteurs propres $[\phi_i]$ du système discret associé aux pulsations propres ω_p , les n premiers modes (approchés) du système continu sont déterminés par la même pulsation propre ω_i et par la déformée modale $u_i(x)$:

$$u_i(x) = [\psi(x)] [\phi_i]$$

Remarque 1

On détermine autant de modes qu'il y a de ddl. En pratique on peut estimer que seuls les $n/2$ premiers modes sont déterminés avec une précision suffisante.

Remarque 2

La précision est améliorée lorsque l'on augmente le nombre de ddl. L'estimation des pulsations propres par la méthode de Rayleigh-Ritz se fait toujours par excès.

Remarque 3

Lorsque le système étudié est constitué de poutres, il est courant de prendre pour les fonctions $\psi_i(x)$ des polynômes. Par exemple pour une poutre Encastree-Libre, on choisit : $\psi_i(x) = x^i$ avec $i \geq 2$. On vérifie aisément que ces fonctions sont toutes cinématiquement admissibles.

Remarque 4

Lorsque $n = 1$, cette méthode est connue sous le nom de méthode de Rayleigh.

Remarque 5

La déformée statique de la structure soumise à une charge proportionnelle à son poids propre donne en général une bonne approximation de la déformée modale du premier mode.

des éléments : on calcule les énergies cinétique et de déformation de chaque élément. On en déduit alors les énergies cinétique et de déformation de toute la structure : on utilise l'additivité de l'énergie. On en déduit alors les matrices de masse et de raideur de la structure : on est donc à nouveau ramené à l'étude d'un système à n ddl.

Nota bene

Les fonctions de l'approximation, appelées ici fonctions d'interpolation, sont choisies de sorte que les coordonnées généralisées soient les valeurs des déplacements des nœuds : les coordonnées généralisées ont donc un sens physique qui permet d'obtenir un champ de déplacement continu sur la structure.

On peut également déterminer un vecteur chargement en écrivant sous forme matricielle le travail des forces extérieures appliquées au système. On peut donc étudier la réponse d'un système continu soumis à un chargement quelconque.

A.1.4.4 - Méthode des éléments finis

Faiblesse de la méthode de Rayleigh-Ritz

Si pour une poutre droite Encastree-Libre il est facile de déterminer des fonctions $\psi_i(x)$, il n'en est pas forcément de même pour des systèmes à peine plus complexe, comme par exemple deux poutres rigidement liées à une extrémité mais non-colinéaire : dans ce cas, comment choisir les fonctions d'interpolation ? La solution simple est alors de « casser » le système : on se ramène donc à la méthode des éléments finis.

Brefs rappels

La structure est subdivisée en domaines de forme géométrique simple (on en connaît l'expression analytique) dont le contour s'appuie sur des points (les nœuds) : ce sont les éléments.

Ces éléments ont une forme suffisamment simple pour que l'on puisse déterminer des fonctions cinématiquement admissibles sur chacun de ces éléments : ce sont généralement des polynômes. On applique alors la méthode de Rayleigh-Ritz sur chacun



Annexe 2 Modélisation de la charge piétonne

Les passerelles piétonnes peuvent être sollicitées principalement par la marche et la course des piétons les empruntant. Ces deux types d'activités doivent être traités de manière séparée car ils se différencient par le fait que, si lors de la marche, il y a toujours un pied en contact avec le sol, il n'en est plus de même lorsqu'une personne se met à courir (figure A.2.1).

Quel que soit le type de sollicitation (marche ou course), la force engendrée comporte une composante verticale et une composante horizontale, cette dernière pouvant être décomposée en une composante longitudinale (selon l'axe de la passerelle) et une composante transversale (perpendiculaire à l'axe de la passerelle). De plus, outre l'action individuelle d'un piéton, nous allons envisager la prise en compte d'un ensemble de personnes (foule) ainsi que les sollicitations liées à des chargements exceptionnels (inaugurations, excitation délibérée...). Enfin, lorsqu'elles existent, nous signalerons les recommandations prévues par les Eurocodes consacrés aux modèles dynamiques de chargement piétonnier.

Pour les activités sans déplacement (saut, balancement...), les mesures expérimentales montrent qu'il est préférable de prendre en compte au moins les trois premières harmoniques pour représenter correctement la sollicitation, alors que pour la composante verticale de la marche, on peut se limiter à la première harmonique qui suffit à bien décrire $F(t)$. Les valeurs des amplitudes et des déphasages, issues de mesures expérimentales, sont précisées ci-dessous pour les différentes composantes de F dans le cas de la marche et de la course. Il faut noter cependant que les valeurs que l'on peut trouver dans la littérature sont approximatives, en particulier pour ce qui est des déphasages (φ) ; les valeurs fournies sont donc des ordres de grandeur correspondant à un déplacement moyen.

Comme nous pouvons le constater sur la figure A.2.1, la forme de la sollicitation change de la marche à la course ainsi que selon le type de marche ou de course (lente, rapide...). Les amplitudes G_i sont donc liées à la fréquence f_m et les valeurs indiquées par la suite sont donc des valeurs moyennes, correspondant à une marche ou une course « normale ».

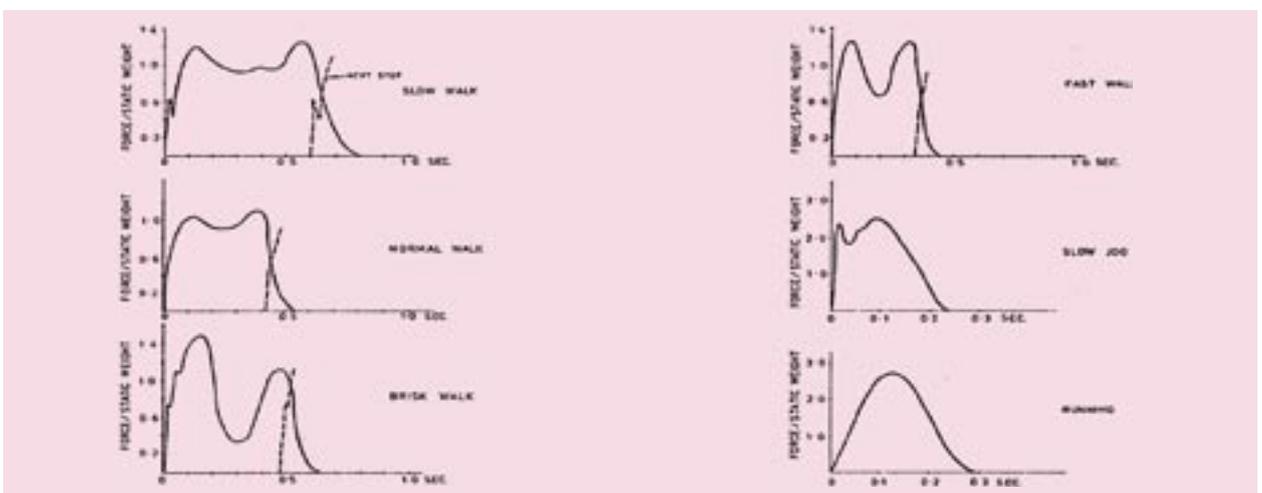


Figure A.2.1 : évolution de la force en fonction du temps pour différents types de pas (réf. [17]) – Source : J. E. Wheeler

A.2.1 - Marche

La marche est caractérisée par un contact continu sur la surface du sol, puisque le second pied touche le sol avant que le premier ne le quitte (à la différence de la course).

A.2.1.1 - Composante verticale

En marche normale, la composante verticale, pour un pied, a une forme en selle de cheval, le premier maximum correspondant au choc du talon sur le sol et le second à la poussée de la plante du pied (cf. figure A.2.2). Cette forme tend à disparaître lorsque la fréquence de la marche augmente, jusqu'à se réduire à une allure de demi sinusoïde lors de la course (cf. figure A.2.1).

Pour la marche normale (non gênée), la fréquence peut être décrite par une distribution gaussienne de moyenne 2 Hz et d'écart type 0,20 Hz environ (de 0,175 à 0,22 selon les auteurs). À la fréquence moyenne de 2 Hz ($f_m = 2$ Hz), les valeurs des coefficients de la décomposition de Fourier de $F(t)$ sont les suivantes (comme remarqué précédemment, on prend en compte les trois premiers termes, c'est-à-dire $n = 3$, les coefficients des termes d'ordre supérieur étant inférieurs à $0,1 G_0$) :

$$G_1 = 0,4 G_0 ; G_2 = G_3 \approx 0,1 G_0 ;$$

$$\varphi_2 = \varphi_3 \approx \pi/2.$$

Comme on peut le constater ci-dessus, les valeurs de G_i et de φ_i pour les termes au-delà du premier sont peu précises, ceci étant dû, d'une part, aux incertitudes lors des mesures et, d'autre part, aux différences d'une personne à l'autre.

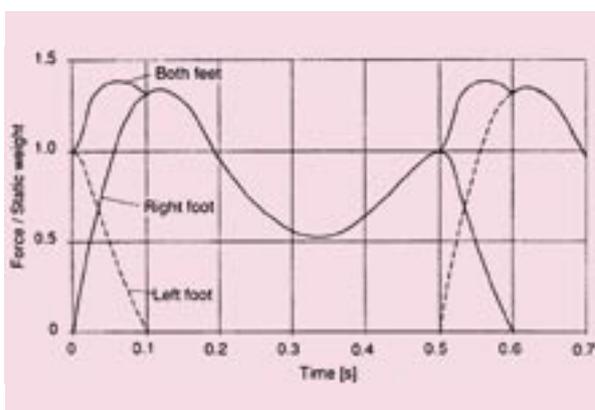


Figure A.2.2 : force résultante de la marche ($f_m = 2$ Hz) (réf. [3])
Source : Hugo Bachmann

Remarque

Pour une fréquence de marche de 2,4 Hz, la valeur de G_1 conseillée est de $0,5 G_0$, les autres valeurs étant inchangées. De même, pour une marche lente (1Hz), on a $G_1 = 0,1 G_0$.

Nous avons tracé sur la figure A.2.3, pour une personne de 700 N marchant à une fréquence f_m de 2 Hz et sur 1 seconde, l'évolution de $F(t)$ en prenant en compte une, deux ou trois harmoniques dans le développement précédent. Nous constatons que seule la prise en compte des trois premières harmoniques permet de retrouver la forme en selle de cheval. Au-delà de la forme du signal, la différence réside dans le contenu fréquentiel de l'excitation, aspect fondamental lors du calcul de la réponse.

Il est à noter que, dans l'annexe de l'Eurocode 1 consacrée aux modèles dynamiques de charge piétonne, la charge préconisée était (DLM1) :

$$Q_{pv} = 280 \sin(2\pi f_v t)$$

ce qui correspondait en fait à $0,4 G_0$ avec $G_0 = 700$ N, poids du piéton. Il s'agissait donc du premier terme (dynamique) de la décomposition de Fourier. Ce modèle a depuis été supprimé de l'Eurocode, mais sa réalité physique n'en reste pas moins pertinente.

A.2.1.2 - Composante horizontale

La composante horizontale du chargement est certes de plus faible intensité mais ne peut cependant être négligée car elle peut être source de problèmes. En effet, l'homme est très sensible à sa projection transversale et la marche peut être rapidement perturbée, conduisant par exemple à se rapprocher de la rambarde, à un sentiment d'insécurité voire à la fermeture de la passerelle...

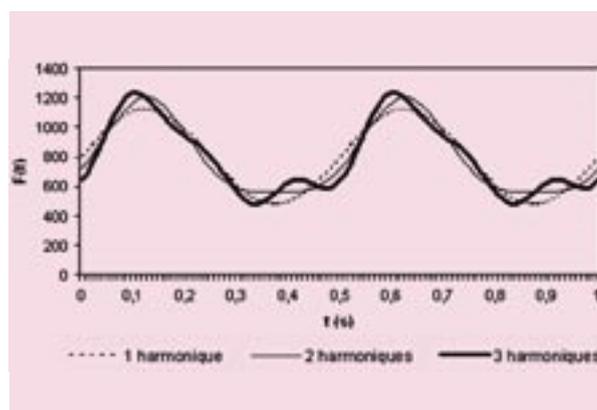


Figure A.2.3 : marche - composante verticale ($f_m = 2$ Hz)

Comme annoncé auparavant, nous allons nous intéresser successivement à ses projections transversale et longitudinale (bien que cette dernière pose plus rarement des problèmes sur les passerelles). La composante transversale, correspondant au balancement d'un pied sur l'autre lors de la marche, se produit donc à une fréquence moitié de la fréquence de marche (1 Hz pour $f_m = 2$ Hz). Par contre, la composante longitudinale est principalement liée à la fréquence de marche (cf. figure A.2.4).

Afin de présenter la décomposition de Fourier de la composante transversale (aux fréquences $f_m/2$, f_m , $3f_m/2$) en fonction de la fréquence fondamentale de

la marche f_m , la solution généralement retenue est de modifier la présentation sous la forme suivante :

$$F(t) = \sum_{i=1/2} G_i \sin 2\pi i f_m t$$

i pouvant donc prendre les valeurs (non entières) 1/2, 1, 3/2, 2... De plus, les déphasages étant proches de 0, ils n'apparaissent donc plus dans l'expression précédente. Enfin, à la différence de la force verticale, les composantes transversale et longitudinale ne présentent bien sûr pas de partie statique (pas de terme constant dans l'expression de $F(t)$).

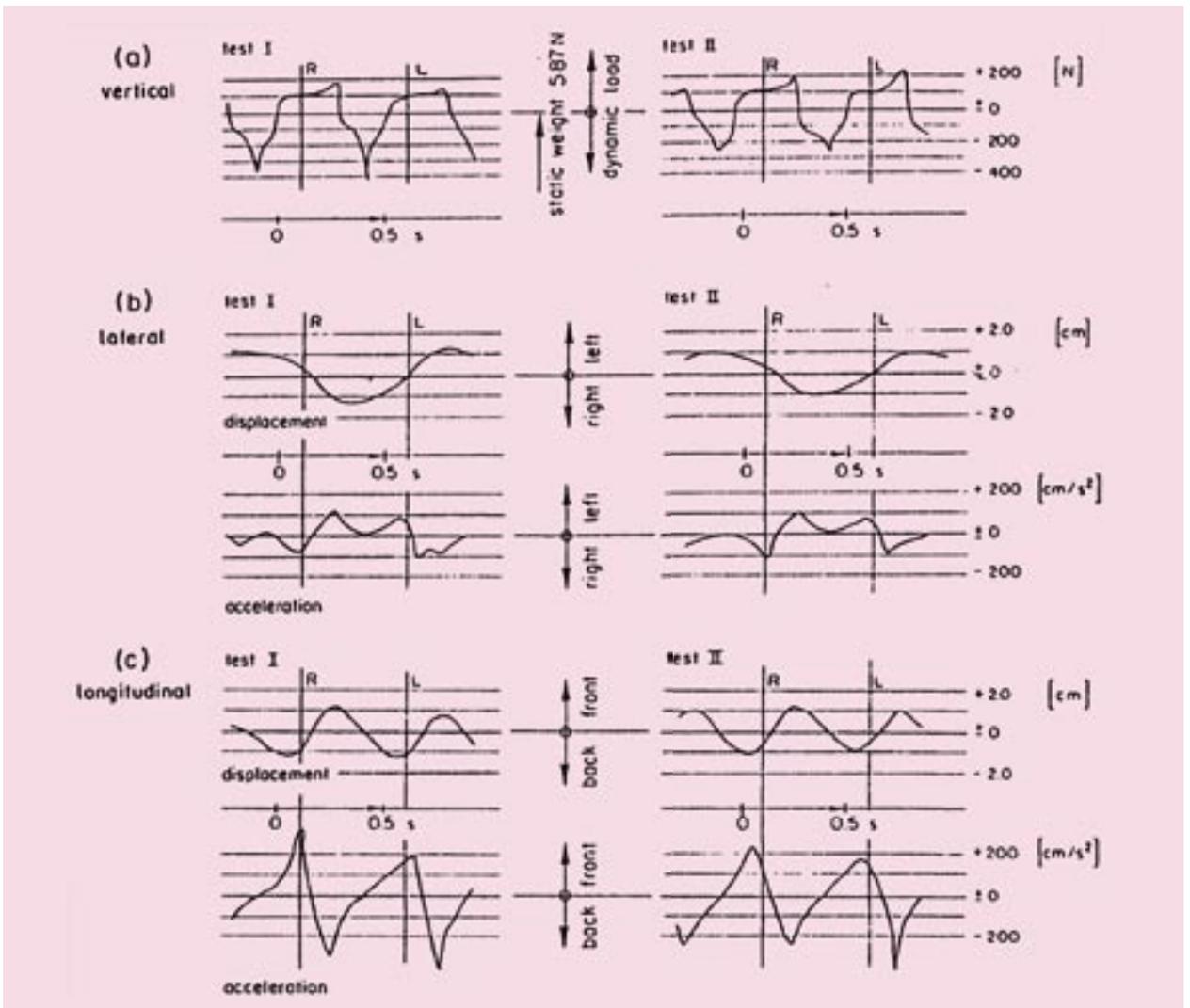


Figure A.2.4 : évolutions de la force verticale (a), des composantes transversale (b) et longitudinale (c) du déplacement (et de l'accélération) mesurées - marche à 2 Hz Ref. [22] - Source : Hugo Bachmann

Composante transversale

Comme indiqué ci-dessus, les essais ont montré que les amplitudes principales de cette composante se situent à une fréquence d'environ la moitié de celle de la composante verticale, fréquence correspondant aux oscillations latérales du centre de gravité du corps lors de la marche. Les valeurs correspondantes des coefficients de Fourier sont alors les suivantes :

$$G_{1/2} = G_{3/2} \approx 0,05 G_0; G_1 = G_2 \approx 0,01 G_0$$

Comme pour la composante verticale ($G_0 = 700 \text{ N}$, $f_m = 2 \text{ Hz}$), nous avons tracé sur la figure A.2.5 la composante transversale en prenant en compte de une à quatre harmoniques. Comme attendu, on remarque que, d'une part, la fréquence est moitié de celle de la composante verticale (c'est-à-dire que la période est double) et, d'autre part, que la prise en compte des quatre premiers termes permet d'obtenir une allure proche de celles mesurées sur la figure A.2.4 (b).

Composante longitudinale

La fréquence principale associée à cette composante est environ la même que pour la composante verticale ($f_m = 2 \text{ Hz}$). Ses oscillations correspondent, pour chaque pas, dans un premier temps au contact entre le pied et le sol, puis à la poussée exercée dans un second temps. Pour cette composante, les valeurs des coefficients de Fourier sont :

$$G_{1/2} \approx 0,04 G_0; G_1 \approx 0,2 G_0; G_{3/2} \approx 0,03 G_0; G_2 \approx 0,1 G_0$$

Nous avons représenté sur la figure A.2.6, dans les mêmes conditions que pour les autres composantes ($G_0 = 700 \text{ N}$, $f_m = 2 \text{ Hz}$), l'évolution de cette composante, selon le nombre d'harmoniques prises en compte, les remarques précédentes restant valables.

Il faut noter qu'en pratique la composante longitudinale de la force de marche du piéton a en général peu d'influence sur la plupart des passerelles. L'influence est plus forte quand la passerelle repose sur des piles élancées et souples, pour lesquelles la composante longitudinale du piéton entraîne la flexion de la pile.

A.2.2 - Course

Comme indiqué en introduction, la course est caractérisée par un contact discontinu avec le sol (cf. figure A.2.7 (a)), la fréquence f_m étant généralement comprise entre 2 et 3,5 Hz.

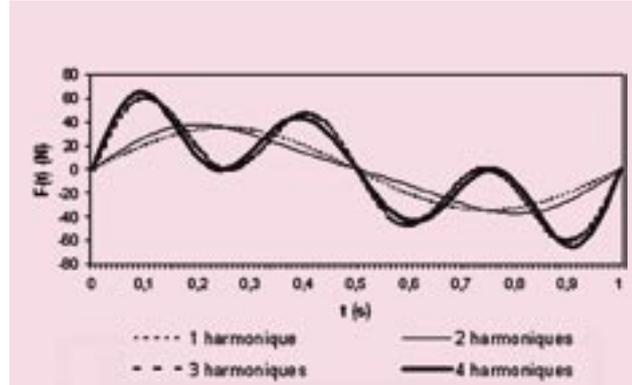


Figure A.2.5 : marche - composante transversale ($f_m = 2 \text{ Hz}$)

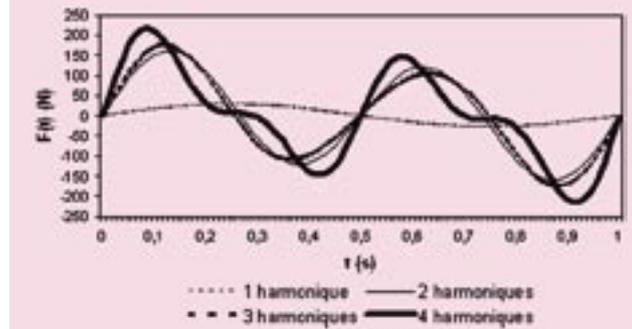


Figure A.2.6 : marche - composante longitudinale ($f_m = 2 \text{ Hz}$)

A.2.2.1 - Composante verticale

En première approximation, la composante verticale du chargement peut être approchée par une simple séquence de demi-sinusoïdes, représentée à l'aide de l'expression suivante :

$$F(t) = k_p G_0 \sin(\pi t / t_p) \text{ pour } (j-1)T_m \leq t \leq (j-1)T_m + t_p$$

$$F(t) = 0 \text{ pour } (j-1)T_m + t_p < t \leq jT_m$$

avec :

k_p : le facteur d'impact ($k_p = F_{max} / G_0$) ;

j : le numéro du pas ($j = 1, 2, \dots$) ;

F_{max} : la charge maximale ;

G_0 : le poids du piéton ;

t_p : la durée du contact ;

T_m : la période ($T_m = 1/f_m$, notée T_p sur la fig.A.2.7(b)),
 f_m étant la fréquence de course.

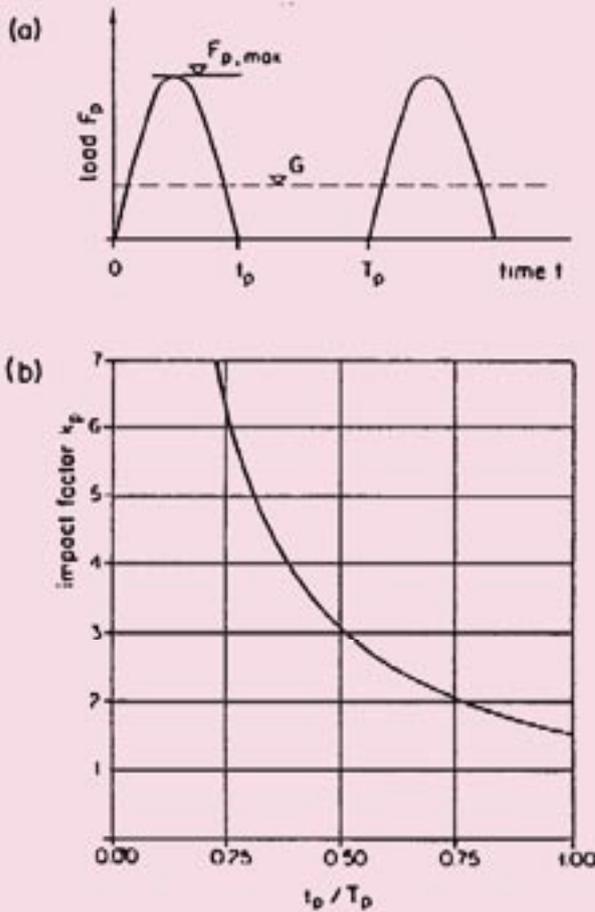


Figure A.2.7 : course - évolution de la force en fonction du temps (a) ; facteur d'impact fonction de la durée relative de contact (b) Ref [3] - Source : Hugo Bachmann

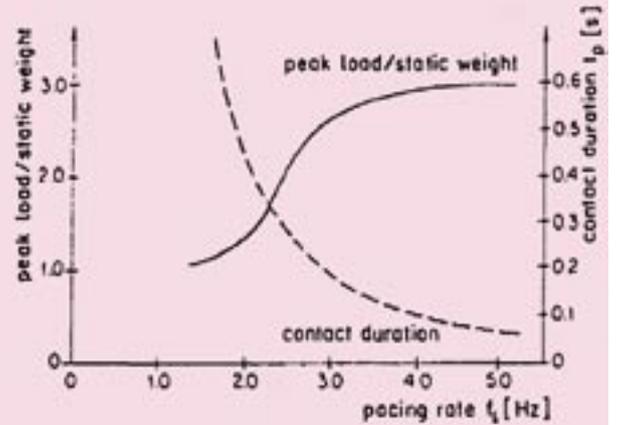


Figure A.2.8 : évolution de la durée de contact en fonction de la fréquence - Source : Hugo Bachmann

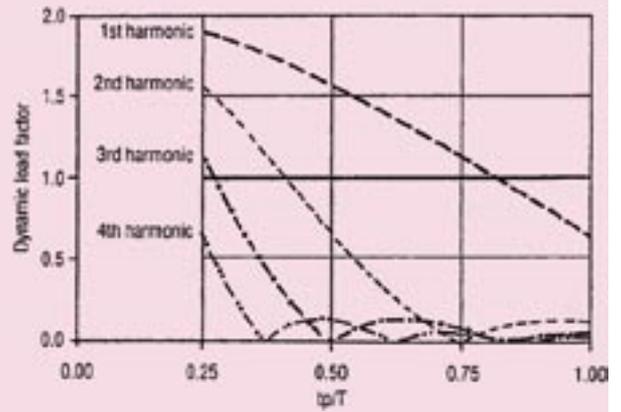


Figure A.2.9 : amplitude des différentes harmoniques Source : Hugo Bachmann

La durée de contact t_p dans ce modèle est simplement la demi-période T_m^p , ce qui permet d'écrire l'expression de $F(t)$ également sous la forme suivante :

$$F(t) = k_p G_0 \sin(2\pi f_m t) \text{ pour } (j-1)T_m < t \leq (j-1/2)T_m$$

$$F(t) = 0 \text{ pour } (j-1/2)T_m < t \leq jT_m$$

Cette approximation de la durée de contact t_p correspond en fait à une surestimation des valeurs mesurées expérimentalement, qui sont représentées en fonction de la fréquence de course sur le graphe de la figure A.2.8. Les valeurs du facteur d'impact k_p sont quant à elles déduites de la figure A.2.7 (b), en fonction de la durée relative de contact (t_p/T_m). À titre d'exemple, pour une course à une fréquence de 3 Hz (donc une période $T_m = 0,33$), on trouve $t_p = 0,17$ s et $k_p = 3$ pour $t_p/T_p = 0,5$ (au lieu de $k_p = 2,4$ pour $t_p/T_p = 0,61$). Comme annoncé, nous pouvons donc constater sur cet exemple que l'approximation demi-sinusoïde est conservative.

Il est également possible d'utiliser pour la course une décomposition de Fourier, qui présente l'avantage de ne pas faire apparaître explicitement le facteur d'impact k_p dont la détermination est délicate. Afin de tenir compte du contact discontinu propre à la course, on ne conserve que la partie positive de la décomposition, ce qui peut s'écrire, avec les notations précédentes :

$$F(t) = G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \sin 2\pi n f_m t \text{ pour } (j-1)T_m \leq t \leq (j-1/2)T_m$$

$$F(t) = 0 \text{ pour } (j-1/2)T_m < t \leq jT_m$$

Dans ce cas, les déphasages sont supposés négligeables et les amplitudes des trois premières harmoniques sont des valeurs moyennes, ces coefficients étant, en toute rigueur, comme k_p , fonction de la fréquence de course (figure A.2.9) :

$$G_1 = 1,6 G_0 ; G_2 = 0,7 G_0 ; G_3 \approx 0,2 G_0$$

Sur la figure A.2.10 sont représentées (toujours sur 1 seconde avec $G_0 = 700$ N, mais une fréquence $f_m = 3$ Hz), d'une part l'approximation demi-sinus et d'autre part, la décomposition en série de Fourier, en prenant en compte de 1 à 3 harmoniques. Nous pouvons remarquer que les différentes courbes sont proches. Plus précisément, l'approximation demi-sinus conduit à un signal d'amplitude plus faible (avec la valeur de k_p retenue) que la prise en compte d'une seule harmonique dans la série de Fourier.

Ce chargement fonction du temps peut se décomposer en une série de Fourier, faisant apparaître une partie constante à environ 1 250 N et une partie variable de même fréquence que la course pour la première harmonique et d'amplitude 1 250 N. C'est cette valeur que l'on pourrait retenir si une analyse spécifique de coureurs devait être réalisée. Le présent guide n'a cependant pas prévu de cas de charge spécifique de coureurs sur une passerelle, car on considère que les effets d'une foule de piétons sont nettement plus défavorables.

A.2.2.2 - Composante horizontale

À notre connaissance, il n'a pas été fait de mesure de la composante horizontale lors de la course, ni pour sa projection longitudinale, ni pour sa projection transversale. Cependant, il est raisonnable de penser, d'une part, que lors de la course, la composante transversale (celle à laquelle le public est le plus sensible) présente une amplitude relative faible comparée à la composante verticale (la course correspondant a priori à une progression plus « dirigée »), alors que la composante longitudinale sera plus importante (plus grand effort moteur). D'autre part, comme pour la marche, il est logique d'estimer que la fréquence de la composante transversale sera la moitié de la composante verticale, alors que celle de la composante longitudinale sera du même ordre de grandeur.

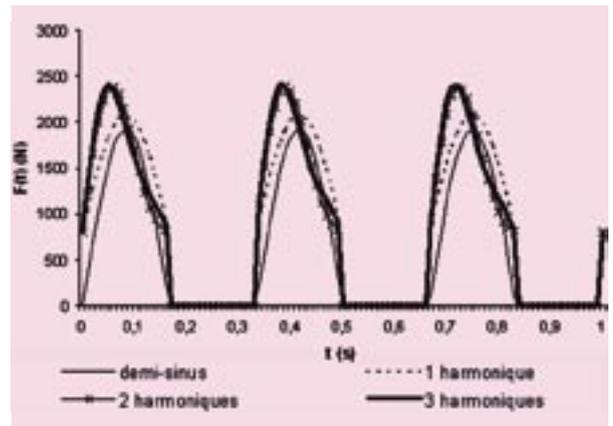


Figure A.2.10 : course - composante verticale ($f_m = 3$ Hz)



Annexe 3 Systèmes amortisseurs

A.3.1 - Amortisseurs visco-élastiques

L'utilisation de matériaux visco-élastiques pour le contrôle des vibrations remonte aux années 50 où ils furent employés pour limiter l'endommagement par fatigue induit par les vibrations sur les assemblages d'avions. L'application aux structures de génie civil date des années 1960.

A.3.1.1 - Principe

Les matériaux visco-élastiques utilisés sont typiquement des polymères qui dissipent l'énergie par travail en cisaillement. La figure A.3.1. présente un amortisseur visco-élastique constitué de couches de matériaux visco-élastiques entre plaques de métal. Lorsque ce type de dispositif est installé sur une structure, le déplacement relatif des plaques extérieures par rapport à la plaque centrale produit des contraintes de cisaillement dans la couche visco-élastique qui dissipe l'énergie.

Sous un chargement harmonique de fréquence ω , la déformation $\gamma(t)$ et la contrainte de cisaillement

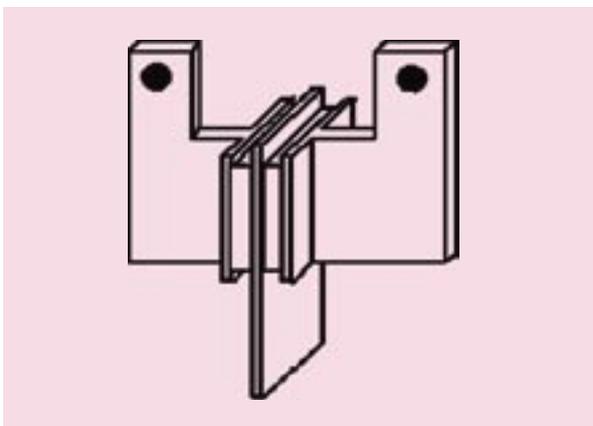


Figure A.3.1 : amortisseur visco-élastique

$\tau(t)$ sont également à la fréquence ω mais en général déphasées :

$$\begin{cases} \gamma(t) = \gamma_0 \sin(\omega t) \\ \tau(t) = \tau_0 \sin(\omega t + \varphi) \end{cases} \text{ (Eq. A.3.1)}$$

Les paramètres γ_0 , τ_0 , $\varepsilon\tau$, φ dépendent en général de la fréquence ω . La contrainte de cisaillement peut cependant être réécrite :

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \gamma_0 \left(\frac{\tau_0}{\gamma_0} \cos\varphi \sin(\omega t) + \frac{\tau_0}{\gamma_0} \sin\varphi \cos(\omega t) \right) \\ &= \gamma_0 (G_1(\omega) \sin(\omega t) + G_2(\omega) \cos(\omega t)) \end{aligned} \text{ (Eq. A.3.2)}$$

En remplaçant les termes $\sin(\omega t)$ et $\cos(\omega t)$ par $\gamma(t)/\gamma_0$ et $\dot{\gamma}(t)/(\omega \gamma_0)$, la relation contrainte-déformation suivante s'obtient alors :

$$\tau(t) = G_1(\omega) \gamma(t) + \frac{G_2(\omega)}{\omega} \dot{\gamma}(t) \text{ (Eq. A.3.3)}$$

qui définit une ellipse (figure A.3.2) dont l'aire est l'énergie dissipée par la matériau par unité de volume et par cycle d'oscillation.

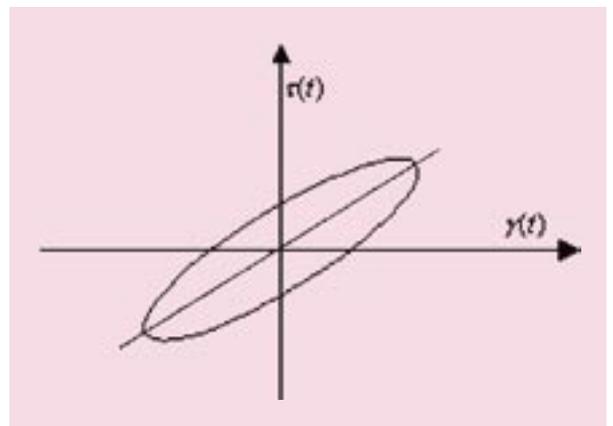


Figure A.3.2 : diagramme contrainte-déformation

Source : Taylor devices inc.

Cette énergie est donnée par :

$$E = \int_0^{2\pi/\omega} \mathbf{r}(t) \dot{\gamma}(t) dt = \pi \gamma_0 \mathbf{r}_0 \sin \varphi \quad (\text{Eq. A.3.4})$$

L'équation (3.3) met en évidence un premier terme en phase avec le déplacement représentant le module élastique ; le second terme décrit la dissipation d'énergie. L'amortissement $G_2(\omega)/\omega$ conduit à exprimer le coefficient d'amortissement par :

$$\xi = \frac{G_2(\omega)}{\omega} \frac{\omega}{2G_1(\omega)} = \frac{\tan \varphi}{2} \quad (\text{Eq. A.3.5})$$

Les paramètres $G_2(\omega)$ et $\tan \varphi$ déterminent complètement le comportement de l'amortisseur visco-élastique sous excitation harmonique. Le terme $\tan \varphi$ est appelé *coefficient de dissipation*. Ces coefficients varient non seulement suivant la fréquence mais sont également fonctions de la température ambiante. La dissipation d'énergie se faisant sous forme de chaleur, la performance des amortisseurs visco-élastiques doit être également évaluée par rapport à la variation de température interne qui apparaît lors de leur travail.

A.3.1.2 - Implantation et conception des amortisseurs

L'implantation des amortisseurs est un paramètre essentiel dans leur efficacité vis à vis de la dissipation d'énergie. Cependant des contraintes techniques peuvent empêcher de choisir les endroits les plus appropriés. L'efficacité d'un amortisseur visco-élastique se mesure en capacité de travailler en cisaillement ; il est donc recommandé d'implanter les amortisseurs de sorte que cette condition soit vérifiée.

Ce type d'amortisseur a été peu utilisé pour des passerelles.

A.3.2 - Amortisseurs visqueux

A.3.2.1 - Principe

Les amortisseurs à frottement sec ou visco-élastiques utilisent l'action de solides pour dissiper l'énergie vibratoire d'une structure (figure A.3.3). Il est cependant également possible d'utiliser un fluide.

Le dispositif le plus immédiat est celui dérivé du « *dashpot* ». Dans un tel dispositif, la dissipation intervient par la conversion de l'énergie mécanique en chaleur au travers d'un piston qui déforme et déplace une substance très visqueuse comme du silicone. Une autre famille d'amortisseurs repose sur l'écoulement d'un fluide dans un conteneur fermé. Le piston ne

se limite pas à déformer la substance visqueuse mais à forcer le passage du fluide au travers d'orifices calibrés équipés ou non de dispositifs de régulation simple. Comme dans le cas précédent, la dissipation de l'énergie entraîne un dégagement de chaleur. Des niveaux de dissipation d'énergie très élevés peuvent être atteints mais nécessitent des dispositifs technologiques adéquats.

La principale différence entre ces deux technologies est la suivante. Dans le cas d'un amortisseur à pot ou à parois, l'effort dissipatif est fonction de la viscosité du fluide, alors que dans le cas d'un amortisseur à orifices cet effort est principalement dû à la masse volumique du fluide. Les amortisseurs à orifices seront donc plus stables vis à vis des variations de température que les amortisseurs à pot ou à parois.

Dans le cas des passerelles piétons, les mouvements sont très faibles, et il faut s'assurer que les amortisseurs seront efficaces même pour de faibles déplacements, de l'ordre du millimètre. Compte tenu de la compressibilité du fluide, des frottements des joints, et des jeux dans les attaches, ceci n'est pas facile à obtenir.

Les amortisseurs visqueux doivent être disposés entre deux points de la structure ayant un déplacement différentiel l'un par rapport à l'autre. Plus ces déplacements différentiels seront importants, plus l'amortisseur sera efficace. En pratique, ces amortisseurs seront disposés, soit sur un élément reliant une pile et le tablier à quelques mètres de la pile (pour les vibrations horizontales ou verticales), soit sur des éléments de contreventement horizontal du tablier (pour les vibrations horizontales).



Figure A.3.3 : exemple d'amortisseur visqueux

A.3.2.2 - Lois de comportement des amortisseurs visqueux

Dans le cadre de l'étude du comportement d'une structure, il est nécessaire de disposer d'un modèle macroscopique de comportement de l'amortisseur. Il est classique d'utiliser pour cela une loi force-déplacement décrite par une équation différentielle d'ordre \mathbb{K} (réf. [55]) :

$$f(t) + \lambda^{\mathbb{K}} \frac{d^{\mathbb{K}} f}{dt^{\mathbb{K}}}(t) = C_0 \frac{dx}{dt}(t) \quad (\text{Eq. A.3.6})$$

où $f(t)$ est la force appliquée au piston, et $x(t)$ le déplacement résultant du piston. Les paramètres C_0 , λ , \mathbb{K} , représentent respectivement le coefficient d'amortissement à fréquence nulle, le temps de relaxation et l'ordre de l'amortisseur. Ces paramètres sont généralement déterminés expérimentalement, bien qu'il existe des approximations pour les estimer analytiquement à partir des caractéristiques des matériaux (réf. [56]).

Notes

Lorsque $\lambda = 0$, le cas d'un amortisseur visqueux linéaire se retrouve. Il convient de signaler qu'il est souvent le plus utilisé, car il simplifie évidemment l'analyse du comportement de la structure.

Une autre formulation peut être utilisée :

$$f(t) = C \left(\frac{dx}{dt}(t) \right)^{\alpha} \quad (\text{Eq. A.3.7})$$

α est un coefficient généralement compris entre 0,1 et 0,4.

On note que pour certains fluides la viscosité cinématique varie aussi en fonction du taux de cisaillement du fluide, qui est lui-même proportionnel au gradient de vitesse.

Des amortisseurs visqueux ont été installés sur la passerelle du Millenium à Londres.

A.3.3 - Amortisseurs dynamiques accordés (ADA)

Un Amortisseur Dynamique Accordé (en abrégé ADA, et TMD - Tuned Mass Damper - en anglais) est constitué par une masse reliée à la structure par un ressort et par un amortisseur disposé en parallèle. Ce dispositif permet de diminuer dans des proportions importantes les vibrations d'une structure dans un

mode de vibration donné, sous l'action d'une excitation périodique de fréquence proche de la fréquence propre de ce mode de vibration de la structure.

Les premiers développements des ADA ont essentiellement porté sur des systèmes mécaniques pour lesquels une fréquence d'excitation est en résonance avec la fréquence fondamentale de la machine.

A.3.3.1 - Principe

Considérons un oscillateur à 1 degré de liberté soumis à une force harmonique $f(t)$. La réponse de cet oscillateur peut être réduite en amplitude par l'ajout d'une masse secondaire (ou ADA) qui a un mouvement relatif par rapport à l'oscillateur primaire. Les équations décrivant le déplacement relatif de l'oscillateur primaire par rapport à l'ADA :

$$\begin{aligned} M \ddot{y}_1(t) + C \dot{y}_1(t) + K y_1(t) &= c \dot{y}_2(t) + k y_2(t) + f(t) \\ m \ddot{y}_2(t) + c \dot{y}_2(t) + k y_2(t) &= -m \ddot{y}_1(t) \end{aligned} \quad (\text{Eq. A.3.8})$$

ce qui se réduit à la seule équation :

$$(M + m) \ddot{y}_1(t) + C \dot{y}_1(t) + K y_1(t) = -m \ddot{y}_2(t) + f(t) \quad (\text{Eq. A.3.9})$$

A.3.3.2 - Solution de Den Hartog

Dans le cas où l'oscillateur primaire a un amortissement nul ($C = 0$), il est possible de déterminer les caractéristiques optimales de l'ADA pour une excitation $f(t)$ harmonique d'amplitude f_0 et de pulsation ω . Cette solution optimale est la solution déduite par Den Hartog dans ses premières études. Pour une excitation harmonique, le coefficient de majoration dynamique A , défini comme le rapport entre l'amplitude dynamique maximale y_{1max} et le déplacement statique y_{1stat} , s'exprime par :

$$A = \frac{y_{1max}}{y_{1stat}} = \sqrt{\frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2\xi_{adh}\alpha\beta)^2}{[(\alpha^2 - \beta^2)(1 - \beta^2) - \alpha^2\beta^2\mu]^2 + (2\xi_{adh}\alpha\beta)^2(1 - \beta^2 - \beta^2\mu)^2}} \quad (\text{Eq. A.3.10})$$

où :

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_{osc}} ; \alpha = \frac{\omega_{adh}}{\omega_{osc}} ; \omega_{adh}^2 = \frac{k}{m} \quad (\text{Eq. A.3.11})$$

$$\omega_{osc}^2 = \frac{K}{M} ; \xi_{adh} = \frac{c}{2m\omega_{adh}} ; \mu = \frac{m}{M} \quad (\text{Eq. A.3.12})$$

Le coefficient d'amplification dynamique A est donc fonction de quatre paramètres : μ , α , β , ξ_{ada} . La figure A.3.4 donne l'évolution de A en fonction du rapport de fréquence β , ceci pour différents coefficients d'amortissement et pour $\alpha = 1$ (accord des fréquences) et $\mu = 0,05$. Cette figure permet de constater que, pour le cas où l'amortissement ξ_{ada} est nul, l'amplitude de réponse présente deux pics de résonance. A l'opposé lorsque l'amortissement tend vers l'infini, les deux masses sont virtuellement fusionnées pour ne plus former qu'un seul oscillateur de masse $1,05 M$ avec une amplitude infinie à la fréquence de résonance. Entre ces cas extrêmes, il existe une valeur d'amortissement pour laquelle le pic de résonance est minimal.

L'objectif d'un amortisseur à masse accordée consiste donc à amener le pic de résonance vers sa plus petite valeur possible. La figure A.3.4 met en évidence l'indépendance par rapport à ξ_{ada} de deux points (P et Q) des courbes $A = f(\beta)$. L'amplitude minimale à la résonance est alors obtenue en choisissant le rapport α de sorte que ces deux points soient d'amplitudes égales. Ce ratio optimal est alors donné par l'expression :

$$\alpha_{opt} = \frac{1}{1 + m/M} \quad (\text{Eq. A.3.13})$$

et les amplitudes aux points P et Q sont :

$$R = \sqrt{1 + \frac{2}{\mu}} \quad (\text{Eq. A.3.14})$$

La fréquence optimale f_{opt} et le coefficient d'amortissement optimal ξ_{opt} peuvent être déterminées pour l'amortisseur à masse accordée⁽¹⁾, dans le cas où la structure n'a pas d'amortissement propre : c'est la solution de Den Hartog (réf. [51]) :

$$f_{opt} = \frac{1}{1 + \mu} f_1 \quad (\text{Eq. A.3.15})$$

$$\xi_{opt} = \sqrt{\frac{3}{8} \frac{\mu}{(1 + \mu)^3}} \quad (\text{Eq. A.3.16})$$

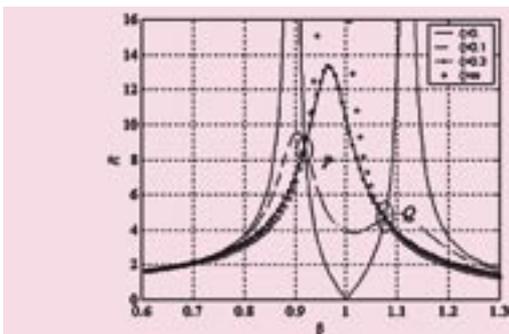


Figure A.3.4 - Coefficient de majoration dynamique en fonction de β ($\mu = 0,05$ et $\alpha = 1,0$)

A.3.3.3 - Solution générale

Une analyse plus détaillée a été conduite par Warburton (réf. [54]) afin de déterminer les caractéristiques optimales de l'ADA pour plusieurs types d'excitations (en présence d'un amortissement structural faible). L'analyse proposée par Warburton permet également d'utiliser les résultats pour des oscillateurs primaires à un degré de liberté aux cas à plusieurs degrés de liberté. Ces analogies reposent sur une décomposition sur la base des modes propres normalisés de la structure. L'optimalité n'est alors pas recherchée sur un mode donné (composante modale), mais sur une coordonnée généralisée (déplacement ou dérivées). Le lecteur est donc renvoyé à la référence 54 pour plus de détails sur ces analogies. Aussi, nous nous limiterons dans cette section à ne traiter que le cas d'oscillateurs à 1 degré de liberté.

Les caractéristiques optimales de l'amortisseur dynamique accordé de Den Hartog pour une excitation harmonique ont été établies en minimisant le coefficient de majoration dynamique A . C'est le principe même de la détermination d'un ADA optimal : définir dans un premier temps un critère d'optimalité A puis rechercher les solutions minimisant ce critère. Outre le coefficient de majoration dynamique, de nombreux autres critères peuvent être choisis comme la minimisation du déplacement de la structure, du déplacement de l'amortisseur, de l'accélération de la structure ou des efforts dans la structure, ..., ceci pour différents types d'excitations. En particulier, lorsque l'excitation est aléatoire (le système primaire est soumis à une force aléatoire - c'est-à-dire la foule dans notre cas), les paramètres optimaux α_{opt} et ξ_{opt} sont donnés par les expressions :

$$\alpha_{opt} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\mu}{2}}{1 + \mu}} \quad (\text{Eq. A.3.17})$$

$$\xi_{opt} = \sqrt{\frac{\mu \left(1 + \frac{3\mu}{4}\right)}{4(1 + \mu) \left(1 + \frac{\mu}{2}\right)}} \quad (\text{Eq. A.3.18})$$

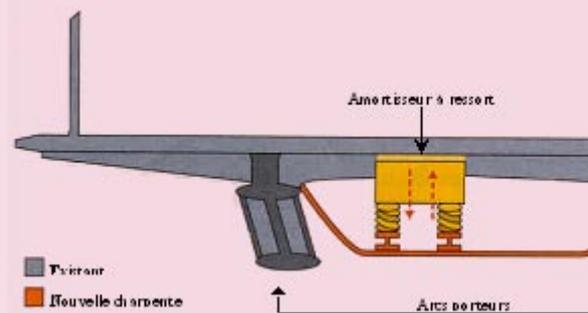


Figure A.3.5 : amortisseur à masse accordée

A.3.3.4 - Cas d'un oscillateur primaire amorti

Dans le cas où la structure a un amortissement propre, la fréquence optimale théorique est très légèrement plus faible que celle donnée par la formule ci-dessus (valable pour une excitation harmonique), qui est néanmoins suffisante dans les cas habituels (réf. [53]) :

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{opt} &= \alpha_{opt} - (0,241 + 1,7\mu - 2,6\mu^2) \xi_{osc} - (1,0 - 1,9\mu + \mu^2) \xi_{osc}^2 \\ \bar{\omega}_{opt} &= \omega_{opt} + (0,13 + 0,12\mu + 0,4\mu^2) \xi_{osc} - (0,01 + 0,9\mu + 3\mu^2) \xi_{osc}^2 \end{aligned} \quad (\text{Eq. A.3.19})$$

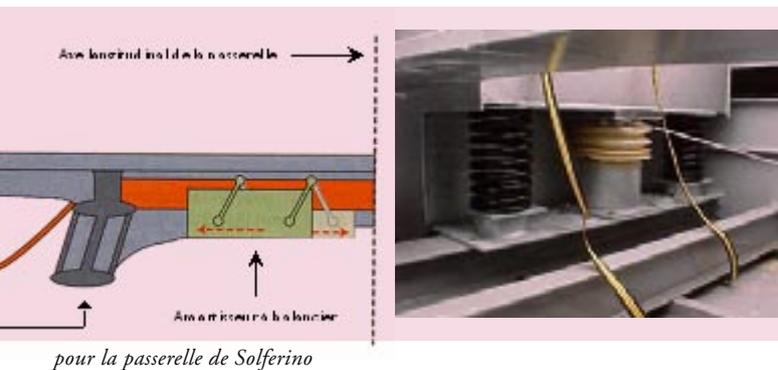
où ξ_{osc} est le coefficient d'amortissement de la masse primaire. Ces expressions présentent moins de 1% d'erreur pour $0,03 < \mu < 0,40$ et $0,0 < \xi_{osc} < 0,15$.

L'efficacité d'un amortisseur dynamique accordé est beaucoup plus sensible à la fréquence propre de la masse ajoutée, qu'à la valeur de l'amortissement ajouté. C'est pourquoi la fréquence propre de la masse doit pouvoir être réglée lors de la pose de l'appareil, de façon à l'accorder finement à la fréquence propre réelle de la structure. Cela se fait généralement en jouant sur la valeur de la masse elle-même, qui est plus facile à régler que la raideur du ressort.

A.3.3.5 - Exemples

Il existe différents types d'amortisseurs dynamiques accordés. Le type le plus courant consiste en une masse reliée à la structure par l'intermédiaire de ressorts hélicoïdaux verticaux et d'un ou plusieurs amortisseurs hydrauliques ou pneumatiques. Ces ADA peuvent être couplés pour amortir des vibrations de torsion. La figure A.3.5 donne un aperçu d'un tel dispositif.

Lorsque la vibration à amortir est horizontale, le dispositif constitué d'une masse accrochée en pied d'un pendule, associée à un amortisseur hydraulique horizontal, peut être envisagé.



pour la passerelle de Solferino

A.3.4 - Amortisseurs dynamiques accordés fluides

Dans la technologie des amortisseurs dynamiques accordés, une seconde masse est attachée à la structure par des raideurs et des amortisseurs (figure A.3.6a). Une autre classe d'amortisseurs consiste à remplacer masse, raideur et amortissement par un conteneur rempli d'un liquide. Comme pour un ADA classique, le liquide joue le rôle de masse secondaire et l'amortissement est fourni par les frottements sur les parois du conteneur. L'action de gravité constituant un mécanisme de rappel, le système secondaire (figure A.3.6b) ainsi formé présente des fréquences caractéristiques qui peuvent être accordées pour optimiser un critère de performance.

Le premier prototype d'ADA fluide a été proposé dès 1900 par Frahm pour le contrôle du roulis des navires. Dès les années 70, ces amortisseurs furent installés sur les satellites pour réduire les vibrations de longue période. Ce n'est par contre qu'au cours des années 80, que des applications sur des bâtiments furent envisagées.

Les principes mis en œuvre dans le dimensionnement des ADA avec masse sont applicables aux ADA fluides. Cependant, si les paramètres d'un ADA peuvent être optimisés et des formules analytiques fournies, la réponse non linéaire du fluide en mouvement dans un conteneur rend très difficile une telle optimisation. La réponse du système « conteneur/structure » est alors dépendante de l'amplitude des mouvements.

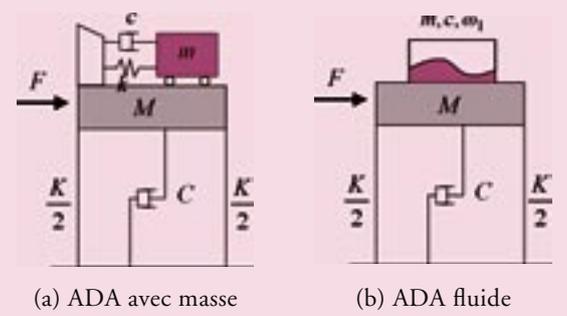


Figure A.3.6 : comparaison entre ADA avec masse et ADA fluide

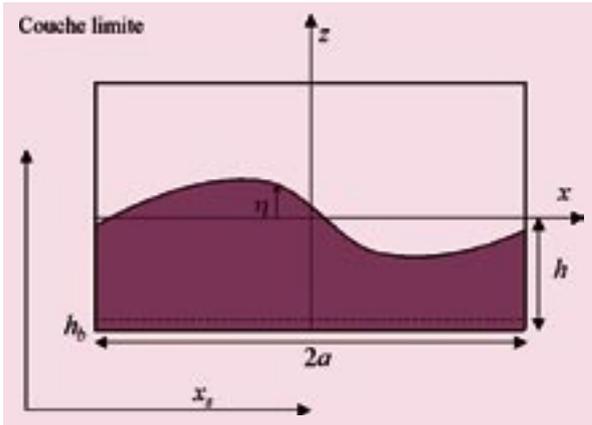


Figure A.3.7 : description d'un ADA fluide

Considérons un conteneur rectangulaire de longueur $2a$ rempli d'un liquide de viscosité ν et de hauteur moyenne h . Le fluide est supposé incompressible, irrotationnel. Le conteneur est soumis à un déplacement horizontal $x(t)$. Il est supposé que la surface libre reste continue (aucune cassure de vagues) et que la pression $p(x, z, t)$ est constante sur cette surface libre (figure A.3.7). D'après la théorie linéaire de la couche limite, la fréquence naturelle de vibration du fluide est :

$$\omega_{\text{adaf}} = \sqrt{\frac{\pi g}{2a} \tanh\left(\frac{\pi h}{2a}\right)}; \quad (\text{Eq. A.3.20})$$

Le coefficient d'amortissement peut être approché par l'expression (réf. [57]) :

$$\xi_{\text{adaf}} = \frac{1}{\sqrt{2}h} \sqrt{\frac{\nu}{\omega_{\text{adaf}}}} \left(1 + \frac{h^3}{b^3}\right); \quad (\text{Eq. A.3.21})$$

où b est la largeur du réservoir. Les équations du système couplé s'écrivent identiquement aux équations (3.8.) et (3.9.) avec, $m = \rho_{\text{eau}} 2abh$, $c = 2m\xi_{\text{adaf}}\omega_{\text{adaf}}$, $k = m\omega_{\text{adaf}}^2$, c'est-à-dire :

$$\begin{bmatrix} 1 + \mu & \mu \\ \mu & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\xi_{\text{adaf}}\omega_{\text{adaf}} & 0 \\ 0 & 2\rho_{\text{eau}}\omega_{\text{adaf}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{\text{adaf}}^2 & 0 \\ 0 & \omega_{\text{adaf}}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (\text{Eq. A.3.22})$$

Cette équation met en évidence l'analogie qu'il peut y avoir entre un amortisseur dynamique accordé avec masse et un amortisseur dynamique fluide. Cette analogie n'a de sens que sous réserve de la validité des expressions (A.3.20) et (A.3.21) choisies comme pulsation et coefficient d'amortissement équivalents. En réalité, la résolution du problème couplé est plus complexe de par la nature fluide de l'oscillateur secondaire.

A la différence de nombreuses tours de grande hauteur, aucune passerelle à notre connaissance n'a fait l'objet d'une mise en œuvre d'amortisseurs dynamiques accordés fluides. Cela fut néanmoins envisagé pour le pont d'Ikuchi (Japon) afin d'amortir les vibrations horizontales des pylônes. La masse totale fluide était de 4 770 kg et la fréquence d'accord était de 0,255 Hz.

A.3.5 - Tableau comparatif

Type d'amortisseur	Domaine d'utilisation	Avantages	Inconvénients
Visco-élastiques	Très peu utilisé	Amortit plusieurs modes	Nécessite un montage qui travaille en cisaillement
Visqueux à pot ou à parois	Peu utilisé	Amortit plusieurs modes	Sensible à la température, calcul non linéaire
Visqueux à orifices	Peu utilisé	Indépendant de la température, amortit plusieurs modes	Calcul non linéaire
Dynamiques accordés	Très utilisé	Facile à dimensionner	Masse additionnelle à considérer, amortit un mode donné, nécessite un réglage en fréquence
Dynamiques accordés fluides	Très peu utilisé		« Innovant », masse additionnelle à considérer, amortit un mode donné, nécessite un réglage en fréquence



Annexe 4

Exemples de passerelles

Nous allons passer en revue différents modèles de passerelles récemment construites parmi les principaux types de structures. Nous présenterons une structure à poutres latérales, une structure à poutre caisson métallique et platelage orthotrope, une structure en dalle nervurée, un arc bow-string à platelage orthotrope, une structure suspendue à un mât métallique, un arc métallique en treillis, une structure haubanée. Nous indiquerons les caractéristiques principales de chacun des ouvrages et son mode de construction, et nous préciserons les résultats des études dynamiques et, le cas échéant, les résultats des essais.

A.4.1 - Poutres latérales type Warren : passerelle de Cavaillon

L'ouvrage est une structure à poutres latérales de type Warren de hauteur 3,20 m, il est composé de deux travées indépendantes de 49,7 m de portée. Le platelage est constitué d'une dalle en béton armé reposant sur des pièces de pont espacées de 2,26 m. La largeur fonctionnelle est de 3,00 m. Les travaux ont été réalisés en 2000 - 2001. La structure métallique a été mise en place à la grue, la masse de la charpente est de 18,8 t par travée.

L'analyse modale réalisée à l'aide d'un calcul analytique donne les résultats suivants :

- Mode 1 - Flexion verticale - 1,95 Hz

Cette fréquence a été calculée sans prendre en compte la masse des piétons.



Photo A.4.1 : passerelle de Cavaillon – Source : Michel Leber (Matière TP)



A.4.2 - Poutre caisson métallique : passerelle du Stade de France

L'ouvrage est un pont à poutre à appuis intermédiaires dédoublés d'une longueur totale de 180 m, avec une travée centrale de 64 m de portée, et des travées de rive de 54 et 50 m. La structure du tablier est constituée d'un caisson métallique à platelage orthotrope. La largeur fonctionnelle est de 11,00 m. Les travaux ont été réalisés en 1997 - 1998. La structure a été mise en place à la grue, la masse totale de la charpente est de 595,0 t.

L'analyse modale réalisée à l'aide d'un logiciel de calcul aux éléments finis donne les résultats suivants :

- Mode 1 - Flexion verticale travée centrale - 1,97 Hz
- Mode 2 - Flexion verticale travée de rive1 - 2,06 Hz
- Mode 3 - Flexion verticale travée de rive2 - 2,20 Hz
- L'étude dynamique donne les résultats suivants :
- 1 piéton - flèche 2,7 mm - accélération 0,4 m/s²
- 640 piétons 25 en phase - flèche 70 mm - accélération 10 m/s²

L'étude dynamique avec amortisseur de 2,4 t de masse :

- 640 piétons 25 en phase - flèche 6,5 mm - accélération 1 m/s²



Photo A.4.2 : passerelle du Stade de France
Source : architecte Rémy Butler

A.4.3 - Dalle nervurée : passerelle de Noisy-le-Grand

L'ouvrage est une dalle nervurée en béton précontraint de hauteur variable d'une longueur totale de 88 m, avec une travée centrale de 44 m de portée, et des travées de rive de 22 m. La hauteur de la dalle varie de 1 m à la clef à 3,05 m sur les piles. La largeur fonctionnelle est de 5 m. Les travaux ont été réalisés en 1993 - 1994. Les deux fléaux constituant la structure ont été construits perpendiculairement à leur position définitive et mis en place au-dessus de l'A4 par rotation, la masse totale du tablier est de 860,0 t.

L'analyse modale réalisée à l'aide d'un logiciel de calcul aux éléments finis donne les résultats suivants :

- Mode 1 - Flexion verticale - 1,65 Hz
- Mode 2 - Flexion axisymétrique - 3,48 Hz
- Mode 3 - Flexion latérale - 4,86 Hz



Photo A.4.3 : passerelle de Noisy-le-Grand
Source : Gérard Forquet (Sétra)

A.4.4 - Arc Bow-string : passerelle de Montigny-lès-Cormeilles

L'ouvrage est un bow-string à arc polygonal de 55 m de portée. La structure du tablier est constituée de deux tubes métalliques latéraux reliés par un platelage orthotrope. La largeur fonctionnelle est de 3,50 m. Les travaux ont été réalisés en 1998 - 1999. La structure a été mise en place à la grue, la masse totale de la charpente est de 85,0 t.

L'analyse modale réalisée à l'aide d'un logiciel de calcul aux éléments finis donne les résultats suivants, avec les tubes du tirant remplis de ciment, et la masse de l'ouvrage étant augmentée par la masse des piétons correspondant à $a(l)$:

- Mode 1 - Flexion verticale - 2,51 Hz
- Mode 2 - Flexion antisymétrique - 2,52 Hz
- Mode 3 - Flexion latérale tablier - 2,62 Hz

Remarque

Sans les piétons les fréquences augmentent de 0,5 Hz.



Photo A.4.4 : passerelle de Montigny-lès-Cormeilles
Source : Gérard Forquet (Sétra)

A.4.5 - Structure suspendue : passerelle sur l'Aisne à Soissons

L'ouvrage est un pont suspendu de 60 m de portée. La structure du tablier est constituée d'un caisson métallique suspendu à un mât composé de quatre tubes inclinés se rejoignant à mi-portée. La largeur fonctionnelle est de 3,00 m. Les travaux ont été réalisés en 2000. La structure a été mise en place à la grue sur palées provisoires avant montage du mât, la masse totale de la charpente métallique est de 105,0 t.

L'analyse modale réalisée à l'aide d'un logiciel de calcul aux éléments finis donne les résultats suivants :

- Mode 1 - Flexion latérale tablier - 1,10 Hz
- Mode 2 - Flexion latérale des arcs - 2,80 Hz
- Mode 3 - Flexion verticale tablier - 3,10 Hz



Photo A.4.5 : passerelle de Soissons
Source : architecte Pierre Million

A.4.6 - Arc métallique : passerelle de Solférino

L'ouvrage est un arc métallique de 106 m de portée. La structure de l'arc est constituée de deux doubles arcs paraboliques en poutre échelle reliés par des traverses supportant un platelage inférieur. Le tablier supérieur dédoublé est supporté par des étriers et bracons s'appuyant sur les deux arcs. La largeur fonctionnelle est variable de 12 m à 14,80 m. Les travaux ont été réalisés en 1998 - 1999. La structure a été mise en place à la grue sur palées provisoires, la masse totale de la charpente est de 900,0 t.

L'analyse modale réalisée à l'aide d'un logiciel de calcul aux éléments finis donne les résultats suivants :

- Mode 1 - Balancement latéral - 0,71 Hz
- Mode 2 - Flexion verticale axisymétrique - 1,03 Hz
- Mode 3 - Torsion-flexion - 1,37 Hz
- Mode 4 - Flexion verticale - 1,66 Hz
- Mode 5 - Torsion-balancement - 1,66 Hz

Les essais et mesures dynamiques donnent les fréquences à vide suivantes (sans amortisseur) :

- Mode 1 - Balancement latéral - 0,81 Hz
- Mode 2 - Flexion verticale axisymétrique - 1,22 Hz
- Mode 3 - Torsion-flexion - 1,59 Hz
- Mode 4 - Flexion verticale - 1,69 Hz
- Mode 5 - Torsion centrale-balancement - 1,94 Hz
- Mode 6 - Torsion centrale-balancement - 2,22 Hz
- Mode 7 - Flexion-torsion - 3,09 Hz

Les amortissements pour la structure à vide varient de 0,3 % à 0,5 %.

Les essais et mesures dynamiques donnent les accélérations suivantes :

- 16 piétons balance mode 1 - accélération 0,5 m/s²
- 16 piétons marche mode 6 - accélération 2,0 m/s²
- 16 piétons course mode 7 - accélération 2,5 m/s²

Les amortissements avec 16 piétons sur la passerelle varient de 0,4 % à 0,8 %.

- 106 piétons balance mode 1 - accélération 1,5 m/s²
- 106 piétons course mode 7 - accélération 5,7 m/s²
- Les amortissements avec plus de 100 piétons sur la passerelle varient de 0,7 % à 1,6 %.
- Amortisseurs
- 6 systèmes pendulaires supportant des masses de 2,5 t et 1,9 t permettent d'atteindre un amortissement de 3,9 % vis-à-vis du mode 1 (balancement latéral).
- 8 systèmes masse/ressort supportant des masses de 2,5 t permettent d'atteindre un amortissement de 2,75 % vis-à-vis des modes 5 et 6 (torsion centrale-balancement).

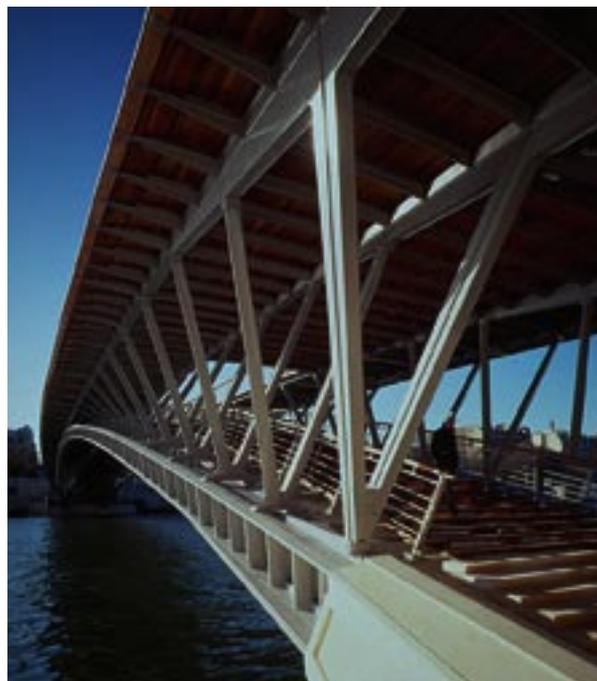


Photo A.4.6 : passerelle de Solférino – Source : architecte Marc Mimram

A.4.7 - Structure haubanée : passerelle du Pas du lac à St Quentin

L'ouvrage est un pont haubané dissymétrique d'une longueur totale de 188 m, avec d'un côté deux travées de 68 m et 36m de portée, et de l'autre côté deux travées de 42 m de portée chacune. La structure du tablier est constituée de deux poutres métalliques, suspendues à un pylône unique, reliées par des pièces de pont. La largeur fonctionnelle est de 2,50 m. Les travaux ont été réalisés en 1991 - 1992. La structure a été mise en place à la grue.

L'analyse modale réalisée à l'aide d'un logiciel de calcul aux éléments finis donne les résultats suivants :

- Mode 1 - Flexion latérale tablier - 1,38 Hz
- Mode 2 - Déplacement-flexion tablier - 1,85 Hz
- Mode 3 - Flexion pylône - 1,92 Hz
- Mode 4 - Flexion verticale tablier - 1,95 Hz



Photo A.4.7 : passerelle du Pas du Lac – Source : architecte Alain Spielmann

A.4.8 - Poutre en ossature mixte : passerelle de Mont-Saint-Martin

L'ouvrage est un tablier en ossature mixte acier-béton de 23 m de portée. La structure du tablier est constituée de deux poutres métalliques légèrement cintrées reliées par des pièces de pont. La largeur fonctionnelle est de 2,50 m. Les travaux ont été réalisés en 1996. La structure a été mise en place à la grue, la masse de la charpente est de 22,0 t.

L'analyse modale réalisée à l'aide d'un calcul analytique donne les résultats suivants :

- Mode 1 - Flexion verticale - 2,15 Hz
- Mode 2 - Flexion verticale - 3,99 Hz
- Mode 3 - Balancement latéral - 4,50 Hz



Annexe 5

Exemples de calcul de passerelles

Cette partie présente l'étude complète de deux passerelles courantes à partir d'exemples réels, ainsi qu'une étude de sensibilité des fréquences propres de passerelles types.

Les deux exemples complets de calcul dynamique sont réalisés selon la méthodologie du guide, en prenant en compte les différentes classes de trafic. Si les résultats conduisent à des accélérations inacceptables, les caractéristiques de ces structures ont été modifiées pour améliorer leur comportement dynamique et tenter de satisfaire aux conditions de confort.

A.5.1 - Exemples de calculs complets de passerelles

A.5.1.1 - Passerelle à poutres latérales de type Warren

La première passerelle étudiée est une structure en ossature mixte acier-béton constituant une travée indépendante de 38,85 m de portée. Le profil en long est courbe avec un rayon de 450 mètres.

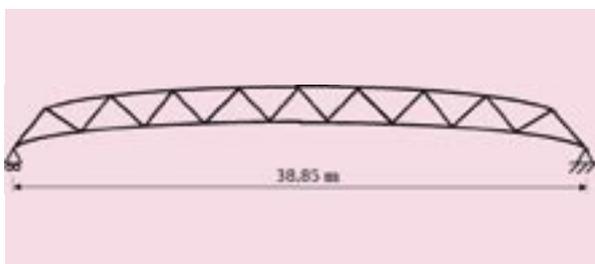


Figure A.5.1 : passerelle à poutres latérales de type Warren

L'ossature est constituée de deux poutres latérales triangulées. Ces poutres de hauteur constante égale à 1,215 m sont reliées par des pièces de pont situées au niveau de la membrure inférieure. Sur ces pièces de pont repose une dalle en béton armé préfabriquée, d'une épaisseur variant de 10 cm.

L'espacement transversal des poutres est de 2,90 m entre axe, le passage pour piéton a une largeur de 2,50 m.

Caractéristiques du tablier

Le moment d'inertie est calculé en tenant compte de la dalle en béton armé avec un coefficient d'homogénéisation égal à 6, et la masse du tablier est calculée en tenant compte des pièces de pont et de la dalle en béton armé.

Moment d'inertie du tablier : $I = 0,030 \text{ m}^4$

Masse propre linéique du tablier : $m = 1456 \text{ kg/m}$

Module d'Young de l'acier : $E = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$

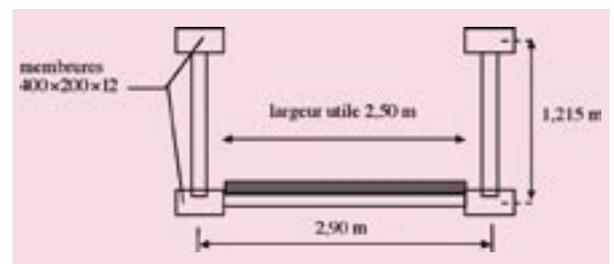


Figure A.5.2 : section transversale de la passerelle à poutres latérales

Classe III

Nous considérons tout d'abord la classe III, c'est à dire une passerelle normalement utilisée, pouvant parfois être traversée par des groupes importants mais sans jamais être chargée sur toute sa surface.

Calcul des modes propres

Les fréquences propres sont égales à :

$$f_n = \frac{n^2 \pi}{2L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

ρS est la masse linéique du tablier augmentée de la masse linéique des piétons qui est calculée pour chaque densité de foule en fonction de la classe de la passerelle .

Pour la classe III, nous nous intéressons à la foule peu dense, la densité d de la foule est égale à 0,5 piéton/m².

Le nombre de piétons sur la passerelle est :

$$N_p = 0,5 \times 38,85 \times 2,5 = 48,6$$

La masse totale des piétons est :

$$70 \times 48,6 = 3\,402 \text{ kg}$$

La masse linéique des piétons est :

$$m_p = 3\,402/38,85 = 87,6 \text{ kg/m}$$

La masse linéique est de 1 456 kg/m à vide, et de 1 630,8 kg/m pour un piéton au m² :

Pour le premier mode, les fréquences hautes et basses sont égales à :

$$f_1 = \frac{(1)^2 \pi}{2(38,85)^2} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1456}} = 2,14 \text{ Hz}$$

$$\text{et } f_1 = \frac{(1)^2 \pi}{2(38,85)^2} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1630,8}} = 2,02 \text{ Hz}$$

Pour le deuxième mode, les fréquences hautes et basses sont égales à :

$$f_2 = \frac{(2)^2 \pi}{2(38,85)^2} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1456}} = 8,54 \text{ Hz}$$

$$\text{et } f_2 = \frac{(2)^2 \pi}{2(38,85)^2} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1630,8}} = 8,08 \text{ Hz}$$

Seul le premier mode est susceptible d'engendrer des vibrations inconfortables.

Calcul de la charge dynamique des piétons

Nous calculerons la charge pour le premier mode uniquement, avec une valeur du pourcentage d'amortissement critique de 0,6% (tablier mixte).

La charge surfacique à prendre en compte pour les modes verticaux est :

$$F_s = d \times (280 \text{ N}) \times \cos 2\pi f_v t \times 10,8 \times \sqrt{\frac{E}{N_p}} \times \psi$$

ψ est égal à 1 car la fréquence du premier mode, qui est de 2,08 Hz, se trouve dans la plage 1 (1,7 à 2,1 Hz) avec un risque maximum de mise en résonance. On a :

$$10,8 \sqrt{\frac{E}{N_p}} = 10,8 \sqrt{\frac{0,6/100}{48,6}} = 0,12 \text{ C}$$

La charge surfacique est égale à :

$$F_s = 0,5 \times 280 \times \cos(2\pi \times 2,08 \times t) \times 0,120 \times 1 \\ = 16,8 \times \cos(2\pi \times 2,08 \times t) \text{ N/m}^2$$

La charge linéique est égale à :

$$F = F_s \times l_p = 16,8 \times 2,5 \times \cos(2\pi \times 2,08 \times t) \\ = 42,0 \times \cos(2\pi \times 2,08 \times t) \text{ N/m}$$

Cette charge s'applique sur la totalité de la passerelle.

Calcul des réponses dynamiques

Le calcul de l'accélération subie par la structure donne :

$$A_{cc\max} = \frac{1}{2 \times 0,6/100} \frac{4 \times 42,0}{\pi \times 1543,6} = 2,89 \text{ m/s}^2$$

L'accélération maxi calculée est située dans la plage 4 des accélérations, c'est à dire à un niveau de confort inacceptable (accélération > 2,5 m/s²).

Classe II

Nous considérons ensuite la classe II, c'est à dire une passerelle urbaine reliant des zones peuplées, soumise à un trafic important et pouvant être parfois chargée sur toute sa surface.

Calcul des modes propres

Pour la classe II, nous nous intéressons à la foule dense, la densité d de la foule est égale à 0,8 piéton/m².

Le nombre de piétons sur la passerelle est :

$$N_p = 0,8 \times 38,85 \times 2,5 = 77,7 = 78$$

La masse totale des piétons est :

$$70 \times 78 = 5\,460 \text{ kg}$$

La masse linéique des piétons est :

$$m_p = 5\,460/38,85 = 140,5 \text{ kg/m}$$

La masse linéique est :

$$\rho S = 1\,456 + 140,5 = 1\,596,5 \text{ kg/m}$$

Pour le premier mode, les fréquences hautes et basses sont égales à :

$$f_1 = \frac{(1)\pi}{2(38,85)} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1456}} = 2,14 \text{ Hz}$$

$$\text{et } f_1 = \frac{(1)\pi}{2(38,85)} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1630,8}} = 2,02 \text{ Hz}$$

Pour le deuxième mode, les fréquences hautes et basses sont égales à :

$$f_2 = \frac{(2)\pi}{2(38,85)} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1456}} = 8,54 \text{ Hz}$$

$$\text{et } f_2 = \frac{(2)\pi}{2(38,85)} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1630,8}} = 8,08 \text{ Hz}$$

Seul le premier mode est susceptible d'engendrer des vibrations inconfortables.

Calcul de la charge dynamique des piétons

Avec 0,6 % d'amortissement critique, comme dans le cas précédent, on a :

$$10,8 \sqrt{\frac{\xi}{N_p}} = 10,8 \sqrt{\frac{0,6/100}{78}} = 0,10$$

La charge surfacique est égale à :

$$F_s = 0,8 \times 280 \times \cos(2\pi \times 2,04 \times t) \times 0,10 \times 1$$

$$= 22,4 \times \cos(2\pi \times 2,04 \times t) \text{ N/m}^2$$

La charge linéique est égale à :

$$F = F_s \times l_p = 22,4 \times 2,5 \times \cos(2\pi \times 2,04 \times t)$$

$$= 56 \times \cos(2\pi \times 2,04 \times t) \text{ N/m}$$

Calcul des réponses dynamiques

$$A_{cc \text{ max}} = \frac{1}{2 \times 0,6/100} \frac{4 \times 56}{\pi \times 1596,5} = 3,72 \text{ m/s}^2$$

L'accélération maxi calculée est située dans la plage 4 des accélérations, c'est-à-dire à un niveau de confort inacceptable (accélération > 2,5 m/s²).

Classe I

Nous considérons enfin la classe I, c'est à dire une passerelle urbaine reliant des zones à forte concentration piétonnière (présence d'une gare, par exemple) ou fréquemment empruntée par des foules denses (manifestations, touristes ...), soumise à un trafic très important.

Calcul des modes propres

Pour la classe I, nous nous intéressons à la foule très dense, la densité d de la foule est égale à 1,0 piéton/m².

Le nombre de piétons sur la passerelle est :

$$N_p = 1 \times 38,85 \times 2,5 = 97$$

La masse totale des piétons est :

$$70 \times 97 = 6\,790 \text{ kg}$$

La masse linéique des piétons est :

$$m_p = 6\,790/38,85 = 174,8 \text{ kg}$$

La masse linéique est :

$$\rho S = 1\,456 + 174,8 = 1\,630,8 \text{ kg/m}$$

Pour le premier mode, les fréquences hautes et basses sont égales à :

$$f_1 = \frac{(1)\pi}{2(38,85)} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1456}} = 2,14 \text{ Hz}$$

$$\text{et } f_1 = \frac{(1)\pi}{2(38,85)} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1630,8}} = 2,02 \text{ Hz}$$

Pour le deuxième mode, les fréquences hautes et basses sont égales à :

$$f_2 = \frac{(2)\pi}{2(38,85)} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1456}} = 8,54 \text{ Hz}$$

$$\text{et } f_2 = \frac{(2)\pi}{2(38,85)} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 0,0292}{1630,8}} = 8,08 \text{ Hz}$$

Seul le premier mode est susceptible d'engendrer des vibrations inconfortables.

Calcul de la charge dynamique des piétons

Nous calculerons la charge pour le premier mode uniquement, avec 0,6 % d'amortissement critique (tablier mixte).

La charge surfacique à prendre en compte pour les modes verticaux est :

$$F_s = d \times (280 \text{ N}) \times \cos 2\pi f_1 t \times 1,85 \times \sqrt{\frac{1}{N_p}} \times \psi$$

ψ est égal à 1 car la fréquence du premier mode, qui est de 2,02 Hz, se trouve dans la plage 1 (1,7 à 2,1 Hz) avec un risque maximum de mise en résonance.

La charge surfacique vaut :

$$F_s = 1,0 \times 280 \times \cos(2\pi \times 2,02 \times t) \times 1,85 \times \sqrt{\frac{1}{97}} \times 1$$

$$= 52,60 \times \cos(2\pi \times 2,02 \times t) \text{ N/m}^2$$

La charge linéique est égale à :

$$F = F_s \times l_p = 52,60 \times 2,5 \times \cos(2\pi \times 2,02 \times t) = 131,5 \times \cos(2\pi \times 2,02 \times t) \text{ N/m}$$

Calcul des réponses dynamiques

On a :

$$A_{cc \max} = \frac{1}{2 \times 0,6 / 100} \frac{4 \times 131,5}{\pi \times 1630,8} = 8,55 \text{ m/s}^2$$

L'accélération maxi calculée est située dans la plage 4 des accélérations, c'est à dire à un niveau de confort inacceptable (accélération > 2,5 m/s²).

Récapitulatif

On s'aperçoit que les accélérations sont toujours supérieures à 2,5 m/s², quelle que soit la classe choisie. Il est à signaler que l'on se situe dans cet exemple dans un cas particulièrement défavorable puisque la première fréquence propre est au milieu de la plage à risque maximal.

Afin de réduire les accélérations obtenues, il faut augmenter la raideur de la structure. Pour cela on peut augmenter la hauteur des poutres latérales triangulées (par exemple de 20 cm) et augmenter l'épaisseur de la tôle des membrures (par exemple 14 mm).

Nous choisissons à la fois d'épaissir la tôle des membrures et d'augmenter la hauteur des poutres, puis nous recalculons les fréquences, les charges dynamiques et les réponses correspondantes.

Raidissement de la structure

La tôle des membrures est passée de 12 à 14 mm. La hauteur entre axe des membrures est passée de 1,215 m à 1,415 m.

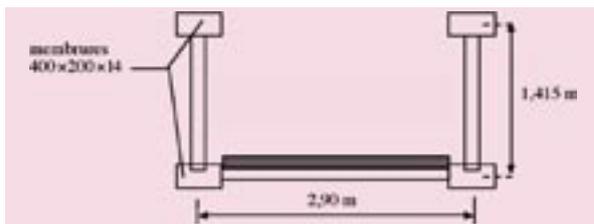


Figure A.5.3 : section transversale de la passerelle avec membrures en tôles de 14 mm et hauteur de 1,415 m

Caractéristiques du tablier

Le moment d'inertie du tablier est modifié et vaut :

$$I = 0,045 \text{ m}^4$$

La masse propre du tablier est légèrement augmentée, mais cela n'est pas significatif.

Les fréquences hautes et basses des premiers modes sont modifiées de la façon suivante :

- Classe III : 2,64 et 2,50 Hz

- Classe II : 2,64 et 2,50 Hz

- Classe I : 2,64 et 2,50 Hz

Les fréquences extrêmes pour la classe III ne conduisent à aucun calcul, puisque ces fréquences sont en dehors de la plage 1,7 Hz - 2,1 Hz.

Pour les classes I et II, des calculs sont nécessaires, mais avec un coefficient $\psi = 0,21$ pour la classe I et $\psi = 0,16$ pour la classe II.

Ceci conduit aux accélérations suivantes :

$A_{cc} = 0,55 \text{ m/s}^2$ pour la classe II, ce qui est compatible avec un niveau de confort moyen, et presque maximal (0,50 m/s²)

$A_{cc} = 1,78 \text{ m/s}^2$ pour la classe I, ce qui compatible avec un niveau de confort minimal (1 - 2,5 m/s²)

Pour rendre cette passerelle encore plus confortable, on pourrait par exemple augmenter l'épaisseur de la tôle à 16 mm de sorte que les fréquences propres soient supérieures à 2,6 Hz. Le coefficient ψ est alors nul. Il faut dans ce cas prendre en compte la seconde harmonique des piétons, mais si on reste aux alentours de 2,6 Hz, cela ne devrait pas poser de problèmes.

A.5.1.2 - Passerelle en caisson

La deuxième passerelle étudiée est un caisson métallique à deux travées de 40 m chacune, avec platelage en béton.

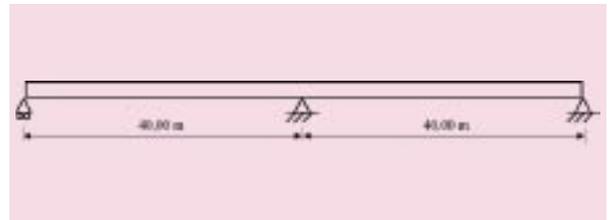


Figure A.5.4 : passerelle en caisson métallique

L'ossature est constituée d'un caisson métallique de hauteur constante égale à 1 mètre. Sur ce caisson repose une dalle en béton armé préfabriquée, d'une épaisseur de 10 cm.

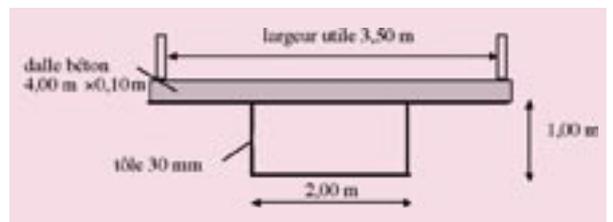


Figure A.5.5 : section transversale de la passerelle à caisson mixte

La largeur de la dalle est de 4,00 m, le passage pour piéton a une largeur de 3,50 m.

Caractéristiques du tablier

La masse du tablier est calculée en tenant compte de la dalle en béton armé et de la masse des garde-corps. Le moment d'inertie est calculé en tenant compte de la dalle en béton avec un coefficient d'homogénéisation égal à 6.

Moment d'inertie du tablier : $I = 0,057 \text{ m}^4$

Masse propre linéique du tablier : $m = 3\,055 \text{ kg/m}$

Module d'Young de l'acier : $E = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$

Classe III

Nous considérons tout d'abord la classe III, c'est à dire une passerelle normalement utilisée, pouvant parfois être traversée par des groupes importants mais sans jamais être chargée sur toute sa surface.

Calcul des modes propres

Les modes propres du tablier ont été calculés à l'aide du programme Systus.

ρS est la masse linéique totale, c'est à dire la masse linéique du tablier (y compris la dalle) augmentée de la masse linéique des piétons qui est calculée pour chaque densité de foule en fonction de la classe de la passerelle.

Pour la classe III, nous nous intéressons à la foule peu dense, la densité d de la foule est égale à $0,5 \text{ piéton/m}^2$.

Le nombre de piétons sur les deux travées est :

$$N_p = 0,5 \times (2 \times 40) \times 3,5 = 140$$

La masse totale des piétons est :

$$70 \times 140 = 9\,800 \text{ kg}$$

La masse linéique des piétons est :

$$m_p = 9\,800/80 = 122,5 \text{ kg/m}$$

La masse linéique totale est :

$$\rho S = 3\,055 + 122,5 = 3\,177,5 \text{ kg/m}$$

Pour le premier mode les fréquences hautes et basses sont égales à :

$$f_1 = 1,94 \text{ Hz à vide et } f_1 = 1,86 \text{ Hz pour un piéton par m}^2$$

Pour le deuxième mode les fréquences hautes et basses sont égales à :

$$f_2 = 3,04 \text{ Hz à vide et } f_2 = 2,92 \text{ Hz pour un piéton par m}^2$$

Calcul de la charge dynamique des piétons

Nous calculons la charge pour le premier mode d'abord, et un pourcentage d'amortissement critique de 0,6 % (tablier mixte).

La charge surfacique à prendre en compte pour les modes verticaux est :

$$F_s = d \times (280 \text{ N}) \times \cos 2\pi f_v t \times 10,8 \times \sqrt{\frac{E}{N_p}} \times \psi$$

ψ est égal à 1 car la fréquence du premier mode, qui est de 1,90 Hz, se trouve dans la plage 1 des fréquences (1,7 à 2,1 Hz). On a :

$$10,8 \sqrt{\frac{E}{N_p}} = 10,8 \sqrt{\frac{0,6/100}{140}} = 0,071$$

La charge surfacique est égale à :

$$F_s = 0,5 \times 280 \times \cos(2\pi \times 1,90 \times t) \times 0,071 \times 1 \\ = 9,94 \times \cos(2\pi \times 1,90 \times t) \text{ N/m}^2$$

La charge linéique est égale à :

$$F = F_s \times l_p = 9,94 \times 3,5 \times \cos(2\pi \times 1,90 \times t) \\ = 34,79 \times \cos(2\pi \times 1,90 \times t) \text{ N/m}$$

Calcul des réponses dynamiques

L'accélération sous la charge verticale est égale à :

$$A_{cmax} = 1,16 \text{ m/s}^2$$

L'accélération maxi calculée est située dans la plage 3 des accélérations, c'est à dire au niveau de confort minimum (accélération comprise entre 1 et $2,5 \text{ m/s}^2$). Cependant, le niveau de confort moyen est presque atteint.

Pour le second mode, la fréquence de 2,96 Hz n'impose pas de vérifications particulières.

Classe II

Nous considérons ensuite la classe II.

Calcul des modes propres

Pour la classe II, nous nous intéressons à la foule dense, la densité d de la foule est égale à $0,8 \text{ piéton/m}^2$.

Le nombre de piétons sur la passerelle est :

$$N_p = 0,8 \times (2 \times 40) \times 3,5 = 224$$

La masse totale des piétons est :

$$70 \times 224 = 15\,680 \text{ kg}$$

La masse linéique des piétons est :

$$m_p = 15\,680/80 = 196 \text{ kg/m}$$

La masse linéique totale est :

$$\rho S = 3\,055 + 196 = 3\,251 \text{ kg/m}$$

Pour le premier mode les fréquences hautes et basses sont égales à :

$$f_1 = 1,94 \text{ Hz à vide et } f_1 = 1,86 \text{ Hz pour un piéton par m}^2$$

Pour le deuxième mode les fréquences hautes et basses sont égales à :

$$f_2 = 3,04 \text{ Hz à vide et } f_2 = 2,92 \text{ Hz pour un piéton par m}^2$$

Calcul de la charge dynamique des piétons

Nous calculons la charge pour le premier mode d'abord, et un pourcentage d'amortissement critique de 0,6 % (tablier mixte).

La charge surfacique à prendre en compte pour les modes verticaux est :

$$F_s = d \times (280N) \times \cos 2\pi f_v t \times 10,8 \times \sqrt{\frac{\xi}{N_p}} \times \psi$$

ψ est égal à 1 car la fréquence du premier mode, qui est de 1,879 Hz, se trouve dans la plage 1 des fréquences (1,7 à 2,1 Hz). On a :

$$10,8 \sqrt{\frac{\xi}{N_p}} = 10,8 \sqrt{\frac{0,6/100}{224}} = 0,056$$

La charge surfacique est égale à :

$$F_s = 0,8 \times 280 \times \cos(2\pi \times 1,879 \times t) \times 0,056 \times 1$$

$$= 12,54 \times \cos(2\pi \times 1,879 \times t) \text{ N/m}^2$$

La charge linéique est égale à :

$$F = F_s \times l_p = 12,54 \times 3,5 \times \cos(2\pi \times 1,879 \times t)$$

$$= 43,89 \times \cos(2\pi \times 1,879 \times t) \text{ N/m}$$

Calcul des réponses dynamiques

L'accélération sous la charge verticale est égale à :

$$A_{ccmax} = 1,43 \text{ m/s}^2$$

L'accélération maxi calculée est située dans la plage 3 des accélérations, c'est à dire à un niveau de confort moyen (entre 1 et 2,5 m/s²).

Pour le second mode, la fréquence de 2,92 Hz nous impose de prendre en compte la seconde harmonique. Mais avec une force divisée par 4 par rapport à la première harmonique, et compte-tenu du résultat en accélération ci-dessus, le confort obtenu est maximal.

Classe I

Nous considérons enfin la classe I.

Calcul des modes propres

Les modes propres du tablier ont été calculés à l'aide du programme Systus.

Pour la classe I, nous nous intéressons à la foule très dense, la densité d de la foule est égale à 1,0 piéton/m².

Le nombre de piétons sur la passerelle est :

$$N_p = 1 \times (2 \times 40) \times 3,5 = 280$$

La masse totale des piétons est :

$$70 \times 280 = 19\ 600 \text{ kg}$$

La masse linéique des piétons est :

$$m_p = 19\ 600/80 = 245 \text{ kg/m}$$

La masse linéique totale est :

$$\rho S = 3\ 055 + 245 = 3\ 300 \text{ kg/m}$$

Pour le premier mode les fréquences hautes et basses sont égales à :

$$f_1 = 1,94 \text{ Hz à vide et } f_1 = 1,86 \text{ Hz pour un piéton par m}^2$$

Pour le deuxième mode les fréquences hautes et basses sont égales à :

$$f_2 = 3,04 \text{ Hz à vide et } f_2 = 2,92 \text{ Hz pour un piéton par m}^2$$

Calcul de la charge dynamique des piétons

Nous calculons la charge pour le premier mode d'abord, et un pourcentage d'amortissement critique de 0,6 % (tablier mixte).

La charge surfacique à prendre en compte pour les modes verticaux est :

$$F_s = d \times (280N) \times \cos 2\pi f_v t \times 1,86 \times \sqrt{\frac{\xi}{N_p}} \times \psi$$

ψ est égal à 1 car la fréquence du premier mode, qui est de 1,86 Hz, se trouve dans la plage 1 des fréquences (1,7 à 2,1 Hz).

La charge surfacique vaut :

$$F_s = 1,0 \times 280 \times \cos(2\pi \times 1,86 \times t) \times 1,85 \sqrt{\frac{1}{280}} \times 1$$

$$= 30,956 \cos(2\pi \times 1,86 \times t) \text{ N/m}^2$$

La charge linéique est égale à :

$$F = F_s \times l_p = 30,956 \times 3,5 \times \cos(2\pi \times 1,86 \times t)$$

$$= 108,35 \times \cos(2\pi \times 1,86 \times t) \text{ N/m}$$

Calcul des réponses dynamiques

L'accélération sous la charge verticale est égale à :

$$A_{ccmax} = 3,48 \text{ m/s}^2$$

L'accélération maxi calculée est située dans la plage 4 des accélérations, c'est à dire à un niveau de confort inacceptable (accélération > 2,5 m/s²).

Pour le second mode, la fréquence de 2,91 Hz nous impose de prendre en compte la seconde harmonique. Mais avec une force divisée par 4 par rapport à la première harmonique, et compte-tenu du résultat en accélération ci-dessus, le confort obtenu est moyen (environ 0,9m/s²).

Récapitulatif

Classe	Fréquence en Hz	Pourcentage d'amortissement	Accélération en m/s ²
III	1,90	0,6	1,16
II	1,88	0,6	1,43
I	1,86	0,6	3,48

Tableau A.5.1

On s'aperçoit que les accélérations sont supérieures à 1 m/s² pour toutes les classes. Si l'on choisit le niveau de confort moyen, il est nécessaire de modifier le projet.

Afin de réduire les accélérations obtenues, il faut augmenter la raideur de la structure. Pour cela, on peut augmenter la hauteur du caisson (par exemple de 40 cm).

Passerelle en caisson métallique raidi

L'ossature est constituée d'un caisson métallique de hauteur constante égale à 1,40 mètre. Sur ce caisson repose une dalle en béton armé préfabriquée, d'une épaisseur de 10 cm.

Le moment d'inertie du tablier est modifié et vaut :

$$I = 0,106 \text{ m}^4$$

Masse propre linéique du tablier :

$$m = 3\,241 \text{ kg/m}$$

Module d'Young de l'acier :

$$E = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

Les fréquences hautes et basses sont modifiées comme suit :

	1 ^{er} mode		2 ^{ème} mode	
	Fréquences hautes	Fréquences basses	Fréquences hautes	Fréquences basses
En classe III	$f_1 = 2,57 \text{ Hz}$	$f_1 = 2,47 \text{ Hz}$	$f_2 = 4,02 \text{ Hz}$	$f_2 = 3,83 \text{ Hz}$
En classe II	$f_1 = 2,57 \text{ Hz}$	$f_1 = 2,47 \text{ Hz}$	$f_2 = 4,02 \text{ Hz}$	$f_2 = 3,83 \text{ Hz}$
En classe I	$f_1 = 2,57 \text{ Hz}$	$f_1 = 2,47 \text{ Hz}$	$f_2 = 4,02 \text{ Hz}$	$f_2 = 3,83 \text{ Hz}$

Pour la classe III, les deux fréquences propres sont en dehors de la plage de fréquences que l'on doit vérifier. En classe III, le confort est donc automatiquement maximal.

Les accélérations associées au premier mode sont pour les classes I et II :

En classe II :

$$A_{\text{acc max}} = \frac{1}{2\xi} \frac{4 \times F}{\rho S \pi} = \frac{1}{2 \times 0,6/100} \frac{4 \times 10,36}{3437 \times \pi} = 0,32 \text{ m/s}^2$$

En classe I :

$$A_{\text{acc max}} = \frac{1}{2\xi} \frac{4 \times F}{\rho S \pi} = \frac{1}{2 \times 0,6/100} \frac{4 \times 28,17}{3437 \times \pi} = 0,85 \text{ m/s}^2$$

Pour la classe II, le confort est maximal. Il est moyen pour la classe I, mais acceptable tout de même.

Les conclusions sur le confort en prenant en compte la seconde harmonique de la marche des piétons, pour les seconds modes propres, sont inchangées.

A.5.2 - Étude de sensibilité de passerelles types

Cette partie présente l'étude de quatre types de passerelles courantes à partir d'exemples réels en faisant varier la portée de ces passerelles types autour de la portée réelle, en restant dans leur domaine d'emploi.

Le premier paragraphe présente les passerelles étudiées et le second précise leurs fréquences propres.

A.5.2.1 - Présentation des passerelles étudiées et prédimensionnement statique

Quatre types principaux de passerelles ont été dégagés : en béton armé, en béton précontraint, caisson mixte acier-béton et treillis métallique.

Pour chaque type, un prédimensionnement succinct a été réalisé, pour des passerelles de longueur totale de 20 à 80 m ; les hypothèses et la démarche adoptées dans chaque cas apparaissent dans la partie suivante.

Pour permettre la comparaison entre les différentes passerelles, une même largeur utile de 3,50 m a été prise pour toutes les passerelles. De même, les superstructures sont comparables, même si elles sont adaptées à chaque cas.

Passerelle en béton armé

Pour le béton armé, deux domaines de portée sont à dissocier : les petites portées (20 à 25 m) où une dalle rectangulaire en béton armé est suffisante et les plus grandes (25 à 45 m) où nous utiliserons une passerelle armée en H. Seule la hauteur h varie quand la portée change, les dimensions fixes sont les suivantes (figure A.5.6) :

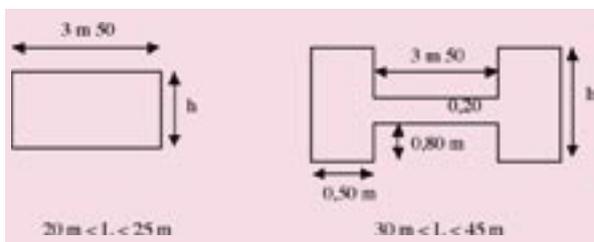


Figure A.5.6 : passerelles en béton armé

La hauteur de la passerelle à retenir est celle qui permet de garantir la limite de compression du béton (ici 15 MPa) et de loger les aciers soit dans les 3 m 50 de largeur, pour la dalle, soit dans les deux poutres de 50 cm, pour la passerelle en H.

Les superstructures de cette passerelle ainsi que leur poids sont :

- étanchéité	$3,5 \times 0,03 \times 24 = 2,5 \text{ kN / ml}$;
- revêtement	$3,5 \times 0,04 \times 24 = 4 \text{ kN / ml}$;
- divers	1 kN / ml ;
soit :	7,5 kN / ml au total.

Le rôle de garde-corps est joué par les poutres du H elles-mêmes. Pour la dalle armée, il faut ajouter deux contre-corniches et deux garde-corps, soit 16 kN / ml au total.

Passerelle en béton précontraint

De la même manière que pour le béton armé, on distingue deux domaines distincts : quand L est compris entre 20 m et 30 m, on utilise une dalle rectangulaire précontrainte. Par contre, dès que L devient supérieure à 35 m (jusqu'à 50 m), on retient plutôt un caisson précontraint. Seule la hauteur h varie quand la portée change, les dimensions fixes sont les suivantes (figure A.5.7) :

Les superstructures de cette passerelle ainsi que leur poids sont :

- 2 contre corniches	$2 \times 25 \times (0,25 \times 0,34) = 4,5 \text{ kN / ml}$;
- 2 garde corps	$2 \times 2 = 4 \text{ kN / ml}$;
- étanchéité	$4 \times 0,03 \times 24 = 3 \text{ kN / ml}$;
- revêtement	$3,5 \times 0,04 \times 24 = 4 \text{ kN / ml}$;
- divers	1 kN / ml ;
soit :	16,5 kN / ml au total.

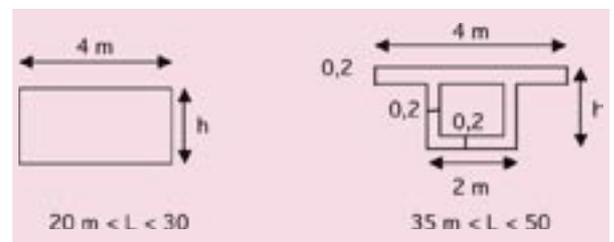


Figure A.5.7 : passerelles en béton précontraint

Passerelle en acier ou mixte

Ce type de passerelle est un caisson en acier (poutres reconstituées soudées) de nuance S355. Une dalle de béton pèse sur le caisson ; si elle est connectée à celui-ci, on obtient la section mixte. Dans le cas contraire, la section résistante est l'acier seul mais l'épaisseur de béton est quand même présente et compte dans le poids propre. Seule la hauteur de la passerelle varie quand la portée change, les dimensions fixes sont les suivantes :

Nous étudierons ce type de passerelle pour des portées totales allant de 40 à 80 m. Pour le caisson mixte, le dimensionnement s'est fait en considérant que la section d'acier reprenait son propre poids ainsi que le poids de béton frais (supposé coulé en une seule fois). Par contre, la section mixte reprend les superstructures (avec un coefficient d'équivalence $n = 18$) et les charges piétonnes statiques (coefficient $n = 6$). Pour le caisson acier, la seule section résistante est le caisson acier.

Les superstructures de cette passerelle ainsi que leur poids sont :

- 2 contre corniches $2 \times 25 \times (0,25 \times 0,34) = 4,5 \text{ kN / ml}$;
- 2 garde corps $2 \times 2 = 4 \text{ kN / ml}$;
- étanchéité $4 \times 0,03 \times 24 = 3 \text{ kN / ml}$;
- revêtement $3,5 \times 0,04 \times 24 = 4 \text{ kN / ml}$;
- divers 1 kN / ml ;
- soit : $16,5 \text{ kN / ml}$ au total.

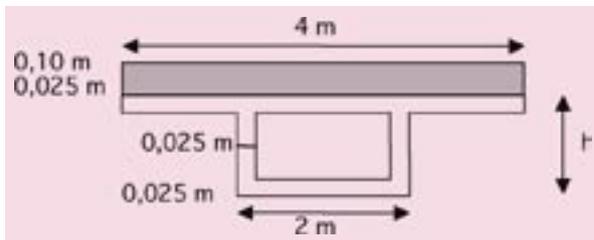


Figure A.5.8 : passerelle mixte

Passerelle treillis métallique

Le domaine de portée principale pris en compte pour ce type de passerelle est 50-80 m. On considérera la passerelle bien triangulée. Les valeurs qui restent fixes quand la portée change sont :

Les superstructures de cette passerelle ainsi que leur poids sont :

- 2 garde corps $2 \times 2 = 4 \text{ kN / ml}$;
- étanchéité $3,5 \times 0,03 \times 24 = 2,5 \text{ kN / ml}$;
- revêtement $3,5 \times 0,04 \times 24 = 4 \text{ kN / ml}$;
- divers 1 kN / ml ;
- soit : $11,5 \text{ kN / ml}$ au total.

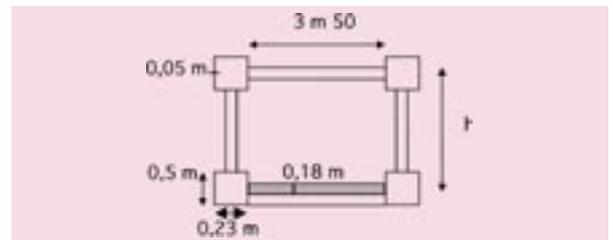


Figure A.5.9 : passerelles en treillis métallique

A.5.2.2 - Fréquences propres

On considère les quatre types de passerelles précédents comme étant des travées isostatiques.

Pour une travée isostatique, la formule donnant la fréquence propre de l'ouvrage est :

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

- f_n est la fréquence propre du mode n ;
- L est la longueur de la travée en m ;
- I est l'inertie en m^4 , verticale ou horizontale suivant ce que l'on cherche ;
- E est le module d'Young du matériau constituant la structure en N / m^2 ;
- ρS est la masse linéique de l'ouvrage (masse propre et masse des superstructures) en kg / ml à laquelle on ajoute la masse des piétons sur la passerelle. Nous avons pris 1 piéton / m^2 , avec 70 kg par piéton ; soit $\rho S =$ charges permanentes + $3,5 \times 70 \times 1$ en kg / ml .

Nous avons donc fait varier la longueur de la travée isostatique pour chaque type de passerelles. La hauteur est déterminée selon un dimensionnement statique.

Les tableaux suivants présentent les quatre fréquences propres : les deux premières verticales et les deux premières horizontales.

A partir de ces tableaux, on peut formuler les remarques suivantes :

- on peut se limiter au premier mode pour ces types de passerelles simples, aussi bien pour les vibrations verticales qu'horizontales ;
- pour les vibrations verticales, la première fréquence propre des passerelles métal est autour de 1 - 1,5 Hz, alors que pour les passerelles béton, on observe plutôt 2 - 3 Hz (plus précisément, 2,5 - 3 Hz pour le béton armé et 2 - 3 Hz pour le béton précontraint) ;
- les passerelles qui pourraient ne pas vibrer sous l'excitation piétonne sont rares, il s'agit de la passerelle armée en H de 25 m. Toutes les autres sont a priori classées « à risques » ;
- enfin, pour les vibrations latérales, on pourra se contenter d'étudier les passerelles métal de grande portée (pour toutes les autres, en effet, la première fréquence horizontale est au-delà de 2,5 Hz).

L	caisson mixte				caisson acier				treillis			
	f vert 1	f vert 2	f hor 1	f hor 2	f vert 1	f vert 2	f hor 1	f hor 2	f vert 1	f vert 2	f hor 1	f hor 2
40	1,2	4,6	3,6	14	1,6	6,2	3,1	12				
50	1,1	4,4	2,3	9,3	1,5	6,0	2,0	8,1	1,4	5,6	2,0	8,3
60	1,1	4,2	1,6	6,5	1,4	5,7	1,5	5,9	1,4	5,7	1,4	5,6
70	1,0	4,1	1,2	4,9	1,4	5,5	1,1	4,5	1,4	5,7	1,0	4,1
80	1,0	3,9	1,0	3,8	1,4	5,3	0,9	3,5	1,5	5,8	0,8	3,1

Tableau A.5.2

L	en BA					L	en BP				
	f vert 1	f vert 2	f hor 1	f hor 2	f vert 1		f vert 2	f hor 1	f hor 2		
dalle	20	2,7	11	19	77	dalle	20	2,0	8,0	15	58
armée	25	2,5	10	13	50	précontrainte	25	1,8	7,1	10	39
en H	25	3,4	13	15	61		30	1,9	7,7	7,0	28
	30	3,0	12	11	44	caisson	30	2,4	9,8	5,2	21
	35	2,7	11	8	33		35	2,3	9,1	3,9	15
	40	2,5	10	6	26		40	2,1	8,5	3,0	12
	45	2,4	10	5	21		45	2,0	8,2	2,4	9,5
							50	2,0	7,9	1,9	7,7

Tableau A.5.3



Bibliographie

Généralités

1. Dynamique des constructions. J. Armand et divers auteurs. Cours de l'ENSMP, 1983.
2. Introduction to structural dynamics. J.M. Biggs. McGraw-Hill Book Company, June 1964.
3. Vibration problems in structures - Practical guidelines. H. Bachmann et divers auteurs. Birkhäuser, 1997, 2nd edition.

Règles

4. Eurocode 2 - Calcul des structures en béton - 2ème partie : Ponts en béton. ENV 1992-2, 1996.
5. Eurocode 5 - Design of timber structures - Part2 : Bridges. PrENV 1995-2, 14 January 1997.
6. Vibration admissible pour passerelles piétonnes et cyclables. BS 5400 - Annexe C.
7. Practical guidelines. CEB, B. I. 209, Août 1991.
8. Recommandations pour le calcul des effets du vent sur les constructions. CECM, 1989.

Amortisseurs

9. Two case studies in the use of tuned vibration absorbers on footbridges. R.T. Jones ; A.J. Pretlove; R. Eye. The Structural Engineer, June 1981, Vol. 59B n° 2.
10. Tuned vibration absorbers for lively structures. H. Bachmann ; B. Weber. Structural Engineering International, 1995, n° 1.

11. Tuned mass dampers for balcony vibration control. M. Setareh ; R. Hanson. ASCE Journal of Structural Engineering, March 1992, Vol. 118, n° 3.
12. Tuned mass dampers to control floor vibration from humans. M. Setareh ; R. Hanson. ASCE Journal of Structural Engineering, March 1992, Vol. 118, n° 3.
13. Documentation fabricants : Taylor - Jarret.
14. Passerelle du stade de France - Conception d'amortisseurs dynamiques accordés. C. Outteryck ; S. Montens. Revue Française de Génie Civil, Octobre 1999.

Analyse du comportement

15. Human tolerance levels for bridge vibrations. D. R. Leonard, 1966.
16. Dynamic design of footbridges. Y. Matsumoto ; T. Nishioka ; H. Shiojiri ; K. Matsuzaki. IABSE Proceedings, 1978, P-17/78, pp. 1-15.
17. Pedestrian induced vibrations in footbridges. J.E. Wheeler. Proceedings ARRB, 1980, Vol. 10, part 3.
18. Prediction and control of pedestrian-induced vibration in footbridges. J. Wheeler. ASCE Journal of structural engineering, September 1982, Vol. 108, n° ST9.
19. Structural serviceability - Floor vibrations. B. Ellingwood ; A. Tallin. ASCE Journal of Structural Engineering, February 1984, Vol. 110, n° 2.
20. Dynamic behaviour of footbridges. G.P. Tilly ; D.W. Cullington ; R. Eyre. IABSE periodic, February 1984, S-26/84, page 13 et suivantes.

21. Vibration of a beam under a random stream of moving forces. R. Iwankiewicz ; J. Pawel Sniady. *Structural Mechanics*, 1984, Vol. 12, n° 1.
22. Vibrations in structures induced by man and machines. H. Bachmann ; W. Amman. *IABSE, Structural Engineering Documents*, 1987.
23. On minimum weight design of pedestrian bridges taking vibration serviceability into consideration. H. Sugimoto ; Y. Kajikawa ; G.N. Vanderplaats. *ASCE Journal of Structural Engineering*, October 1987.
24. Design live loads for coherent crowd harmonic movements. A. Ebrahimipour ; R.L. Sack. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 1990, Vol. 118-4, pp.1121-1136.
25. Durch Menschen verursachte dynamische Lasten und deren Auswirkungen auf Balkentragwerke. H. Bachmann. *Kurzberichte aus der Bauforschung*, Novembre 1990, Bericht n°125.
26. Vibration Upgrading of Gymnasia - Dance Halls and Footbridges. H. Bachmann. *Structural Engineering International*, February 1992.
27. Case studies of structures with man-induced vibrations. H. Bachmann. *ASCE Journal of Structural Engineering*, March 1992, Vol. 118, n° 3.
28. Bases for design of structures - Serviceability of buildings against vibration. ISO 10137, 15 April 1992, first edition.
29. Schwingungsuntersuchungen für Fußgängerbrücken. H. Grundmann ; H. Kreuzinger ; M. Schneider. *Bauingenieur*, 1993, n° 68.
30. Synchronisation of human walking observed during lateral vibration of a congested pedestrian bridge. Y. Fujino ; B.M. Pacheco ; S.I. Nakamura ; P. Warnitchai. *Earthquake engineering and structural dynamics*, 1993.
31. Design criterion for vibrations due to walking. D.E. Allen ; T.M. Murray. *Engineering Journal/American Institute of Steel Construction*, 1993, 4th Quarter.
32. Guidelines to minimise floor vibrations from building occupants. S. Mouring ; B. Ellingwood. *ASCE Journal of Structural Engineering*, February 1994, Vol. 120, n° 2.
33. Measuring and modeling dynamic loads imposed by moved crowds. Divers auteurs. *ASCE Journal of Structural engineering*, December 1996.
34. Vibrations et chocs mécaniques - Évaluation de l'exposition des individus à des vibrations globales du corps - Partie 1 : Spécifications générales. Norme Internationale ISO 2631-1, 1997.
35. Serviceability vibration evaluation of long floor slabs. T.E. Price ; R.C. Smith. *ASCE Structures Congress*, Washington DC, USA, 21-23 Mai 2001. ASCE, 1991.
36. Development of a simplified design criterion for walking vibrations. L. M. Hanagan ; T. Kim. *ASCE Structures Congress*, Washington DC, USA, 21-23 Mai 2001. ASCE, 2001.
37. An investigation into crowd-induced vertical dynamic loads using available measurements. M. Willford. *The Structural Engineer*, June 2001, Vol. 79, n° 12.
38. The London Millennium Footbridge. P. Dallard ; A.J. Fitzpatrick ; A. Flint ; S. Le Bourva ; A. Low ; R.M. Ridsdill Smith ; M. Willford. *The Structural Engineer*, 20 November 2001, Vol. 79, n° 22.

Méthodes de calcul

39. Etude du comportement vibratoire des passerelles lors du passage des piétons. F. Legeron ; M. Lemoine. *Revue Ouvrages d'Art*, n° 32. Sétra, juillet 1999.
40. Etude dynamique des passerelles piétons. G. Youssouf - maître de stage F. Legeron. Thèse MSOA de l'ENPC promotion 2000.
41. Cable dynamics - A review. U. Starossek. *Structural Engineering International* 3/94, 1994.
42. 43. Using component mode synthesis and static shapes for tuning TMDs. Divers auteurs. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 1992, n° 3.

Articles sur passerelle soit vibrante, soit instrumentée

44. Pedestrian-induced vibration of footbridges. P. Dallard ; A.J. Fitzpatrick ; A. Flint ; A. Low ; R. Ridsdill Smith ; M. Willford. *Structural Engineer*, 5 December 2000, Vol. 78, n° 23-24.
45. Modal identification of cable-stayed pedestrian bridge. M. Gardnermorse ; D. Huston. *ASCE Journal of Structural Engineering*, November 1993, Vol. 119, n° 11.
46. A briefing on pedestrian-induced lateral vibration of footbridges. *Revue Française de Génie Civil*, 2000, Vol. 4, n° 6.
47. Dynamic testing of the Sherbrooke pedestrian bridge. P. Paultre ; J. Proulx ; F. Légeron ; M. Le Moine, N. Roy. 16th IABSE Congress, Lucerne, Switzerland, 2000.

Passerelles spécifiques

48. Sacramento river pedestrian bridge USA. C. Redfield ; J. Straski. Structural Engineering International, 1991, 4/91.
49. Construction of the world's longest pedestrian stress-ribbon bridge. Divers auteurs. FIP notes 98-1, 1998.
50. Rebirth of the ribbon. Divers auteurs. Bridge, 1998, 4th quarter.

Bibliographies complémentaires

Amortissement

51. Mechanical vibrations. J.P. Den Hartog. Mc Graw-Hill, 1940, 4th edition.
52. Comportement aérodynamique des ponts à haubans à tablier métallique de section ouverte. J.C. Foucriat. Journées techniques ASCE, 1978, partie I.
53. On the dynamic vibration damped absorber of the vibration system. T. Ioi ; K. Ikeda. Bulletin of the Japanese Society of Mechanical Engineering, 1978, 21, 151.
54. Optimal absorber parameters for various combinations of response and excitation parameters. G.B. Warburton. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1982, Vol.10, pp. 381-401.
55. Fractional-derivative Maxwell model for viscous dampers. N. Makris ; M.C. Constantinou. ASCE Journal of Structural Engineering, 1991, Vol. 117, pp. 2708-2724.
56. Dynamic analysis of generalised viscoelastic fluids. N. Makris ; G.F. Dargush ; M.C. Constantinou. Journal of Engineering Mechanics, 1993, Vol. 119, n° 8.
57. Vibration control by multiple tuned liquid dampers. Y. Fujino ; L.M. Sun. ASCE Journal of Structural Engineering, 1993, Vol. 119, n° 12.

Bulletins techniques de l'OTUA

58. Bulletins Ponts métalliques.
59. Bulletins Ouvrages métalliques.

Documentations complémentaires sur le comportement des piétons

60. Actes et textes techniques de la Conférence Internationale Footbridge 2002, Paris France, Novembre 2002.
61. Model for lateral excitation of footbridges by synchronous walking. S. Nakamura. ASCE Journal of Structural Engineering, January 2004
62. Experimental study on lateral forces induced by pedestrians. S. Nakamura ; H. Katsuura ; K. Yokoyama. IABSE Symposium, Shanghai, China, September 2004.



46 avenue
Aristide Briand
BP 100
92225 Bagneux Cedex
France
téléphone :
33 (0)1 46 11 31 31
télécopie :
33 (0)1 46 11 31 69
internet : www.setra.equipement.gouv.fr



Le présent guide a pour but de faire le point de l'état des connaissances sur le comportement vibratoire des passerelles sous l'action des piétons et de fournir des recommandations sur la stratégie à adopter pour concevoir et dimensionner des passerelles.

Il est destiné aux maîtres d'ouvrage, aux maîtres d'œuvre, et aux ingénieurs de bureaux d'études.

Ce guide rappelle tout d'abord les méthodes de calcul dynamique appliquées aux passerelles et décrit le chargement des piétons.

Il présente une méthodologie d'analyse dynamique basée sur la notion de risque et sur le niveau de trafic, et il définit des niveaux de confort.

Il propose des cas de charge dynamique et des vérifications structurelles spécifiques au comportement dynamique.

Il comporte des clauses qui pourront être insérées dans les pièces techniques des marchés d'études, de travaux et d'épreuves.

Il fournit en annexe des rappels de dynamique des structures, une modélisation de la charge piétonne, une description des systèmes amortisseurs, et quelques exemples de calcul de passerelles courantes.

Document disponible au bureau de vente du Sétra
46 avenue Aristide Briand - BP 100 - 92225 Bagneux Cedex - France
téléphone : 33 (0)1 46 11 31 53 - télécopie : 33 (0)1 46 11 33 55
Référence : **0611** - Prix de vente : **20 €**

*Couverture - crédit photos : Michel Leher (Matière TP) - Marc Mimram - Gérard Forquet (Sétra) - Sétra
Conception graphique - mise en page : Eric Rillardon (Sétra)*

*L'autorisation du Sétra est indispensable pour la reproduction, même partielle, de ce document
© 2006 Sétra - Dépôt légal : 2^{ème} trimestre 2006 - ISBN : 2-11-095819-7*

Le Sétra appartient
au Réseau Scientifique
et Technique
de l'Équipement

