

MINISTÈRE DES TRAVAUX PUBLICS ET DES TRANSPORTS

SERVICE SPECIAL DES AUTOROUTES

38, rue Liancourt PARIS 14^e SEG. 37-74



OUVRAGES TYPES POUR AUTOROUTES

*De document est propriété de
M. LENOIR et ne peut être
réimprimé sans son
autorisation écrite.
Le Service des Autoroutes*

PASSAGES INFÉRIEURS

EN PONTS CADRES OUVERTS OU FERMÉS

ANALYSE THÉORIQUE

DES STRUCTURES TYPES EN PORTIQUES ET CADRES

par G. MONNERET, Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées
Chef de la Division des Ouvrages d'Art
du Service Spécial des Autoroutes

ETUDES D'OUVRAGES D'ART

G. MONNERET
INGÉNIEUR EN CHEF

A. THIEBAULT
INGÉNIEUR EN CHEF
CHEF DU SERVICE

PARIS, le 2 MAI 1962

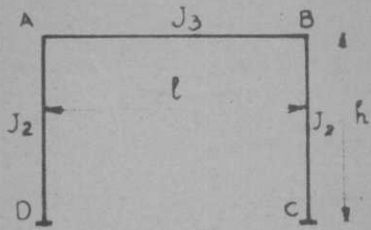
PORTIQUES et CADRES

Problème étudié	1
Notations et formules fondamentales	2
Titre I - PORTIQUE PARTIELLEMENT ENCASTRE SUR SES APPUIS	4
1 Charges horizontales sur les pénédroits	4
2 Charges verticales sur la traverse	7
3 Variations linéaires	9
4 Portique parfaitement encasté sur ses appuis	10
5 Portique articulé sur ses appuis	12
Titre II - CADRE REPOSANT SUR SA FACE INFÉRIEURE	14
1 Charges horizontales sur les pénédroits	14
2 Charges verticales sur les traverses	17
3 Variations linéaires	20
Annexe I -	21
Rotation d'une semelle fondée sur terrain meuble	21
Rotation de la semelle de fondation d'un portique	22
Annexe II -	23
Efforts produits par le poids des terres	23

PORTIQUES et CADRES

Nous étudierons les deux types de structures suivants, qui l'un et l'autre admettent en coupe transversale un plan de symétrie vertical et dont chacun des éléments constitutifs est de moment d'inertie constant :

PORTIQUE PARTIELLEMENT ENCASTRE AUX APPUIS.



La traverse A B, de portée l et de moment d'inertie J_3 , est horizontale ; les piliers, identiques, sont verticaux, de hauteur h et de moment d'inertie J_2 .

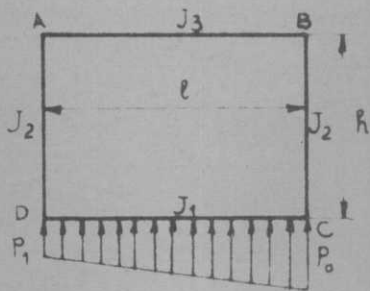
Les encastremets en D et C sont identiques. Ce sont des encastremets élastiques définis par la valeur absolue λ_1 du rapport $\frac{\theta}{M}$ de la rotation de la fondation au moment fléchissant qui lui est appliqué en

son milieu (1) . λ_1 caractérise la flexibilité de l'encastrement :
 pour $\lambda_1 = 0$, l'encastrement est parfait (θ nul quel que soit M) ;
 pour λ_1 infini, l'articulation est parfaite (M nul quel que soit θ) .

Entre ces deux valeurs extrêmes se trouvent toutes celles que l'on rencontre en pratique dans le cas de piliers encastres sur des semelles de fondation qui reposent sur du terrain meuble ou sur des pieux, qui leur permettent une certaine rotation, supposée élastique. La fondation sur rocher est un encastrement parfait.

Les points D et C sont supposés fixes, les déplacements qu'ils peuvent subir n'affectant que dans une mesure négligeable les efforts dans le portique.

CADRE REPOSANT SUR SA FACE INFÉRIEURE.



Le cadre rectangulaire a des traverses horizontales de portée l et de moments d'inertie J_1 et J_3 , des piliers verticaux identiques de hauteur h et de moment d'inertie J_2 . Il repose sur le sol de fondation, supposé homogène, sur toute la longueur de sa traverse D C.

Il est d'usage de calculer cette structure en supposant que les réactions du terrain sur la traverse D C sont à distribution linéaire et - complétées verticalement par les réactions horizontales le long de D C, qui n'affectent pas les efforts dans le cadre - constituent un système équivalent aux forces extérieures appliquées au cadre.

(1) Voir annexe I

NOTATIONS et FORMULES FONDAMENTALES

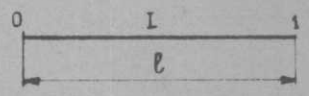
Nous désignerons par A, B, C, D , les moments fléchissants aux angles A, B, C, D , et par a, b, c, d , les rotations des barres aboutissant en ces points.

Les moments fléchissants sont comptés positivement s'ils tendent la face intérieure au cadre.

Les rotations sont comptées positivement dans le sens trigonométrique.

Pour un cas de charge quelconque appliquée à l'une des barres 01 , de portée l et de moment d'inertie constant I , nous désignerons par :

- \mathcal{P} la somme des charges appliquées
- \mathcal{M} le moment de ces charges par rapport à l'appui de gauche 0 de la barre.



$-\frac{l}{6EI}\varphi$ et $+\frac{l}{6EI}\psi$ les rotations aux extrémités de gauche et de droite de la barre,

calculées en supposant la barre sur appuis simples.

\mathcal{P} et \mathcal{M} sont positifs

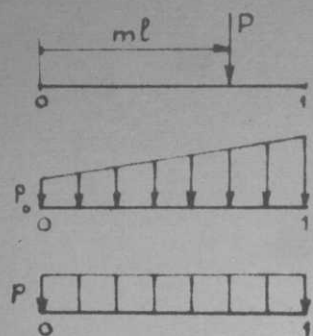
}	pour les charges verticales : si elles sont dirigées de haut en bas.
	pour les charges horizontales : si elles agissent sur la face extérieure au cadre.

Si la barre est partiellement encastrée aux appuis 0 et 1 , qui développent dans la barre des moments fléchissants M_0 et M_1 , les rotations ω_0 et ω_1 aux extrémités de la barre partiellement encastrée ont pour expressions :

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{l}{6EI} [-\varphi - (2M_0 + M_1)] \\ \omega_1 = \frac{l}{6EI} [+ \psi + (M_0 + 2M_1)] \end{cases}$$

$\mathcal{P}, \mathcal{M}, \varphi, \psi$, sont des fonctions des charges appliquées à la barre. Leurs expressions sont données au tableau suivant, pour les 5 cas de charge ci-après :

- Cas 1 Charge unique P appliquée à la distance m de l'appui de gauche.
- Cas 2 Charge continue à la répartition linéaire couvrant toute la barre, les densités de charge étant p_0 en 0 et p_1 en 1 .
- Cas 3 Charge uniforme de densité p appliquée à toute la longueur de la barre.



Cas 1

Cas 2

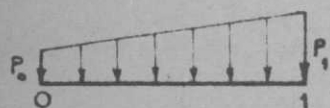
Cas 3

	\mathcal{P}	\mathcal{M}	φ	ψ
Cas 1	P	Plm	$Plm(1-m)(2-m)$	$Plm(1-m)(1+m)$
Cas 2	$\frac{l}{2}(P_0+P_1)$	$\frac{l^2}{6}(P_0+2P_1)$	$\frac{l^2}{60}(8P_0+7P_1)$	$\frac{l^2}{60}(7P_0+8P_1)$
Cas 3	pl	$\frac{pl^2}{2}$	$\frac{pl^2}{4}$	$\frac{pl^2}{4}$

Nous donnons au tableau suivant les expressions des combinaisons des fonctions $\varphi, \psi, \mathcal{M}, \mathcal{P}$ qui interviennent dans les calculs.

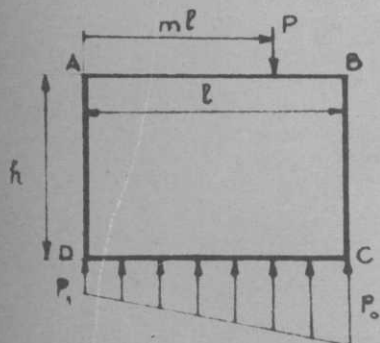
	$\varphi+\psi$	$\varphi-\psi$	$\mathcal{M}-\psi$	$2\mathcal{M}-\mathcal{P}l$
Cas 1	$3Plm(1-m)$	$Plm(1-m)(1-2m)$	Plm^3	$-Pl(1-2m)$
Cas 2	$\frac{l^2}{4}(P_0+P_1)$	$\frac{l^2}{60}(P_0-P_1)$	$\frac{l^2}{20}(P_0+4P_1)$	$-\frac{l^2}{6}(P_0-P_1)$
Cas 3	$\frac{pl^2}{2}$	0	$\frac{pl^2}{4}$	0

En particulier, dans le cas 2, les rotations ont pour expressions développées :

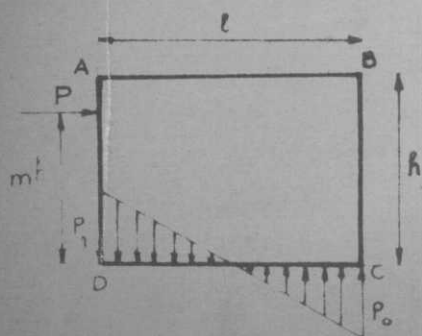


$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{l}{6EI} \left[-\frac{l^2}{60}(8P_0+7P_1) - (2M_0+M_1) \right] \\ \omega_1 = \frac{l}{6EI} \left[+\frac{l^2}{60}(7P_0+8P_1) + (M_0+2M_1) \right] \end{cases}$$

Nous allons appliquer ces formules au calcul des rotations aux extrémités C et D de la traverse inférieure du cadre, sous l'effet d'une charge unique P appliquée soit à la traverse AB, soit au piedroit DA. Les réactions extrêmes p_0 et p_1 du terrain sur CD se calculent conformément au principe exposé plus haut ; d'où :



$$\begin{cases} p_0 = \frac{P}{l}(6m-2) & \omega_c = \frac{l}{6EI} \left[-\frac{Pl}{10}(2+m) - (2M_c+M_D) \right] \\ p_1 = \frac{P}{l}(-6m+4) & \omega_D = \frac{l}{6EI} \left[+\frac{Pl}{10}(3-m) + (M_c+2M_D) \right] \end{cases}$$



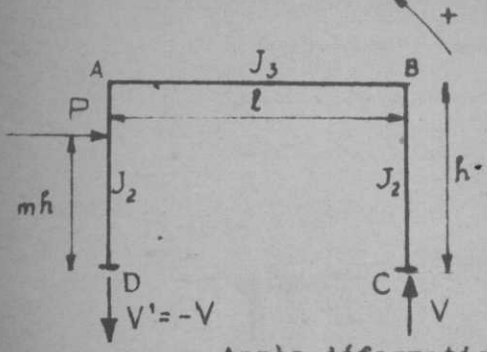
$$\begin{cases} p_0 = \frac{6Pmh}{l^2} & \omega_c = \frac{l}{6EI} \left[-\frac{Pmh}{10} - (2M_c+M_D) \right] \\ p_1 = -P & \omega_D = \frac{l}{6EI} \left[-\frac{Pmh}{10} + (M_c+2M_D) \right] \end{cases}$$

Pour un cas de charge quelconque, on remplacera P par \mathcal{P} , et Pml ou Pmh par \mathcal{M} .

TITRE I : PORTIQUE PARTIELLEMENT ENCASTRÉ SUR SES APPUIS

1 - CHARGES HORIZONTALES SUR LES PIÉDROITS

Rappelons que nous désignons par A, B, C, D les moments fléchissants aux angles A, B, C, D, et par a, b, c, d les rotations des barres aboutissant en ces points. Nous poserons



$$\lambda_3 = \frac{l}{6EJ_3}$$

$$\lambda_2 = \frac{h}{6EJ_2}$$

$$\lambda_1 = \frac{d}{D+V'\delta l}$$

(1) V et V' désignent les efforts verticaux appliqués au portique en C et D (comptés positivement vers le haut).

Après déformation, les droites DA et CB ont tourné d'un angle ϵ (compté positivement dans le sens trigonométrique), et la traverse AB s'est déplacée horizontalement d'une quantité v (comptée positivement si elle correspond à un ϵ positif, donc positivement vers la gauche): $v = \epsilon h$

Après déformation, les angles de la barre DA avec sa corde sont donc $d - \epsilon$ en D, et $a - \epsilon$ en A.

$$AB \begin{cases} a = -\lambda_3 [2A+B] \\ b = +\lambda_3 [A+2B] \end{cases}$$

$$DA \begin{cases} d - \epsilon = \lambda_2 [-\psi - (2D+A)] \\ a - \epsilon = \lambda_2 [+ \psi + (D+2A)] \end{cases}$$

en C : $c = -\lambda_1 (C + V \delta l)$

en D : $d = \lambda_1 (D + V' \delta l)$

$$BC \begin{cases} b - \epsilon = -\lambda_2 [2B+C] \\ c - \epsilon = +\lambda_2 [B+2C] \end{cases}$$

Equations que nous classerons de la manière suivante :

	A	B	C	D
$a = \lambda_3 x$	-2	-1		
$b = \lambda_3 x$	1	2		
$c = \lambda_1 x$			-1	$-\lambda_1 V \delta l$
$d = \lambda_1 x$				1 $+\lambda_1 V' \delta l$

I

	A	B	C	D	
$a - \epsilon = \lambda_2 x$	2			1	$+\lambda_2 \psi$
$b - \epsilon = \lambda_2 x$		-2	-1		
$c - \epsilon = \lambda_2 x$		1	2		
$d - \epsilon = \lambda_2 x$	-1			-2	$-\lambda_2 \psi$

II

En outre, les efforts tranchants dans les piédroits en A et B doivent s'équilibrer :

$$\frac{\pi C}{h} + \frac{D-A}{h} = \frac{C-B}{h} \quad \text{ou} \quad A-B+C-D = \pi \quad (1)$$

Nous prendrons comme inconnues auxiliaires les fonctions X, Y, Z, Z' définies par

$$\begin{cases} A = X + Z \\ B = X - Z \\ C = Y - Z' \\ D = Y + Z' \end{cases}$$

L'équation 1) devient $Z - Z' = \frac{\pi}{2}$ (2)

d'autre part : $V = \frac{A-B}{l} = \frac{2Z}{l}$; $V' = -V$

(1) Voir annexe I

	X	Y	Z	Z'
$a = \lambda_3 X$	-3		-1	
$b = \lambda_3 X$	3		-1	
$c = \lambda_1 X$		-1	-2\delta	1
$d = \lambda_1 X$		1	-2\delta	1

I

	X	Y	Z	Z'	\(\varphi\)	\(\psi\)
$a - \varepsilon = \lambda_2 X$	2	1	2	1		1
$b - \varepsilon = \lambda_2 X$	-2	-1	2	1		
$c - \varepsilon = \lambda_2 X$	1	2	-1	-2		
$d - \varepsilon = \lambda_2 X$	-1	-2	-1	-2	-1	

II

Formons, dans chacun des groupes I et II, la quantité $a + b - (c + d)$ et égalons les résultats. Il vient :

$$(6\lambda_2 + 2\lambda_3 - 4\lambda_1\delta)Z + (6\lambda_2 + 2\lambda_1)Z' = -\lambda_2(\varphi + \psi) \quad (3)$$

équation qui, jointe à (2), donne Z et Z'.

Formons, dans chacun des groupes I et II, les quantités $a - b$ et $c - d$ et égalons les résultats. Il vient :

$$\begin{cases} a - b = -6\lambda_3 X = \lambda_2(\varphi + 4X + 2Y) \\ c - d = -2\lambda_1 Y = \lambda_2(\varphi + 2X + 4Y) \end{cases} \quad \text{équations qui donnent X et Y.} \quad (4)$$

$$(5)$$

Pesons

Les équations (3) (4) (5), qui sont homogènes en λ , s'écrivent :

$$\begin{aligned} k' &= \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \\ k &= \frac{J_3}{J_2} \frac{h}{l} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \end{aligned}$$

$$(3k + 1 - 2k'\delta)Z + (3k + k')Z' = -\frac{k}{2}(\varphi + \psi) \quad (3')$$

$$(2k + 3)X + kY = -\frac{k}{2}\varphi \quad (4')$$

$$kX + (2k + k')Y = -\frac{k}{2}\varphi \quad (5')$$

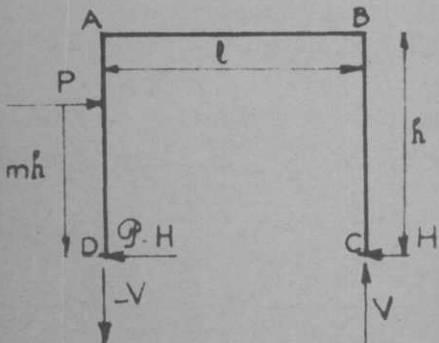
La résolution des équations 2, 3, 4, 5 donne :

$$\begin{aligned} X &= -\frac{k}{2N_1} \left[-k\varphi + (2k + k')\psi \right] & Z &= \frac{1}{2N_2} \left[(3k + k')\pi\epsilon - k(\varphi + \psi) \right] \\ Y &= -\frac{k}{2N_1} \left[(2k + 3)\varphi - k\psi \right] & Z' &= -\frac{1}{2N_2} \left[(3k + 1 - 2k'\delta)\pi\epsilon + k(\varphi + \psi) \right] \end{aligned}$$

$$Z' = -\left(\frac{\pi\epsilon}{2} - Z\right)$$

avec $N_1 = (2k + 3)(2k + k') - k^2$

$$N_2 = 6k + k' + 1 - 2k'\delta$$



Soit H la poussée appliquée au portique au point C ; la poussée en D sera $(P - H)$ (comptées positivement vers la gauche).

$$Hh = C - B = Y - X + Z - Z' = Y - X + \frac{\pi\epsilon}{2}$$

D'où

$$H = \frac{\pi\epsilon}{2h} + \frac{Y - X}{h}$$

Formule qu'il n'est pas nécessaire de développer.

On a toutefois, à titre de vérification :

$$Y - X = -\frac{k}{2N_1} \left[(3k + 3)\varphi - (3k + k')\psi \right]$$

V et $-V$, efforts verticaux appliqués au portique en C et D (V compté positivement vers le haut), sont donnés par

$$A = B + Vl \qquad V = \frac{A-B}{l} \qquad \boxed{V = \frac{2Z}{l}}$$

On calculera, si nécessaire, les rotations à partir des moments par les formules I, et ϵ par l'une des formules II.

Il est intéressant d'expliciter ϵ , en employant par exemple les deuxièmes formules I et II

$$\epsilon = \lambda_3(3X - Z) + \lambda_2(2X + Y - 2Z - Z')$$

$$\epsilon = \lambda_3 \left[(2k+3)X + kY - (2k+1)Z - kZ' \right] = -\lambda_3 \left[+\frac{k}{2}\psi + (2k+1)Z + kZ' \right]$$

$$\boxed{\epsilon = -\lambda_3 \left[(3k+1)Z - \frac{k}{2}(\pi_0 - \psi) \right]}$$

formule générale, qu'il n'est pas nécessaire de pousser plus loin.

Ces formules, absolument générales, permettent d'obtenir les efforts et déformations dus à une charge à répartition quelconque s'étendant sur tout ou partie de la longueur AD.

CHARGE UNIQUE P A L'ORDONNÉE mh

$$X = -\frac{k}{2N_1} Phm(1-m) \left[k' + (3k+k')m \right] \qquad Z = \frac{Phm}{2N_2} \left[k' + 3km \right]$$

$$Y = -\frac{k}{2N_1} 3Phm(1-m) \left[(k+2) - (k+1)m \right] \qquad Z' = -\frac{Phm}{2N_2} \left[(6k+1-2k'\delta) - 3km \right]$$

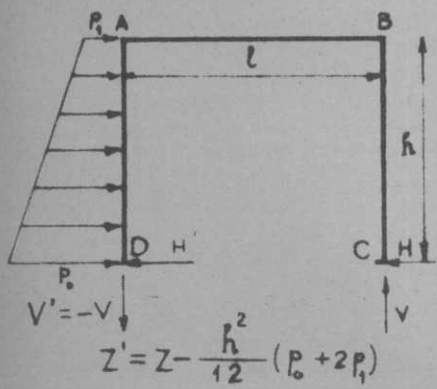
avec $N_1 = (2k+3)(2k+k') - k^2$ $N_2 = 6k+k'+1-2k'\delta$

H, V, ϵ se calculent à partir des valeurs numériques de X, Y, Z. Nous explicitons H et ϵ à titre de vérification et pour le cas où l'on voudrait leurs lignes d'influence :

$$H = \frac{Pm}{2N_1} \left[3(k+1)(k'+3km) - k(6k+k'+3)m^2 \right]$$

$$\epsilon = -\frac{\lambda_3}{2} Phm \left[-km^2 + \frac{(3k+1)(k'+3km)}{N_2} \right]$$

CHARGE CONTINUE A REPARTITION LINEAIRE SUR TOUTE LA LONGUEUR AD.



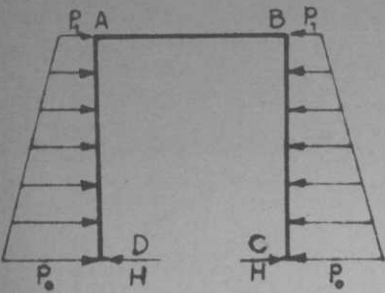
$$Z' = Z - \frac{h^2}{12} (P_0 + 2P_1)$$

$$\begin{cases} H = \frac{h}{12} (P_0 + 2P_1) + \frac{Y-X}{h} \\ H' = \frac{h}{12} (5P_0 + 4P_1) - \frac{Y-X}{h} \end{cases}$$

$$V = \frac{2Z}{l}$$

	P_0	P_1	Si $P_0 = P_1 = P$
$X = -\frac{h^2 k}{120 N_1}$	$6k + 7k'$	$9k + 8k'$	$X = -\frac{Ph^2}{8N_1} k(k+k')$
$Y = -\frac{h^2 k}{40 N_1}$	$3k + 8$	$2k + 7$	$Y = -\frac{Ph^2}{8N_1} k(k+3)$
$Z = \frac{h^2}{24 N_2}$	$3k + 2k'$	$9k + 4k'$	$Z = \frac{Ph^2}{4N_2} (2k+k')$
$Z' = -\frac{h^2}{24 N_2}$	$9k + 2-4k'\delta$	$15k + 4-8k'\delta$	$Z' = -\frac{Ph^2}{4N_2} (4k+1-2k'\delta)$
$\frac{Y-X}{h} = -\frac{hk}{120 N_1}$	$3k+24-7k'$	$-3k+21-8k'$	$\frac{Y-X}{h} = -\frac{Ph}{8N_1} k(3-k)$
$\epsilon = -\lambda_3 \left[(3k+1)Z - \frac{kh^2}{40} (P_0 + 4P_1) \right]$			$\epsilon = -\lambda_3 \left[(3k+1)Z - \frac{kPh^2}{8} \right]$

$A=B=2X, C=D=2Y, v=0, \epsilon=0$

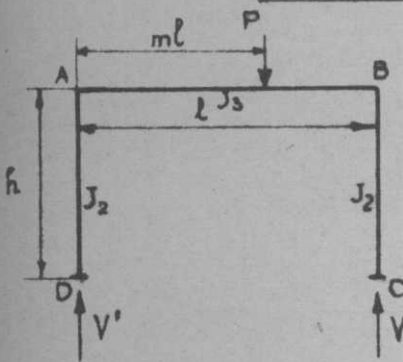


	P_0	P_1
$A=B = -\frac{h^2 k}{60N_1}$	$6k + 7k'$	$9k + 8k'$
$C=D = -\frac{h^2 k}{60N_1}$	$9k + 24$	$6k + 21$
$H = \frac{h}{6}(2P_0 + P_1) - \frac{D-A}{h}$		

SI $P_0 = P_1 = P$

$A=B = -\frac{Ph^2}{4N_1} k(k+k')$
$C=D = -\frac{Ph^2}{4N_1} k(k+3)$
$H = \frac{Ph}{2} \left[1 + \frac{k(3-k)}{2N_1} \right]$

2 - CHARGES VERTICALES SUR LA TRAVERSE



Les notations sont les mêmes que pour les charges horizontales, soit :

$\lambda_3 = \frac{l}{6EJ_3}$
 $\lambda_2 = \frac{h}{6EJ_2}$
 $\lambda_1 = \left| \frac{d}{D+V'\delta l} \right|^{(1)}$

V et V' désignent les efforts verticaux appliqués au portique en C et D (comptés positivement vers le haut).

AB $\begin{cases} a = \lambda_3 [-\varphi - (2A+B)] \\ b = \lambda_3 [\varphi + (A+2B)] \end{cases}$

DA $\begin{cases} d - \epsilon = -\lambda_2 [A+2D] \\ a - \epsilon = \lambda_2 [2A+D] \end{cases}$

en C : $c = -\lambda_1 (C + V\delta l)$
 en D : $d = \lambda_1 (D + V'\delta l)$

BC $\begin{cases} b - \epsilon = -\lambda_2 [2B+C] \\ c - \epsilon = \lambda_2 [B+2C] \end{cases}$

Equations que nous classerons de la manière suivante :

	A	B	C	D	
$a = \lambda_3 x$	-2	-1			$-\lambda_3 \varphi$
$b = \lambda_3 x$	1	2			$+\lambda_3 \psi$
$c = \lambda_1 x$			-1		$-\lambda_1 V\delta l$
$d = \lambda_1 x$				1	$+\lambda_1 V'\delta l$

I

	A	B	C	D	
$a - \epsilon = \lambda_2 x$	2				1
$b - \epsilon = \lambda_2 x$		-2	-1		
$c - \epsilon = \lambda_2 x$			1	2	
$d - \epsilon = \lambda_2 x$	-1				-2

II

En outre, la somme des efforts tranchants dans les piedsroits en A et B équilibre la composante horizontale des forces extérieures, soit 0. Donc

$A - B + C - D = 0$

Si nous prenons les mêmes inconnues auxiliaires que sous l'action des forces horizontales, l'équation ci-dessus conduit à $Z = Z'$. Nous poserons donc

$A = X + Z$
$B = X - Z$
$C = Y - Z$
$D = Y + Z$

(1) Voir annexe I

et les équations I et II s'écrivent :

	X	Y	Z	φ	ψ	$V\delta l$	$V'\delta l$
$a = \lambda_3 \times$	-3		-1	-1			
$b = \lambda_3 \times$	3		-1		1		
$c = \lambda_1 \times$		-1	1			-1	
$d = \lambda_1 \times$		1	1				1

$-X$	Y	Z
2	1	3
-2	-1	3
1	2	-3
-1	-2	-3

I

II

Soient \mathcal{P} la somme des forces appliquées à A B et π leur moment par rapport à A (\mathcal{P} et π sont positifs pour des forces dirigées de haut en bas).

$$Vl + B - \pi = A$$

$$V = \frac{\pi b + A - B}{l}$$

$$V = \frac{\pi b + 2Z}{l}$$

$$V' = \mathcal{P} - V$$

$$V - V' = \frac{2\pi b + 4Z - \mathcal{P}l}{l}$$

Formons, dans chacun des groupes I et II, la quantité $(a + b) - (c + d)$ et égalons les résultats. Il vient, en posant, comme plus haut :

$$k' = \frac{\lambda_1}{\lambda_3}$$

$$k = \frac{J_3}{J_2} \frac{h}{l} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3}$$

$$-[2Z + \varphi - \psi] - 2k'Z + k'\delta(2\pi b + 4Z - \mathcal{P}l) = 12kZ$$

$$Z = \frac{-(\varphi - \psi) + k'\delta(2\pi b - \mathcal{P}l)}{2N_2} \quad \text{avec } N_2 = 6k + k' + 1 - 2k'\delta$$

Formons, dans chacun des groupes I et II, les quantités $(a - b)$ et $(c - d)$ et égalons les résultats. Il vient, compte tenu de ce que $V + V' = \mathcal{P}$

$$\frac{a-b}{\lambda_3} = -6X - \varphi - \psi = k(4X + 2Y)$$

$$(2k+3)X + kY = -\frac{\varphi + \psi}{2}$$

$$\frac{c-d}{\lambda_3} = -k'(2Y + \delta\mathcal{P}l) = k(2X + 4Y)$$

$$kX + (2k+k')Y = -\frac{k'\delta\mathcal{P}l}{2}$$

et par suite :

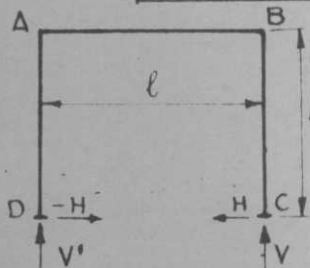
$$X = -\frac{(2k+k')(\varphi + \psi) - k'\delta\mathcal{P}l}{2N_1}$$

$$Y = \frac{k(\varphi + \psi) - (2k+3)k'\delta\mathcal{P}l}{2N_1}$$

$$Z = \frac{-(\varphi - \psi) + k'\delta(2\pi b - \mathcal{P}l)}{2N_2}$$

$$N_1 = (2k+3)(2k+k') - k'^2$$

$$N_2 = 6k + k' + 1 - 2k'\delta$$



Les poussées appliquées au portique en C et D sont égales en valeur absolue : soit H la poussée en C, comptée positivement vers la gauche.

$$Hh = C - B = Y - X$$

$$H = \frac{Y - X}{h} = \frac{(3k+k')(\varphi + \psi) - 3(k+1)k'\delta\mathcal{P}l}{2N_1 h}$$

On calculera, si nécessaire, les rotations et ε à partir des moments par les formules I et II. Il est intéressant d'expliciter ε , par exemple au moyen des deux premières formules I et II.

$$\frac{a}{\lambda_3} = -(3X + Z + \varphi) = \frac{\varepsilon}{\lambda_3} + k(2X + Y + 3Z)$$

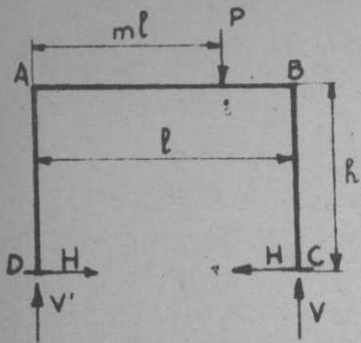
$$-\frac{\varepsilon}{\lambda_3} = \varphi + (2k+3)X + kY + (3k+1)Z$$

$$\varepsilon = -\lambda_3 \left[(3k+1)Z + \frac{\varphi - \psi}{2} \right]$$

Lorsque $\delta = 0$, une expression équivalente est $\varepsilon = \lambda_3(3k+k')Z$

Ces formules absolument générales sont applicables à un cas de charge quelconque appliqué à AB. Il suffit de calculer numériquement X, Y, Z et tout s'en déduit. Si nous explicitons plus loin les expressions de H, V et V', c'est pour permettre des vérifications éventuelles, ou, dans le cas (1), le tracé des lignes d'influence.

CHARGE UNIQUE P A L'ABSCISSE ml (1)



$$X = \frac{Pl}{2N_1} [kk'\delta - 3(2k+k')m(1-m)]$$

$$H = \frac{3Pl}{2N_1h} [-(k+1)k'\delta + (3k+k')m(1-m)]$$

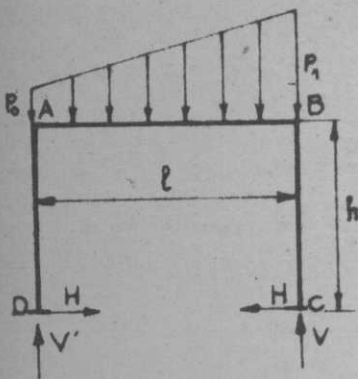
$$Y = -\frac{Pl}{2N_1} [(2k+3)k'\delta - 3km(1-m)]$$

$$V = Pm \left[1 - \frac{(1-m)(1-2m)}{N_2} \right] - \frac{k'\delta P(1-2m)}{N_2}$$

$$Z = -\frac{Pl(1-2m)}{2N_2} [k'\delta + m(1-m)]$$

$$V' = P(1-m) \left[1 + \frac{m(1-2m)}{N_2} \right] + \frac{k'\delta P(1-2m)}{N_2}$$

CHARGE A REPARTITION LINEAIRE SUR TOUTE LA TRAVERSE AB



$$X = -\frac{l^2(p_0+p_1)}{8N_1} [(2k+k') - 2kk'\delta]$$

$$H = \frac{l^2(p_0+p_1)}{8N_1h} [(3k+k') - 6(k+1)k'\delta]$$

$$Y = +\frac{l^2(p_0+p_1)}{8N_1} [k - 2(2k+3)k'\delta]$$

$$V = \frac{l}{6} (p_0+2p_1) + \frac{2Z}{l}$$

$$Z = -\frac{l^2(p_0-p_1)}{120N_2} [1+10k'\delta]$$

$$V' = \frac{l}{6} (2p_0+p_1) - \frac{2Z}{l}$$

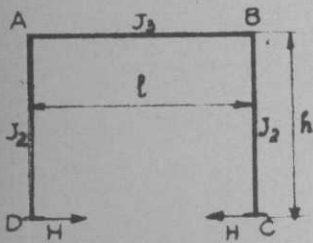
si $p_0 = p_1 = P$

$$A = B = -\frac{Pl^2}{4N_1} [(2k+k') - 2kk'\delta]; C = D = +\frac{Pl^2}{4N_1} [k - 2(2k+3)k'\delta]; H = \frac{Pl^2}{4N_1h} [(3k+k') - 6(k+1)k'\delta]; V = V' = \frac{Pl}{2}$$

3 - VARIATIONS LINÉAIRES

Considérons une variation de longueur uniforme des différents éléments du portique, définie par le coefficient α de variation de longueur unitaire.

Les encastremets D et C du portique ne se déplacent pas, la variation de longueur des piédroits ne produit aucun effort, et la variation de longueur de la traverse AB est αl



Par raison de symétrie, on aura $A = B$, $D = C$ et il suffit de considérer la moitié de gauche du portique

Le piédroit DA subit une rotation d'ensemble $\varepsilon = \frac{\alpha l}{2h}$ et les équations d'équilibre s'écrivent,

compte tenu de ce que V et V' sont nuls

$$\begin{cases} \text{en A dans AB} & a = -\lambda_3 \times 3A \\ \text{en D} & d = \lambda_1 D \end{cases}$$

$$DA \begin{cases} d - \varepsilon = -\lambda_2(2D + A) \\ a - \varepsilon = \lambda_2(D + 2A) \end{cases}$$

d'où, en éliminant a et d.

$$\begin{cases} (2k+3)A + kD = -\frac{\varepsilon}{\lambda_3} \\ kA + (2k+k)D = +\frac{\varepsilon}{\lambda_3} \end{cases}$$

$$\frac{\varepsilon}{\lambda_3} = \frac{3\alpha EJ_3}{h}$$

(1) On notera que, si δ n'est pas nul, les moments fléchissants aux angles ne sont pas nuls quand la charge est appliquée au droit des piédroits.

D'où, en posant comme plus haut :

$$N_1 = (2k+3)(2k+k) - k^2$$

$$A=B = -\frac{3\alpha EJ_3}{h} \times \frac{3k+k}{N_1}$$

$$D=C = +\frac{3\alpha EJ_3}{h} \times \frac{3k+3}{N_1}$$

$$H = \frac{3\alpha EJ_3}{h^2} \times \frac{6k+k'+3}{N_1}$$

Et la poussée a pour valeur $H = \frac{D-A}{h}$ soit

Le cas de figure correspond à $\alpha > 0$. Dans le cas contraire, on inversera le sens des flèches.

4 - PORTIQUE PARFAITEMENT ENCASTRÉ SUR SES APPUIS

$$k' = 0, \text{ d'où } N_1 = 3k(k+2)$$

$$N_2 = 6k+1$$

A - CHARGES HORIZONTALES SUR LES PIÉDROITS

$$\begin{aligned} A &= X+Z & C &= Y-Z' \\ B &= X-Z & D &= Y+Z' \end{aligned}$$

FORMULES GÉNÉRALES

$$X = -\frac{k}{6(k+2)} [-\varphi + 2\psi]$$

$$Z = \frac{k}{2(6k+1)} [3\pi\epsilon - (\varphi + \psi)]$$

$$Y = -\frac{1}{6(k+2)} [(2k+3)\varphi - k\psi]$$

$$Z' = -\left[\frac{\pi\epsilon}{2} - Z\right] = -\frac{1}{2(6k+1)} [(3k+1)\pi\epsilon + k(\varphi + \psi)]$$

$$H = \frac{\pi\epsilon}{2k} + \frac{Y-X}{h}$$

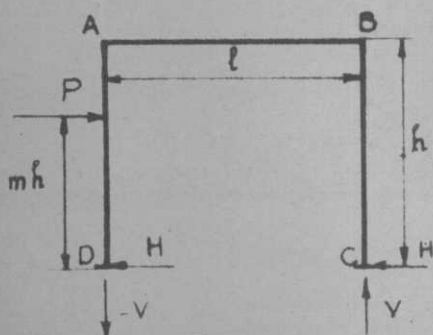
$$Y-X = -\frac{1}{2(k+2)} [(k+1)\varphi - k\psi]$$

$$H' = P-H$$

$$V = \frac{2Z}{l}$$

$$\epsilon = -\lambda_3 \left[(3k+1)Z - \frac{k}{2}(\pi\epsilon - \psi) \right]$$

CHARGE UNIQUE P A L'ORDONNÉE mh



$$X = -\frac{Phm^2(1-m)k}{2(k+2)}$$

$$Z = \frac{Phm^2 \cdot 3k}{2(6k+1)}$$

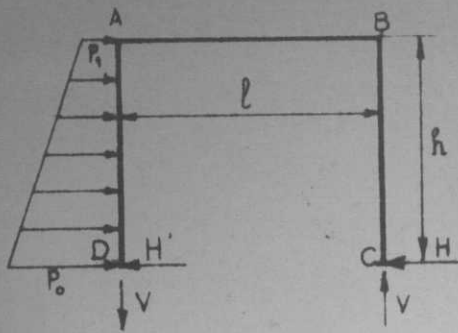
$$Y = -\frac{Phm(1-m)}{2} \left[1 - \frac{k+1}{k+2} m \right]$$

$$Z' = -\left[\frac{Phm}{2} - Z \right]$$

$$H = \frac{Pm^2}{2} \left[1 + \frac{(2k+1)(1-m)}{k+2} \right]$$

$$H' = P-H \quad V = \frac{2Z}{l}$$

$$\epsilon = -\frac{\lambda_3 Phm^2 k}{2} \left[-m + \frac{3(3k+1)}{6k+1} \right] \quad (\lambda_3 k = \lambda_2)$$



$$Z' = Z - \frac{h^2}{12} (P_0 + 2P_1)$$

$$H = \frac{h}{12} (P_0 + 2P_1) + \frac{Y-X}{h}$$

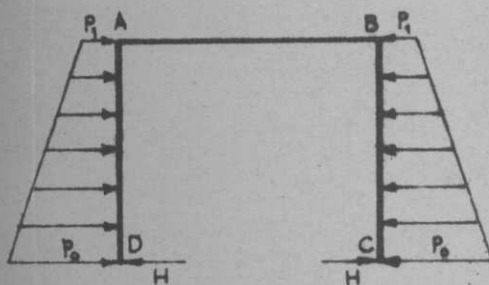
$$H' = \frac{h}{2} (P_0 + P_1) - H$$

$$V = \frac{2Z}{l}$$

	P_0	P_1	SI $P_0 = P_1 = P$
$X = -\frac{h^2}{120(k+2)}$	$2k$	$3k$	$X = -\frac{Ph^2}{24(k+2)} \times k$
$Y = -\frac{h^2}{120(k+2)}$	$3k+8$	$2k+7$	$Y = -\frac{Ph^2}{24(k+2)} [k+3]$
$Z = \frac{h^2}{24(6k+1)}$	$3k$	$9k$	$Z = \frac{Ph^2}{4(6k+1)} \times 2k$
$Z' = -\frac{h^2}{24(6k+1)}$	$9k+2$	$15k+4$	$Z' = -\frac{Ph^2}{4(6k+1)} [4k+1]$
$H = \frac{h}{40(k+2)}$	$3k+4$	$7k+11$	$H = \frac{Ph}{8} \frac{2k+3}{k+2}$
$\epsilon = -\frac{\lambda_3 h^2 k}{40(6k+1)}$	$9k+4$	$21k+11$	$\epsilon = -\frac{3\lambda_3 Ph^2 k(2k+1)}{8(6k+1)}$

CHARGES CONTINUES SYMETRIQUES SUR A D et B C

$$A = B = 2X, \quad C = D = 2Y, \quad V = 0, \quad \epsilon = 0$$



$$H = \frac{h}{6} (2P_0 + P_1) - \frac{D-A}{h}$$

	P_0	P_1	SI $P_0 = P_1 = P$
$A = B = -\frac{h^2}{60(k+2)}$	$2k$	$3k$	$A = B = -\frac{Ph^2}{12(k+2)} \times k$
$C = D = -\frac{h^2}{60(k+2)}$	$3k+8$	$2k+7$	$C = D = -\frac{Ph^2}{12(k+2)} [k+3]$
$H = +\frac{h}{20(k+2)}$	$7k+16$	$3k+9$	$H = \frac{Ph}{2} \left[1 + \frac{1}{2(k+2)} \right]$

B - CHARGES VERTICALES SUR LA TRAVERSE

$$\begin{matrix} A = X + Z & C = Y - Z \\ B = X - Z & D = Y + Z \end{matrix}$$

Les formules montrent que l'on a dans tous les cas :

$$Y = -\frac{X}{2}, \quad \text{d'où} \quad H = -\frac{3}{2} \frac{X}{h}$$

Les formules générales donnent toujours :

$$V = \frac{\pi G + 2Z}{l} \quad V = \mathcal{P} - V \quad \epsilon = 3k \lambda_3 Z = 3 \lambda_2 Z$$

Nous expliciterons donc seulement les valeurs de X et Z.

	Cas général	Cas 1	Cas 2	Cas 3
X	$-\frac{\varphi + \psi}{3(k+2)}$	$-\frac{Plm(1-m)}{k+2}$	$-\frac{l^2(P_0 + P_1)}{12(k+2)}$	$-\frac{pl^2}{6(k+2)}$
Z	$-\frac{\varphi - \psi}{2(6k+1)}$	$-\frac{Plm(1-m)(1-2m)}{2(6k+1)}$	$-\frac{l^2(P_0 - P_1)}{120(6k+1)}$	0

$$A = B = -\frac{3\alpha EJ_3}{h} \frac{1}{k+2}, \quad D = C = -\frac{k+1}{k} A, \quad H = \frac{3\alpha EJ_3}{h^2} \times \frac{2k+1}{k(k+2)}$$

5 PORTIQUE ARTICULÉ SUR SES APPUIS

Les résultats correspondants peuvent s'obtenir à partir des formules précédentes en faisant $\delta = 0$, puis en faisant tendre k' vers l'infini.

Si $k' \rightarrow \infty$ $\left\{ \begin{array}{l} N_1 \sim k(2k+3) \\ N_2 \sim k \end{array} \right. \quad Y=0, Z=0, C=0, D=0$

A - CHARGES HORIZONTALES SUR LES PIÉDROITS

$A = X + Z$	$C = 0$
$B = X - Z$	$D = 0$

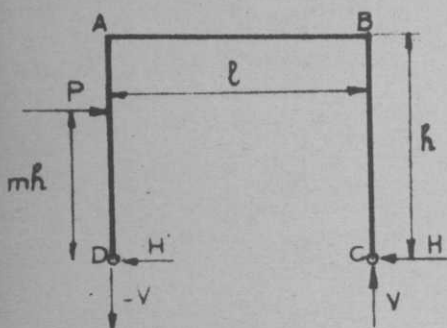
FORMULES GÉNÉRALES

$$X = -\frac{k\psi}{2(2k+3)} \quad Z = \frac{\pi}{2}$$

$$H = \frac{\pi b}{2h} - \frac{X}{h} = -\frac{B}{h} \quad V = \frac{\pi b}{l} \quad H' = P - H$$

$$\varepsilon = -\frac{\lambda^3}{2} [(2k+1)\pi + k\psi]$$

CHARGE UNIQUE P A L'ORDONNÉE mh



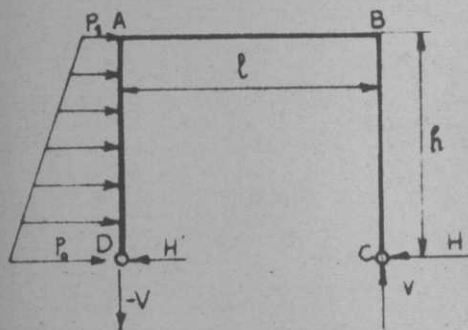
$$A = \frac{Phm}{2(2k+3)} [(k+3) + km^2]$$

$$B = -\frac{Phm}{2(2k+3)} [(3k+3) - km^2]$$

$$H = \frac{Pm}{2} \left[1 + \frac{k(1-m^2)}{2k+3} \right] \quad H' = P - H \quad V = \frac{Phm}{l}$$

$$\varepsilon = -\frac{\lambda^3}{2} Phm [(3k+1) - km^2]$$

CHARGE CONTINUE A REPARTITION LINEAIRE SUR TOUTE LA LONGUEUR A D.



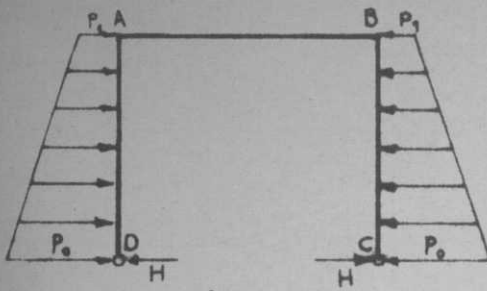
$$H = -\frac{B}{h} \quad H' = \frac{h}{2} (p_0 + p_1) - H$$

$$V = \frac{h^2}{6l} (p_0 + 2p_1)$$

	p_0	p_1	si $p_0 = p_1 = p$
$A = \frac{h^2}{120(2k+3)}$	$13k+30$	$4(8k+15)$	$A = \frac{ph^2}{8(2k+3)} (3k+6)$
$B = -\frac{h^2}{120(2k+3)}$	$3(9k+10)$	$12(4k+5)$	$B = -\frac{ph^2}{8(2k+3)} (5k+6)$
$H' = \frac{h}{40(2k+3)}$	$31k+50$	$24k+40$	$H' = \frac{ph}{8(2k+3)} (11k+18)$
$\varepsilon = -\frac{\lambda^3 h^2}{120}$	$27k+10$	$48k+20$	$\varepsilon = -\frac{\lambda^3 ph^2}{8} (5k+2)$

CHARGES CONTINUES SYMETRIQUES SUR A D et B C

$$A = B = 2X, \quad v = 0, \quad \varepsilon = 0$$



	P_0	P_1	SI $P_0 = P_1 = P$
$A = B = -\frac{P^2}{60(2k+3)}$	$7k$	$8k$	$A = B = -\frac{Ph^2k}{4(2k+3)}$
$H = \frac{h}{20(2k+3)}$	$11k+20$	$4k+10$	$H = \frac{3Ph(k+2)}{4(2k+3)}$

B - CHARGES VERTICALES SUR LA TRAVERSE

On a toujours

$$Y = 0, \quad Z = 0, \quad \text{d'où} \quad C = D = 0$$

$$A = B = X = -\frac{\psi + \Psi}{2(2k+3)} \quad \varepsilon = -\frac{\lambda_3}{2}(\psi - \Psi)$$

Les formules générales donnent toujours

$$H = -\frac{A}{k} \quad v = \frac{\pi b}{l} \quad v' = g - v$$

Nous expliciterons donc seulement les valeurs de $X = A = B$, et de ε

	Cas général	Cas 1	Cas 2	Cas 3
$X = A = B$	$-\frac{\psi + \Psi}{2(2k+3)}$	$-\frac{3Plm(1-m)}{2(2k+3)}$	$-\frac{l^2(P_0+P_1)}{8(2k+3)}$	$-\frac{Pl^2}{4(2k+3)}$
$\varepsilon = \lambda_3 x$	$-\frac{\psi - \Psi}{2}$	$-\frac{Plm(1-m)(1-2m)}{2}$	$-\frac{l^2}{120}(P_0 - P_1)$	0

C - VARIATIONS LINÉAIRES

$$A = B = -\frac{3\alpha EJ_3}{k} \frac{1}{2k+3}$$

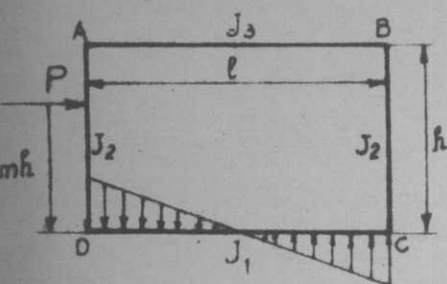
$$D = C = 0$$

$$H = -\frac{A}{k} = \frac{3\alpha EJ_3}{k^2} \frac{1}{2k+3}$$

TITRE II : CADRE REPOSANT SUR SA FACE INFÉRIEURE

1 - CHARGES HORIZONTALES SUR LES PIÉDROITS

Rappelons que nous désignons par A, B, C, D les moments fléchissants aux angles a, b, c, d et par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les rotations des barres aboutissant en ces points. Nous poserons :



$$\lambda_3 = \frac{l}{6EJ_3}$$

$$\lambda_2 = \frac{h}{6EJ_2}$$

$$\lambda_1 = \frac{l}{6EJ_1} \quad \alpha = \frac{\pi\theta}{10}$$

Après déformation, les droites DA et CB ont tourné d'un angle ξ (compté positivement dans le sens trigonométrique), et la traverse AB s'est déplacée horizontalement d'une quantité v (comptée positivement si elle correspond à un ξ positif, donc positivement vers la gauche): $V = \xi h$

Après déformation, les angles de la barre DA avec sa corde sont donc $d - \xi$ en D , et $a - \xi$ en A .

$$AB \quad \begin{cases} a = -\lambda_3 [2A + B] \\ b = +\lambda_3 [A + 2B] \end{cases}$$

$$DA \quad \begin{cases} d - \xi = \lambda_2 [-\psi - (2D + A)] \\ a - \xi = \lambda_2 [+ \psi + (D + 2A)] \end{cases}$$

$$CD \quad \begin{cases} c = \lambda_1 [-\alpha - (2C + D)] \\ d = \lambda_1 [-\alpha + (C + 2D)] \end{cases}$$

$$BC \quad \begin{cases} b - \xi = -\lambda_2 [2B + C] \\ c - \xi = +\lambda_2 [B + 2C] \end{cases}$$

Equations que nous classerons de la manière suivante.

	A	B	C	D	
$a = \lambda_3 \times$	-2	-1			
$b = \lambda_3 \times$	1	2			
$c = \lambda_1 \times$			-2	-1	$-\lambda_1 \alpha$
$d = \lambda_1 \times$			1	2	$-\lambda_1 \alpha$

I

	A	B	C	D	
$a - \xi = \lambda_2 \times$	2			1	$+\lambda_2 \psi$
$b - \xi = \lambda_2 \times$		-2	-1		
$c - \xi = \lambda_2 \times$		1	2		
$d - \xi = \lambda_2 \times$	-1			-2	$-\lambda_2 \psi$

II

En outre, les efforts tranchants dans les piédroits en A et B doivent s'équilibrer

$$\frac{\pi\theta}{h} + \frac{D-A}{h} = \frac{C-B}{h} \quad \text{ou} \quad A - B + C - D = \pi\theta \quad (1)$$

Nous prendrons comme inconnues auxiliaires les fonctions X, Y, Z, Z' définies par

$A = X + Z$
$B = X - Z$
$C = Y - Z'$
$D = Y + Z'$

L'équation (1) devient

$$Z - Z' = \frac{\pi\theta}{2} \quad (2)$$

et les équations I et II s'écrivent

	X	Y	Z	Z'	α
$a = \lambda_3 x$	-3		-1		
$b = \lambda_3 x$	3		-1		
$c = \lambda_1 x$		-3		1	-1
$d = \lambda_1 x$		3		1	-1

I

	X	Y	Z	Z'	φ	ψ
$a - \varepsilon = \lambda_2 x$	2	1	2	1		1
$b - \varepsilon = \lambda_2 x$	-2	-1	2	1		
$c - \varepsilon = \lambda_2 x$	1	2	-1	-2		
$d - \varepsilon = \lambda_2 x$	-1	-2	-1	-2	-1	

II

Formons, dans chacun des groupes I et II, la quantité $a + b - (c + d)$ et égalons les résultats. Il vient :

$$(6\lambda_2 + 2\lambda_3)Z + (6\lambda_2 + 2\lambda_1)Z' = 2\lambda_1\alpha - \lambda_2(\varphi + \psi) \quad (3)$$

équation qui, jointe à (2), donne Z et Z'.

Formons, dans chacun des groupes I et II, les quantités $a - b$ et $c - d$ et égalons les résultats. Il vient :

$$\left. \begin{aligned} a - b &= -6\lambda_3 x = \lambda_2(\varphi + 4x + 2Y) \\ c - d &= -6\lambda_1 y = \lambda_2(\varphi + 2x + 4Y) \end{aligned} \right\} \text{équations qui donnent X et Y} \quad (4)$$

(5)

Posons,

Les équations (3), (4), (5), qui sont homogènes en λ , s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} k' &= \frac{J_3}{J_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \\ k &= \frac{J_3}{J_2} \frac{h}{l} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \end{aligned} \right\}$$

$$(3k' + 1)Z + (3k' + k')Z' = k'\alpha - \frac{k}{2}(\varphi + \psi) \quad (3')$$

$$(2k + 3)x + kY = -\frac{k}{2}\varphi \quad (4')$$

$$kx + (2k + 3k')Y = -\frac{k}{2}\varphi \quad (5')$$

La résolution des équations 2, 3, 4, 5 donne, compte tenu de $\alpha = \frac{\pi G}{10}$

$$\left. \begin{aligned} X &= -\frac{k}{2N_1} [-k\varphi + (2k + 3k')\psi] & Z &= \frac{1}{2N_2} [(3k + 1.2k')\pi G - k(\varphi + \psi)] \\ Y &= -\frac{k}{2N_1} [(2k + 3)\varphi - k\psi] & Z' &= -\frac{1}{2N_2} [(3k - 0.2k' + 1)\pi G + k(\varphi + \psi)] \end{aligned} \right\} Z' = -(\frac{\pi G}{2} - Z)$$

avec $N_1 = (2k + 3)(2k + 3k') - k^2$

$N_2 = 6k + k' + 1$

On calculera, si nécessaire, les rotations à partir des moments par les formules I, et ε par l'une des formules II. Il est intéressant d'explicitier ε , en employant par exemple les deuxièmes formules I et II.

$$\varepsilon = \lambda_3(3X - Z) + \lambda_2(2X + Y - 2Z - Z')$$

$$\varepsilon = \lambda_3 \left[(2k + 3)x + kY - (2k + 1)Z - kZ' \right] = -\lambda_3 \left[+\frac{k}{2}\varphi + (2k + 1)Z + kZ' \right]$$

$$\varepsilon = -\lambda_3 \left[(3k + 1)Z - \frac{k}{2}(\pi G - \psi) \right]$$

Formule générale, qu'il n'est pas nécessaire de pousser plus loin.

Ces formules absolument générales permettent d'obtenir les efforts et les déformations dus à une charge à répartition quelconque s'étendant sur tout ou partie de la longueur A D.

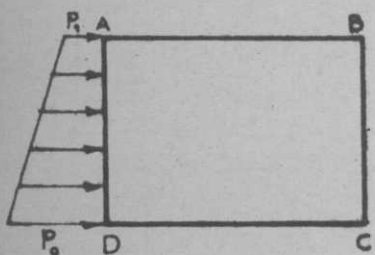
CHARGE UNIQUE P A L'ORDONNEE m h .

$$\begin{aligned}
 X &= -\frac{k}{2N_1} 3Phm(1-m) [k' + (k+k')m] & Z &= \frac{Phm}{2N_2} [1,2k' + 3km] \\
 Y &= -\frac{k}{2N_1} 3Phm(1-m) [(k+2) - (k+1)m] & Z' &= -\frac{Phm}{2N_2} [(6k - 0,2k' + 1) - 3km]
 \end{aligned}$$

$$N_1 = (2k+3)(2k+3k') - k^2 \qquad N_2 = 6k + k' + 1$$

$$\epsilon = -\frac{\lambda_3}{2} Phm \left[-km^2 + \frac{(3k+1)(1,2k'+3km)}{N_2} \right]$$

CHARGE CONTINUE A REPARTITION LINRAIRE SUR TOUTE LA LONGUEUR A D.



$$Z' = Z - \frac{h^2}{12} (p_0 + 2p_1)$$

	p_0	p_1
$X = -\frac{h^2 k}{40 N_1}$	$2k + 7k'$	$3k + 8k'$
$Y = -\frac{h^2 k}{40 N_1}$	$3k + 8$	$2k + 7$
$Z = +\frac{h^2}{40 N_2}$	$5k + 4k'$	$15k + 8k'$
$Z' = -\frac{h^2}{120 N_2}$	$45k - 2k' + 10$	$75k - 4k' + 20$

si $p_0 = p_1 = p$
$X = -\frac{Ph^2}{8N_1} k(k+3k')$
$Y = -\frac{Ph^2}{8N_1} k(k+3)$
$Z = +\frac{Ph^2}{10N_2} (5k+3k')$
$Z' = -\frac{Ph^2}{10N_2} (10k - 0,5k' + 2,5)$

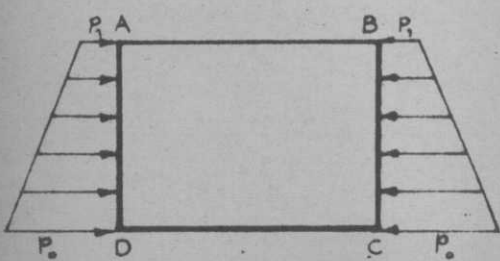
$$\epsilon = -\lambda_3 \left[(3k+1)Z - \frac{h^2}{40} (p_0 + 4p_1) \right]$$

$$\epsilon = -\lambda_3 \left[(3k+1)Z - \frac{kPh^2}{8} \right]$$

si $k' = 1$	$\epsilon = -\frac{\lambda_3 h^2}{80} \left[(3k+4)p_0 + (7k+8)p_1 \right]$
-------------	-----------------------------------------------------------------------------

$\epsilon = -\frac{\lambda_3 Ph^2}{40} (5k+6)$

CHARGES CONTINUES SYMETRIQUES SUR A D et B C .

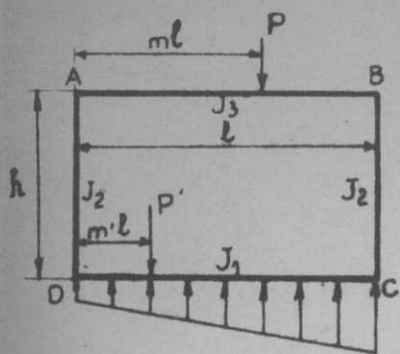


$$A = B = 2X \qquad C = D = 2Y \qquad \epsilon = 0$$

	p_0	p_1
$A = B = -\frac{h^2 k}{20 N_1}$	$2k + 7k'$	$3k + 8k'$
$C = D = -\frac{h^2 k}{20 N_1}$	$3k + 8$	$2k + 7$

si $p_0 = p_1 = p$
$A = B = -\frac{Ph^2}{4N_1} k(k+3k')$
$C = D = -\frac{Ph^2}{4N_1} k(k+3)$

Les notations étant les mêmes que pour les charges horizontales, nous désignerons par les lettres accentuées les quantités relatives à la traverse inférieure, soumise aux charges P' (ψ' s'applique à l'appui D, ψ à l'appui C).



$$\lambda_3 = \frac{l}{6EJ_3}$$

$$\lambda_2 = \frac{h}{6EJ_2}$$

$$\lambda_1 = \frac{l}{6EJ_1}$$

Nous poserons en outre :

$$\alpha = \frac{2Pl + \pi c}{10}$$

$$\alpha' = \frac{2P'l + \pi c'}{10}$$

$$\beta = \frac{3Pl - \pi c}{10}$$

$$\beta' = \frac{3P'l - \pi c'}{10}$$

Il est rappelé que P, P', π, π' sont positifs pour des charges agissant de haut en bas.

$$AB \begin{cases} a = \lambda_3 [-\psi - (2A + B)] \\ b = \lambda_3 [\psi + (A + 2B)] \end{cases}$$

$$DA \begin{cases} d - \varepsilon = -\lambda_2 [A + 2D] \\ a - \varepsilon = \lambda_2 [2A + D] \end{cases}$$

$$CD \begin{cases} c = \lambda_1 [+ \psi' - \alpha' - \alpha - (2C + D)] \\ d = \lambda_1 [-\psi' + \beta' + \beta + (C + 2D)] \end{cases}$$

$$BC \begin{cases} b - \varepsilon = -\lambda_2 [2B + C] \\ c - \varepsilon = \lambda_2 [B + 2C] \end{cases}$$

Equations que nous classerons de la manière suivante :

	A	B	C	D	
$a = \lambda_3 \times$	-2	-1			$-\lambda_3 \psi$
$b = \lambda_3 \times$	1	2			$+\lambda_3 \psi$
$c = \lambda_1 \times$			-2	-1	$+\lambda_1 [\psi' - \alpha' - \alpha]$
$d = \lambda_1 \times$			1	2	$+\lambda_1 [-\psi' + \beta' + \beta]$

I

	A	B	C	D	
$a - \varepsilon = \lambda_2 \times$	2				1
$b - \varepsilon = \lambda_2 \times$		-2	-1		
$c - \varepsilon = \lambda_2 \times$		1	2		
$d - \varepsilon = \lambda_2 \times$	-1				-2

II

En outre, la somme des efforts tranchants dans les piédroits en A et B équilibre la composante horizontale des forces extérieures appliquées à A B, soit 0. Donc

$$A - B + C - D = 0$$

Si nous prenons les mêmes inconnues auxiliaires que sous l'action des forces horizontales, l'équation ci-dessus conduit à $Z = Z'$. Nous poserons donc

$A = X + Z$
$B = X - Z$
$C = Y - Z$
$D = Y + Z$

et les équations I et II s'écrivent :

	X	Y	Z	φ	ψ	$-\varphi'$ $+\beta'+\beta$	ψ' $-\alpha'-\alpha$
$a = \lambda_3 \times$	-3		-1	-1			
$b = \lambda_3 \times$	3		-1		1		
$c = \lambda_1 \times$		-3	1				1
$d = \lambda_1 \times$		3	1			1	

I

	X	Y	Z
$a - \varepsilon = \lambda_2 \times$	2	1	3
$b - \varepsilon = \lambda_2 \times$	-2	-1	3
$c - \varepsilon = \lambda_2 \times$	1	2	-3
$d - \varepsilon = \lambda_2 \times$	-1	-2	-3

II

Formons, dans chacun des groupes I et II, la quantité $(a + b) - (c + d)$ et égalons les résultats. Il vient, en posant, comme plus haut :

$$k' = \frac{J_3}{J_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_3}$$

$$k = \frac{J_3}{J_2} \frac{h}{l} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3}$$

$$[2Z + \varphi - \psi] + k' [2Z - \alpha + \beta - \alpha' + \beta' - \varphi' + \psi'] = -12kZ$$

$$Z = -\frac{1}{2N_2} \left\{ k'(\beta - \alpha) + \varphi - \psi + k'[\beta' - \alpha' - (\varphi' - \psi')] \right\}$$

$$\text{avec } N_2 = 6k + k' + 1$$

Formons, dans chacun des groupes I et II, les quantités $a - b$ et $c - d$ et égalons les résultats. Il vient :

$$\frac{a-b}{\lambda_3} = -6X - \varphi - \psi = k(4X + 2Y)$$

$$\frac{c-d}{\lambda_3} = k'[-6Y + \varphi' + \psi' - (\alpha' + \beta') - (\alpha + \beta)] = k(2X + 4Y)$$

$$\begin{cases} (2k+3)X + kY = -\frac{G}{2} \\ kX + (2k+3k')Y = \frac{k'}{2}H \end{cases} \quad \text{en posant } \begin{cases} G = \varphi + \psi \\ H = (\varphi' + \psi') - (\alpha' + \beta') - (\alpha + \beta) \end{cases}$$

$$X = -\frac{1}{2N_1} [(2k+3k')G + k'kH]$$

$$Y = +\frac{1}{2N_1} [k(2k+3)H + kG]$$

$$N_1 = (2k+3)(2k+3k') - k^2$$

On calculera, si nécessaire, les rotations et ε à partir des moments par les formules I et II. Il est intéressant d'explicitier ε , par exemple au moyen des deux premières formules I et II.

$$\frac{a}{\lambda_3} = -(3X + Z + \varphi) = \frac{\varepsilon}{\lambda_3} + k(2X + Y + 3Z)$$

$$-\frac{\varepsilon}{\lambda_3} = \varphi + (2k+3)X + kY + (3k+1)Z = +(3k+1)Z + \frac{\varphi - \psi}{2}$$

$$\varepsilon = -\lambda_3 \left[(3k+1)Z + \frac{\varphi - \psi}{2} \right]$$

Formule générale qu'il n'est pas nécessaire de pousser plus loin.

Les formules ci-dessus résolvent le problème. Elles sont absolument générales et permettront, comme plus haut, le calcul des efforts et déformations produits par des surcharges à répartition quelconque couvrant tout ou partie des traverses A B et C D.

CHARGE UNIQUE P A L'ABSCISSE $m l$ SUR LA TRAVERSE SUPERIEURE (1)

$$\begin{aligned} \psi &= P l m (1-m)(2-m) & \alpha &= \frac{P l}{10} (2+m) \\ \psi &= P l m (1-m)(1+m) & \beta &= \frac{P l}{10} (3-m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{P l}{4 N_1} [k k' - 6(2k+3k')m(1-m)] & Z &= -\frac{P l (1-2m)}{2 N_2} [0,1k' + m(1-m)] \\ Y &= \frac{P l}{4 N_1} [k'(2k+3) - 6k m(1-m)] & \epsilon &= -\lambda_3 \frac{P l (1-2m)}{2} \left\{ m(1-m) - \frac{(3k+1)[0,1k' + m(1-m)]}{N_2} \right\} \end{aligned}$$

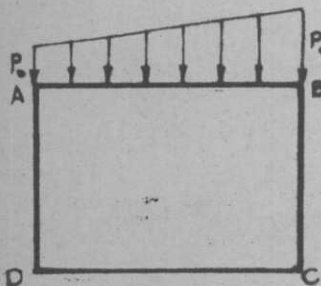
$$\begin{aligned} N_1 &= (2k+3)(2k+3k') - k^2 & N_2 &= 6k+k'+1 & \epsilon &= -\lambda_3 \frac{P l (1-2m)}{2 N_2} \left\{ [3k+k'] [m(1-m) - 0,1k'] - 0,1k'(1-k') \right\} \end{aligned}$$

CHARGE UNIQUE P' A L'ABSCISSE $m' l$ SUR LA TRAVERSE INFERIEURE (1)

$$\begin{aligned} \psi' &= P' l m' (1-m')(2-m') & \alpha' &= \frac{P' l}{10} (2+m') \\ \psi' &= P' l m' (1-m')(1+m') & \beta' &= \frac{P' l}{10} (3-m') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{P' l}{4 N_1} k k' [1 - 6m'(1-m')] & Z &= -\frac{P' l (1-2m')}{2 N_2} k [0,1 - m'(1-m')] \\ Y &= \frac{P' l}{4 N_1} k'(2k+3) [1 - 6m'(1-m')] & \epsilon &= -\lambda_3 (3k+1) Z \end{aligned}$$

CHARGE A REPARTITION LINEAIRE SUR TOUTE LA TRAVERSE A B



$$\begin{aligned} \psi = \beta &= (8P_0 + 7P_1) \frac{l^2}{60} & \psi = \alpha &= (7P_0 + 8P_1) \frac{l^2}{60} & G = -H &= (P_0 + P_1) \frac{l^2}{4} \\ X &= -\frac{l^2}{8 N_1} (P_0 + P_1) [(2k+3k') - k k'] & Z &= -\frac{l^2}{120 N_2} (P_0 - P_1) (1+k) \\ Y &= -\frac{l^2}{8 N_1} (P_0 + P_1) [k'(2k+3) - k] & \epsilon &= -\lambda_3 \frac{l^2}{40 N_2} (P_0 - P_1) k (1-k) \end{aligned}$$

($\lambda_3 k = \lambda_2$)

si $P_0 = P_1 = P$ $Z=0$ $\epsilon=0$

$$\begin{cases} A=B = -\frac{P l^2}{4 N_1} [(2k+3k') - k k'] \\ C=D = -\frac{P l^2}{4 N_1} [k'(2k+3) - k] \end{cases}$$

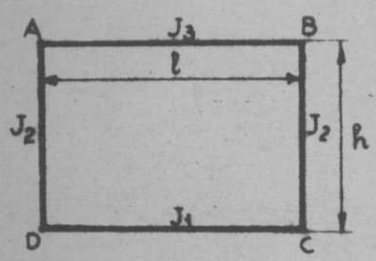
(1) On notera que les moments fléchissants aux angles ne sont pas nuls quand la charge est appliquée au droit des piédroits.

CHARGE A REPARTITION LINEAIRE SUR TOUTE LA TRAVERSE D C.

Les charges étant en tous points égales aux réactions du terrain, efforts et déformations sont nuls partout. Il n'en serait pas de même si la charge n'était pas à répartition linéaire.

3 - VARIATIONS LINÉAIRES

Une variation de longueur uniforme des différents éléments du cadre ne produit aucun effort dans celui-ci. On peut avoir à envisager une variation différentielle de longueur des deux traverses, qui sont placées dans des conditions différentes, la traverse inférieure étant enterrée.



Une telle variation est définie par le coefficient différentiel β de variation de longueur unitaire ; les réactions du terrain sur DC, qui équilibrent la force extérieure, sont nulles ; par raison de symétrie, on a $A = B$, $D = C$ et il suffit de considérer la moitié gauche du cadre.

Le piedroit DA subit une rotation d'ensemble $\epsilon = \frac{\beta l}{2h}$ et les équations d'équilibre s'écrivent :

en A dans AB $a = -\lambda_3 \cdot 3A$
 en D dans DC $d = \lambda_1 \cdot 3D$

DA $\left\{ \begin{array}{l} d - \epsilon = -\lambda_2(2D + A) \\ a - \epsilon = \lambda_2(D + 2A) \end{array} \right.$

D'où en éliminant a et d

$$(2k+3)A + kD = -\frac{\epsilon}{\lambda_3}$$

$$kA + (2k+3k)D = +\frac{\epsilon}{\lambda_3}$$

$$\frac{\epsilon}{\lambda_3} = \frac{3\beta EJ_3}{h}$$

D'où, en posant comme plus haut :

$$N_1 = (2k+3)(2k+3k) - k^2$$

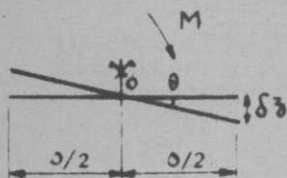
$$A = B = -\frac{9\beta EJ_3}{h} \times \frac{k+k}{N_1}$$

$$D = C = +\frac{9\beta EJ_3}{h} \times \frac{k+1}{N_1}$$

ANNEXE I

ROTATION D'UNE SEMELLE FONDEE SUR TERRAIN MEUBLE.

Considérons une semelle indéformable reposant sur du terrain meuble. Soit b la largeur de la semelle ; nous ferons le calcul pour une longueur de semelle égale à l'unité.



Le système des forces extérieures appliquées à la semelle peut être réduit à une force F passant par le centre O de la semelle, et à un couple M . M est donc le moment des forces extérieures par rapport au centre de la semelle.

La force F étant centrée ne produit aucune rotation de la semelle. La rotation θ de celle-ci est donc due uniquement à M .

Le terrain étant supposé élastique, sa déformation verticale δz en un point est proportionnelle à la contrainte n en ce point. Le rapport $\gamma = \frac{n}{\delta z}$ (qui a la dimension d'un poids spécifique) est le module de réaction du terrain. ⁽¹⁾ Il caractérise l'aptitude de celui-ci à se déformer sous les contraintes : plus il est grand, moins le terrain se déforme sous une contrainte donnée.

L'abaissement δz d'un bord de la semelle sous l'effet de M est :

$$\delta z = \theta \frac{b}{2} = \frac{n}{\gamma} = \frac{6M}{\gamma b^2}$$

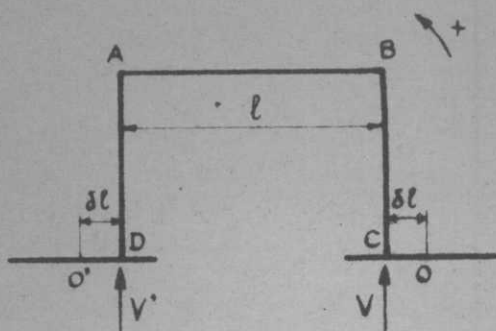
D'où

$$\frac{\theta}{M} = \frac{12}{\gamma b^3}$$

Ce rapport, qui sera désigné par λ_1 , caractérise la flexibilité de l'encastrement partiel réalisé par la fondation sur terrain meuble.

(1) Le problème est en réalité beaucoup plus complexe, car pour un terrain donné, γ dépend des dimensions de la semelle, et en particulier de son rayon moyen. Mais l'influence des rotations des semelles sur les efforts dans un portique est en fait relativement faible ; on peut donc se contenter d'une théorie simplifiée, et de valeurs approchées de γ .

ROTATION DE LA SEMELLE DE FONDATION D'UN PORTIQUE



Le portique est symétrique, mais les bases D et C des piédroits ne sont pas nécessairement aux milieux O' et O des semelles de fondation correspondantes.

La distance $\delta l = O'D = OC$ sera comptée négativement si O et O' sont à l'extérieur du portique (cas de la figure) et positivement dans le cas contraire.

Soient V et V' les efforts verticaux appliqués au portique en C et D (comptés positivement vers le haut).

C et D les moments fléchissants dans les piédroits en C et D, comptés positivement s'ils tendent la face intérieure du portique.

Les moments M et M' des forces extérieures par rapport à O et O' étant comptés positivement s'ils tendent à faire tourner les semelles dans le sens trigonométrique, on a dans tous les cas :

$$M = - (C + V \delta l)$$

$$M' = + (D + V' \delta l)$$

et les rotations des semelles, donc des piédroits, en C et D sont

$$c = - \lambda_1 (C + V \delta l)$$

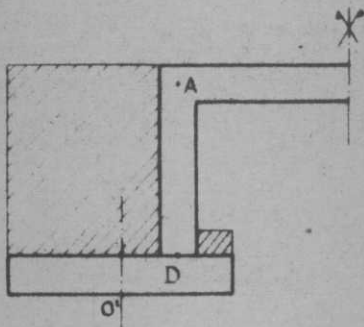
$$d = + \lambda_1 (D + V' \delta l)$$

ANNEXE II

EFFORTS PRODUITS PAR LE POIDS DES TERRES

Pour le portique fondé sur semelles- ce qui est toujours le cas - il y a lieu de calculer en outre les efforts produits dans le portique par le poids des terres situées au droit des semelles (indépendamment des efforts dus à la poussée de ces terres s'exerçant directement sur les piédroits, efforts qui ont été calculés plus haut). Ce poids n'étant pas centré sur la semelle lui impose en effet une rotation qui se transmet à la base du piédroit.

Les deux semelles étant identiques et également chargées, le système est symétrique, $B = A$, $C = D$, et il suffit de considérer la moitié de gauche du portique.



Par convention, nous admettrons que les terres agissant directement sur la semelle sont limitées par les rectangles hachurés. Soit μ le moment de leurs poids par rapport au centre de la semelle : μ tend toujours, pour la semelle gauche, à la faire tourner dans le sens positif. μ sera considéré comme positif.

Le moment des forces extérieures appliquées à la semelle, par rapport au centre de celle-ci, est $M = \mu + D$. La rotation de la semelle, donc celle du piédroit en D est par suite :

$$d = \lambda_1 (\mu + D)$$

et les équations d'équilibre s'écrivent :

$$DA \quad \begin{cases} \text{en D} & \lambda_1 (\mu + D) = \lambda_2 (-2D - A) & (1) \\ \text{en A} & a = \lambda_2 (D + 2A) & (2) \end{cases}$$

$$\text{en A dans AB} \quad a = \lambda_3 (-2A - B) = -\lambda_3 \times 3A \quad (3)$$

$$\text{Les équations (2) et (3) donnent : } \lambda_2 (D + 2A) + 3\lambda_3 A = 0 \quad (4)$$

et en divisant par λ_3 , les équations (4) et (1) deviennent :

$$\begin{aligned} k(D + 2A) + 3A = 0 & \quad (2k + 3)A + kD = 0 \\ k(\mu + D) + k(2D + A) = 0 & \quad \text{ou} \quad kA + (2k + k')D = -k'\mu \end{aligned}$$

D'où, en posant comme plus haut :

$$N_1 = (2k + 3)(2k + k') - k^2$$

$$\begin{array}{l} A = \frac{k k' \mu}{N_1} \\ D = \frac{(2k + 3) k' \mu}{N_1} \end{array} \quad H = \frac{D - A}{h} = \frac{3(k + 1) k' \mu}{N_1 h}$$

Si la fondation est sur rocher, elle ne tourne pas et les efforts dans le portique sont nuls. Les formules permettent de retrouver ce fait, puisqu'alors $k' = 0$.

