

H507



S. E. T. R. A.
Bureau
de Documentation

H507

**Analyse de la stabilité
des voûtes en maçonnerie
et en béton non armé
par le calcul à la rupture**

par Jean - Michel DELBECQ

Division des Ouvrages d'Art

Département E T G O T

Arrondissement T 3

Septembre 1980

L'analyse de la stabilité des voûtes en maçonnerie ou en béton non armé repose sur le concept de calcul à la rupture, mode de raisonnement pratiqué par les Ingénieurs et dont la mise en oeuvre intuitive remonte à plusieurs siècles. Pour ce problème particulier, on peut citer en effet LAHIRE au début du XVIIIème siècle (théorie du coin de LAHIRE 1712), EYTELWEIN qui a développé cette théorie du coin dans son Manuel de Statique (XVIIIème siècle) et surtout COULOMB (1773) qui a introduit la notion de joint de rupture; MERY(1839), SCHEFFLER (1857), A. DURAND CLAYE (1867-1880) ont développé cette idée au XIXème siècle; ceci a été montré clairement par des auteurs comme KOOHARIAN (1953), HEYMAN (1966), MASSONNET et SAVE.

En fait, on constate qu'au XIXème siècle, les Savants et Ingénieurs ont adopté des modes de raisonnements de deux types, très différents :

- les uns considèrent un comportement élastique du matériau constituant la voûte (NAVIER en est le précurseur),
- les autres adoptent un raisonnement du type calcul à la rupture (COULOMB, MERY, SCHEFFLER, A. DURAND CLAYE).

Toutefois, ces derniers ont mêlé à la fois des considérations de statique (possibilité d'équilibre) et de cinématique (mécanisme de rupture par blocs) et il ne se dégage pas de leur théorie une signification claire des résultats. HEYMAN (1966) a montré que le calcul de la stabilité d'une voûte en maçonnerie relève de l'analyse limite mais il qualifie l'approche de "statiquement admissible". En fait, nous montrerons que cette approche est une approche par l'extérieur (ou de façon impropre cinématiquement admissible) au sens de la théorie du calcul à la rupture mise en forme récemment (SALENCON - 1976 -1978). Cette théorie a fait l'objet d'applications à des problèmes (par exemple COUSSY et SALENCON 1979). Citons ce dernier article :

"On y (la théorie du calcul à la rupture) montre d'une façon générale que pour un ouvrage ou une structure donnés, dans une géométrie fixée, la seule connaissance en chaque point du système du domaine de résistance du matériau constitutif, domaine invariable dans le temps assigné en chaque point à l'état de contrainte, permet de définir l'ensemble des chargements dont on peut affirmer avec certitude, que, quelles que soient les autres propriétés du matériau, il ne sera pas possible de réaliser l'équilibre de l'ouvrage sans violer le "critère de résistance" et son complémentaire : l'ensemble des chargements potentiellement supportables.

L'ensemble des chargements potentiellement supportables par l'ouvrage peut être déterminé par deux méthodes, mathématiquement duales l'une de l'autre : approche par l'intérieur, par la construction de champs de contraintes en équilibre et respectant le critère de résistance ; approche par l'extérieur, par la construction de champs de vitesses et le calcul dans ceux-ci de la "puissance dissipable".

Nous demandons au lecteur soucieux d'approfondir ces notions de se reporter aux ouvrages cités en référence.

Cette théorie est à la base du calcul de la stabilité des voûtes en maçonnerie ou en béton non armé. Le problème posé est le suivant : pour un ouvrage donné de géométrie fixée, constitué d'un matériau caractérisé par un critère de résistance, déterminer si l'ouvrage est stable ou instable, le chargement étant constitué par le poids propre de l'ouvrage et des charges extérieures appliquées à la surface de l'extrados. Il ne sera possible que de déterminer les cas d'instabilité certaine et un coefficient de rupture et non de sécurité (COUSSY - SALENCON 1979).

Nous présentons ici une méthode d'approche de ce problème et une analyse sommaire des méthodes de calcul existantes, du type "calcul à la rupture". Nous précisons que l'approche duale de cette méthode fait l'objet d'un travail de fin d'études à l'Ecole Polytechnique et donne des résultats très satisfaisants.

Le texte sera organisé en quatre parties :

La première partie (chapitres 1, 2 et 3) présente la théorie générale de l'étude de la stabilité d'une voûte et l'application des lignes de centres de pression à cette théorie.

La seconde partie (chapitre 4 et 5) décrit certaines propriétés des lignes de centres de pression nécessaires au calcul de la stabilité et donne la méthode "des lignes internes" mise au point pour étudier cette stabilité.

La troisième partie (chapitre 6) est une brève analyse de quelques méthodes de calcul de stabilité de voûte.

La quatrième partie (chapitre 7) donne quelques exemples d'application numérique et la comparaison avec des essais de rupture de voûte.

Nous précisons que les chapitres 1, 2 sont "calqués" dans leur enchaînement logique sur le chapitre 2 de l'article de COUSSY et SALENCON (1979), ce qui s'impose puisque le mode de raisonnement est tout à fait identique.

1 ETUDE DE LA STABILITE D'UNE VOUTE

1.1. Position du problème

On se propose d'étudier la stabilité d'une voûte :

- de géométrie respectant les caractères définis au 1.11,
- dont le (s) matériau (x) constitutif (s) obéit aux critères de résistance définis en 1.12,
- soumise à un chargement respectant les caractères définis au 1.13.

1.11. Géométrie

La voûte est définie par la trace de son contour dans un plan vertical longitudinal : ce contour y définit l'extrados et l'intrados. Ces deux lignes sont concaves et peuvent présenter des points anguleux, en général à la clé de la voûte (figures 1 et 2). Les sections transversales de la voûte sont rectangulaires. Cette voûte repose sur ses extrémités (ou retombées) sur les maçonneries des piles ou des culées qui en sont donc un prolongement. On considèrera des voûtes inarticulées.

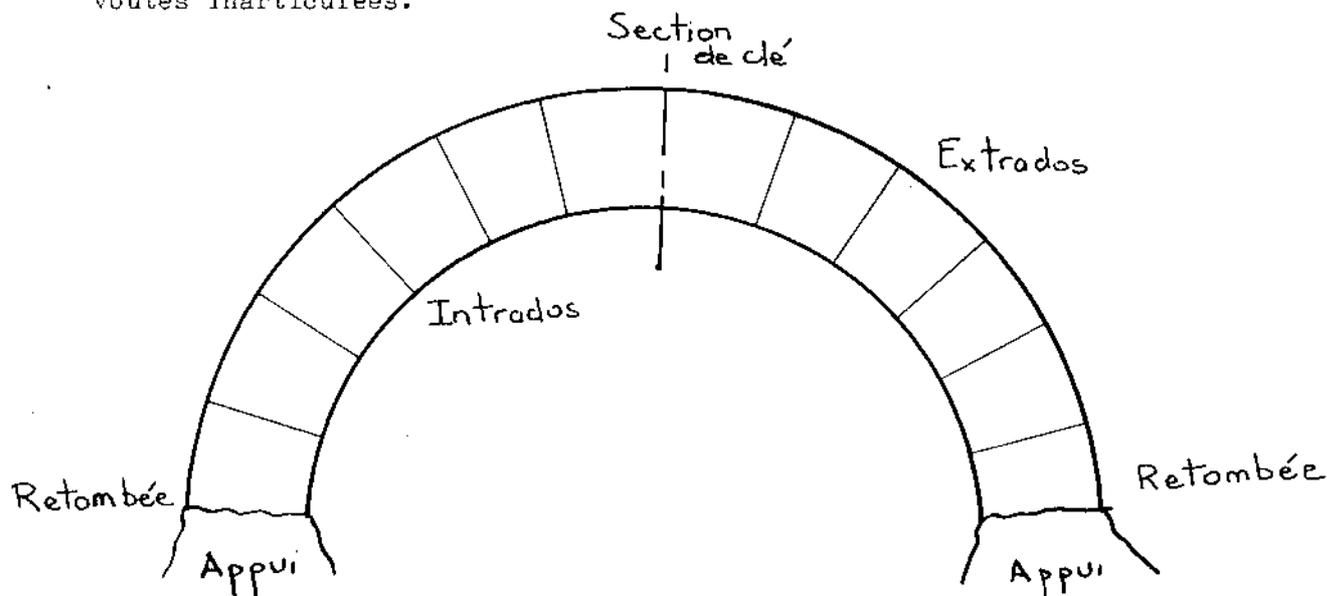


FIGURE 1

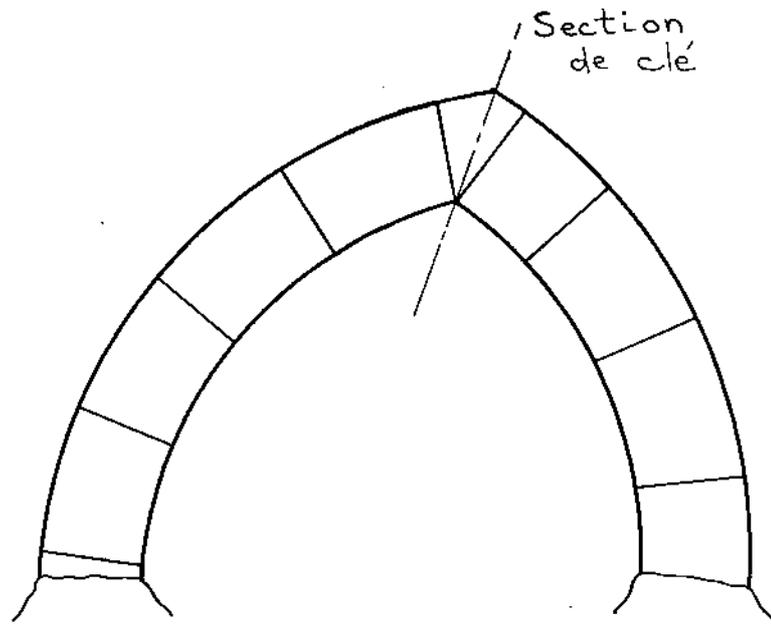


FIGURE 2

Voûte présentant un pont
anguleux à la clé

1.12 Matériau (x)

La voûte est soit constituée d'un matériau homogène isotrope (cas d'une voûte en béton non armé), soit de pierres homogènes isotropes séparées par des joints secs ou en mortier (le mortier est alors homogène isotrope).

Les critères de résistance que nous adopterons seront donc les suivants.

- Matériau(x) homogène(s) isotrope(s) (béton, pierre, mortier):

Si σ_i , $i = 1$ à 3 sont les contraintes principales du tenseur des contraintes, le critère de rupture, que l'on dénommera critère de traction-compression est $f(\underline{\sigma}) = \sup_{i=1,2,3} \sigma_i (\sigma_i - \sigma_0)$, autrement dit le matériau n'a pas de résistance à la traction et a une résistance à la compression égale à σ_0 . Nous adoptons ici les conventions de signe habituelles en résistance des matériaux : la facette sur laquelle agit le vecteur contrainte est repérée par sa normale rentrante n : les compressions sont alors comptées positivement.

Le critère est représenté dans l'espace des contraintes principales par un cube de côté σ_0 .

Il est aussi représenté dans le plan du cercle de MOHR par un cercle de diamètre σ_0 (figure 3).

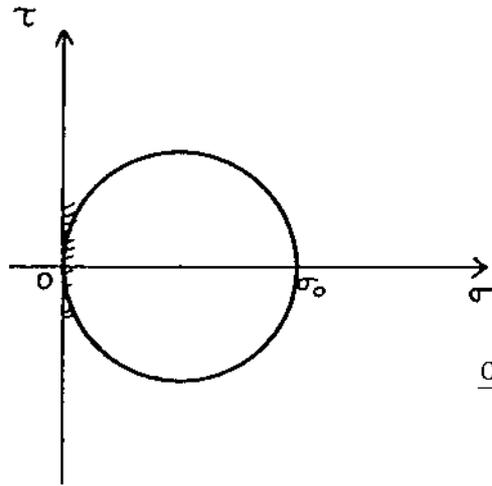


FIGURE 3

Critère de traction-compression

On notera donc que σ_0 n'est pas nécessairement constant dans la voûte (par exemple pierres et joints en mortier).

- joints ou interfaces :

On a affaire à un critère d'interface de COULOMB entre deux matériaux obéissant au critère précédent avec des limites en compression égales ou non .

Le critère s'écrit alors, si l'on pose $g(\underline{T}) = \text{Sup}(|\tau| - \sigma \text{tg} \varphi) / (|\tau| + \sqrt{\sigma(\sigma_0 - \sigma)})$ où φ est l'angle de frottement sec de COULOMB, $g(\underline{T}) \leq 0$ et \underline{T} a son extrémité à l'intérieur du cercle de MOHR de diamètre σ_0 soit dans le plan de ce cercle :

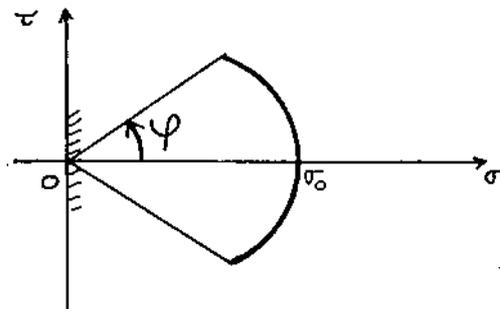


FIGURE 4

Critère d'interface de COULOMB

On peut éventuellement introduire une cohésion C.

1.13 Chargement

La voûte est soumise à des charges volumiques, surfaciques ou concentrées, définies par leur densité. Si l'on se place dans le plan de section longitudinale, ce chargement est donc défini par une densité $q(s)$ où s est par exemple l'abscisse curviligne sur l'extrados (q est pris au sens des distributions).

.../

Ce sera par exemple les forces de pesanteur, les charges dues à la présence d'un remblai, les surcharges routières ou ferroviaires. Nous ne nous préoccupons pas ici de savoir comment est "calculé" ce chargement.

Dans la plus grande partie de cet exposé, nous serons amenés à nous limiter à un certain type de chargement pour aboutir à des résultats pratiques.

Ces restrictions sont les suivantes :

- Les forces verticales sont orientées vers le bas (elles sont négatives).
- Les forces horizontales sont orientées vers la clé (elles sont positives à gauche de la section de clé, négatives à droite de cette section).

Ceci exclut :

- Le cas des forces horizontales concentrées à la clé.
- Le cas de forces de freinage.

Ce cas de chargement est très courant dans la pratique : les forces horizontales proviennent de la présence de voûtes secondaires d'élégissement, les forces verticales sont les forces de pesanteur. Le chargement sera noté (Q).

1.14 Ecriture du problème

- . Etant donné la géométrie de la voûte,
- . Etant donné le (ou les) critère de résistance du (ou des) matériau du type défini au 1.13,
- . Etant donné le chargement (Q) auquel est soumise la voûte.
- . Est-il possible que la voûte soit stable ?

1.2. Chargement potentiellement supportable - Voûte potentiellement stable

Si une telle voûte est stable, c'est qu'il existe dans toute la voûte un état de contrainte $\underline{\sigma}$ qui :

- | | |
|---|--|
| A | <ol style="list-style-type: none"> 1 - Respecte les conditions aux limites sur le contour de la voûte. 2 - Respecte les équations d'équilibre en tout point. 3 - Respecte les critères de résistance en tout point. |
|---|--|

On peut dire que, pour que la voûte soit stable sous le chargement (\underline{Q}), il est nécessaire qu'il existe au moins un état de contraintes respectant les trois conditions A1, 2, 3.

Il ne s'agit que d'une condition nécessaire car si cet état de contrainte existe, on ne pourra pas affirmer la stabilité de la voûte. On a donc ici la notion bien connue dans la théorie du calcul à la rupture de stabilité potentielle : une voûte pour laquelle cette condition est remplie est dite potentiellement stable. On dit aussi que le chargement est potentiellement supportable.

Il résulte de la théorie du calcul à la rupture que l'ensemble des chargements (\underline{Q}) potentiellement supportables est un domaine convexe, le domaine de résistance "local" étant lui-même convexe.

2 TRANSFORMATION DU PROBLEME

2.1. Définitions

On appelle famille de "sections" et on notera $\mathcal{F} = (S_i)_{i \in I}$ un ensemble de sections transversales S_i de la voûte, coupant à la fois l'extrados et l'intrados. Pour des raisons évidentes de commodité de langage, on confondra la section S_i et sa trace sur le plan longitudinal vertical.

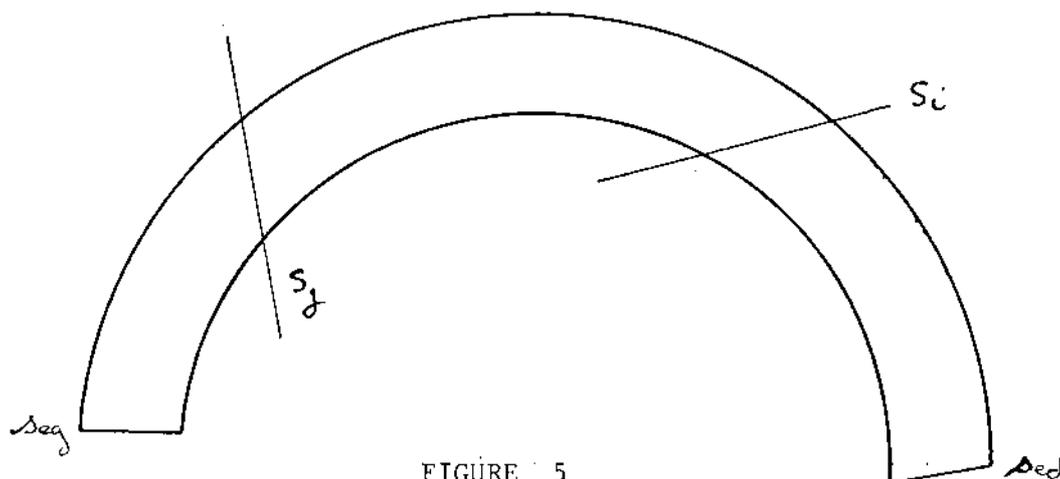


FIGURE 5

Sections

Ces sections peuvent avoir entre elles des points d'intersection à l'intérieur de la voûte.

L'ensemble d'indexation I peut être fini ou infini et dans ce cas dénombrable ou non dénombrable. Par exemple, ce peut être :

- Si I est fini : l'ensemble des entiers de 1 à N .
- Si I est infini non dénombrable, le segment (seg, sed) où seg et sed sont les abscisses curvilignes des extrémités gauche et droite de l'extrados mesurées à partir de la clé de voûte.

Une sous famille $\mathcal{F}' = (S_j)_{j \in J}$ de la famille $\mathcal{F} = (S_i)_{i \in I}$ est sous ensemble de \mathcal{F} c'est-à-dire : $\forall j \in J \exists i \in I$ et $S_j = S_i$

On verra dans la suite de l'exposé que l'on considèrera en général des sections normales à l'intrados (à l'exception toutefois des zones situées au voisinage d'un point anguleux). Dans ce cas, on appellera ces sections des joints par analogie avec les joints des voûtes en maçonnerie.

Du fait de la concavité des courbes d'intrados, ces joints constituent une partition de la voûte en blocs ou "voussoirs". Les joints ne présentent pas, en effet, de point d'intersection à l'intérieur de la voûte (sauf au droit d'un point anguleux à l'intrados où ils se coupent en ce point).

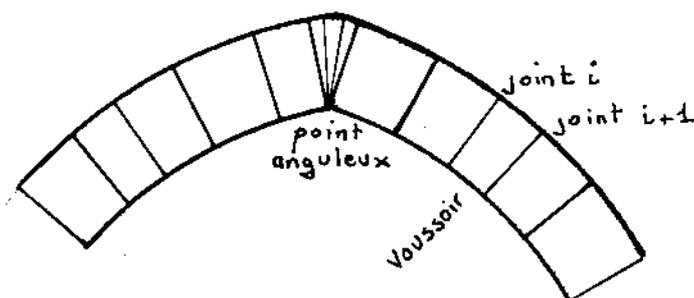


FIGURE 6

Cas d'une voûte ogivale

Si une telle famille de joints $\mathcal{F} = (S_i)_{i \in I}$ est indexée par l'ensemble $I = [s_{eg}, s_{ed}]$ mentionné ci-dessus, la réunion des sections S_i est le domaine intérieur à la voûte. Une famille finie de joints est une sous-famille finie de cette famille.

2.2. Première condition de stabilité affaiblie

Pour qu'une voûte soit stable sous le chargement (Q) il faut donc qu'il existe un état de contraintes $\underline{\sigma}$ respectant les conditions A.1.23. Il est donc nécessaire qu'en chaque point des sections S_i d'une famille \mathcal{F} , il existe un tel état de contraintes.

Il en résulte:

- Pour que la voûte soit stable sous le chargement (Q), il est nécessaire qu'il existe sur chaque section S_i de la famille une répartition de contraintes normale et tangentielle $\underline{\sigma}$ et $\underline{\tau}$ telle que chaque bloc limité par deux sections consécutives S_i et S_{i+1} soit en équilibre sous l'action du chargement appliqué à ce bloc et telle qu'elle respecte les conditions de résistance définies au 1.13.

Cette condition est un affaiblissement des conditions A.1.23 : un chargement (Q) pour lequel cette condition est satisfaite pour une famille \mathcal{F} de sections S_i n'est pas nécessairement potentiellement supportable. Par contre, il n'est certainement pas supportable si cette condition n'est pas satisfaite.

On peut donc affirmer que si l'on trouve un chargement (Q) pour lequel cette condition affaiblie n'est pas satisfaite, alors (Q) est à l'extérieur du domaine convexe des chargements potentiellement supportables. Pour obtenir un tel chargement (Q), il faut donc rechercher la valeur maximale du chargement pour laquelle cette condition est satisfaite.

En outre, on devrait rechercher, pour obtenir la meilleure majoration, la famille \mathcal{F} de sections Si la plus défavorable, c'est-à-dire celle qui donne le plus petit majorant.

Il est clair que si \mathcal{F}' est une sous famille de \mathcal{F} , le majorant obtenu avec \mathcal{F}' est supérieur au majorant obtenu avec \mathcal{F} .

On retrouve ici des raisonnements tout-à-fait analogues à ceux utilisés dans le calcul à la rupture appliqué à la mécanique des sols (COUSSY et SALENCON 1979, méthode des tranches, ...).

2.3. Transformation du problème - Deuxième condition de stabilité affaiblie

Soit un chargement (Q) tel que la condition de stabilité affaiblie soit vérifiée pour une famille \mathcal{F} . Sur une section Si de cette famille, il existe donc une répartition de contraintes normale et tangentielle σ et τ respectant les critères de résistance.

Introduisons les contraintes généralisées :

- N effort normal,
- T effort tangent,
- M moment fléchissant.

définies par :

$$- N = \int_S \sigma dS$$

$$- T = \int_S \tau dS$$

$$- M = \int_S \sigma Y dS$$

(Y distance algébrique au centre de gravité de la section).

On montre de façon classique en calcul à la rupture que :

- pour qu'il existe une répartition de contraintes normales σ et tangentielle τ sur la section S respectant le critère de résistance de traction-compression, il est nécessaire que N et M respectent l'inéquation.

$$(2.1) \quad |M| \leq N h \left(1 - \frac{N}{\sigma_0 S}\right)$$

où h est la demi épaisseur de la section et S sa section.

- pour qu'il existe une répartition de contraintes normales σ et tangentielle τ sur la section S respectant le critère de frottement $(g(I) = \text{Sup}\{(|\tau| - \sigma \text{tg}\varphi), (|\tau| - \sqrt{\sigma(\sigma_0 - \sigma)})\})$, il est nécessaire que N et T respectent l'inéquation.

$$(2.2) \quad |T| \leq N \text{tg}\varphi$$

On trouvera en annexe 1 la démonstration de ces deux propositions. Ces inéquations sont représentées aux figures 7 et 8.

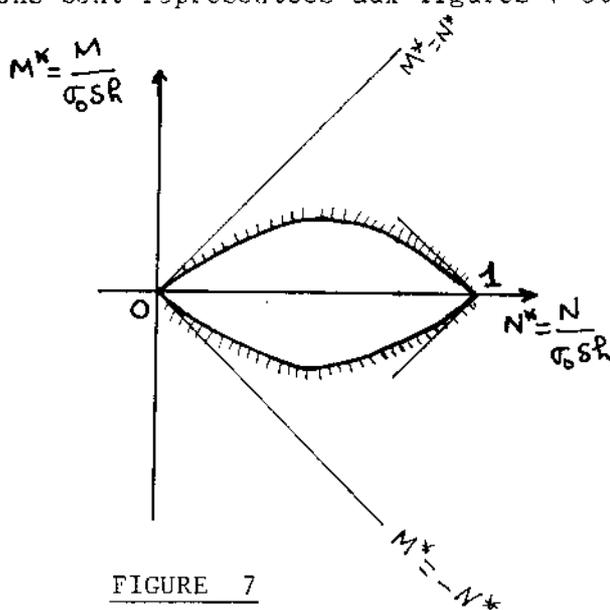


FIGURE 7

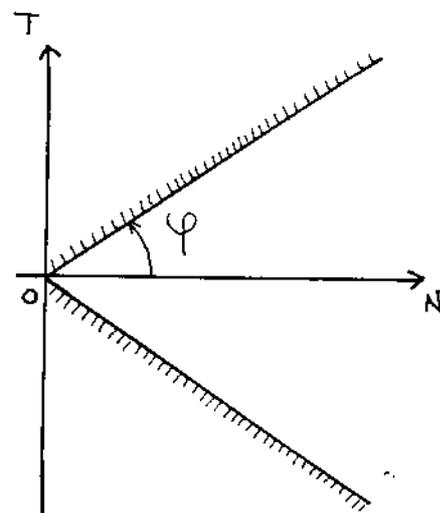


FIGURE 8

On notera que si le critère de traction-compression est affaibli en un critère de traction seul, on obtient l'inégalité.

$$(2.3) \quad |M| \leq N h$$

représentée par l'angle de deux droites $M^* = + N^*$.

Il vient alors de façon évidente la deuxième condition de stabilité affaiblie.

Pour que la voûte soit stable sous le chargement (Q), il est nécessaire que chaque section Si d'une famille \mathcal{G} soit soumise à des contraintes généralisées N, T, M, qui respectent les équations d'équilibre et les inéquations 2.1 et/ou 2.2 selon la section considérée.

Cette condition est un nouvel affaiblissement de la condition précédente en raison de la non équivalence des critères en contraintes généralisées et en contraintes. On peut en fait montrer (voir annexe 1) qu'il y a équivalence entre le critère en contraintes généralisées N et M (2.1) et l'existence d'une répartition de contraintes normale et tangente σ et τ sur la section respectant le critère de traction-compression mais cette propriété n'est pas utile puisque l'on fait ici une approche par l'extérieur de la stabilité.

Il est clair que si cette nouvelle condition n'est pas satisfaite pour un chargement (Q), celui-ci ne sera certainement pas supportable. La valeur maximale de (Q) pour laquelle cette condition est satisfaite constitue donc un chargement extérieur au convexe des chargements potentiellement supportables.

2.4 Coefficient de rupture

Il est clair que le chargement (Q) nul est potentiellement supportable. Il est alors commode pour analyser la stabilité d'une voûte d'introduire le coefficient

$$F = \frac{(Q)_{\text{extrême}}}{(Q)}$$

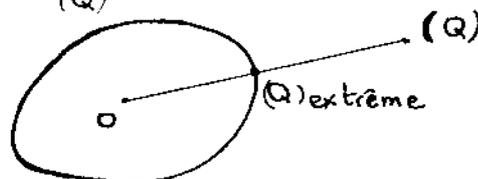


FIGURE 9

Coefficient de ruptur

- . Si $F < 1$: l'équilibre de la voûte en géométrie initiale est impossible.
- . Si $F > 1$: la voûte est potentiellement stable sous le chargement (Q).

Il est alors évident que le chargement maximal (Q) respectant la deuxième condition de stabilité affaiblie fournira un majorant

$$F_+ \text{ de } F : F_+ = \frac{(Q)_+}{(Q)}$$

On aura donc a fortiori :

- . Si $F_+ < 1$ l'équilibre de la voûte en géométrie initiale est impossible.

3 INTERPRETATION GEOMETRIQUE - LIGNES DE CENTRES DE PRESSION

3 1 - Définitions

Soit \mathcal{F} une famille de sections $(S_i)_{i \in I}$ d'une voûte soumise à un chargement (Q) . Les familles \mathcal{F} considérées à partir de ce chapitre seront des familles de joints. Il n'est toutefois pas nécessaire de considérer des joints pour définir une ligne de centres de pression.

Soit un joint S_i : sur ce joint s'exercent des contraintes normale et tangentielle qui déterminent :

- un effort normal N_i ,
- un effort tangent T_i ,
- un moment fléchissant M_i ,

Ces sollicitations peuvent être représentées par :

- leur résultante \underline{R}_i de composantes normale N_i et tangentielle T_i ,
- le point d'application de \underline{R}_i sur le joint S_i noté C_i et appelé centre de pression sur le joint (figure 10).

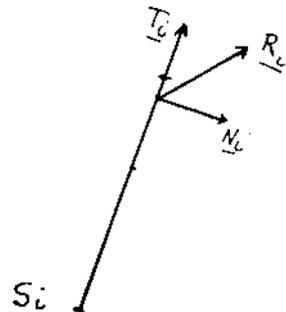


FIGURE 10

La ligne des centres de pression associée à la famille \mathcal{F} est la ligne qui joint l'ensemble des points $C_i, i \in I$. Cette ligne ne doit pas être confondue avec la ligne des pressions qui est la ligne enveloppe des résultantes \underline{R}_i .

- Lorsque I est un ensemble fini, c'est une ligne polygonale.
- Lorsque I est le segment (seg, sed), c'est une courbe paramétrée en s , abscisse curviligne de l'extrados, qui peut avoir des discontinuités en présence de forces concentrées.

.../

3.2. - Interprétation géométrique de la deuxième condition de stabilité affaiblie

La position du centre de pression C_i sur le joint S_i de milieu I_i , d'épaisseur $2h_i$ est donnée par $I_i C_i = \frac{M_i}{N_i}$

Or la condition 2.1. s'écrit encore :

$$(3.1) \quad \cdot I_i C_i = \frac{|M_i|}{N_i} \leq h_i \left(1 - \frac{N_i}{\sigma_0 S_i} \right) \quad \text{si } N_i > 0$$

$$\cdot I_i C_i \leq h_i \quad \text{si } N_i = 0$$

Elle signifie donc que le centre de pression C_i ne doit pas être "trop loin" du milieu du joint, cette distance étant d'autant plus faible que N_i est grand. En outre, N_i doit être positif. On peut aussi mettre cette condition sous la forme :

$$\begin{aligned} \cdot \text{Si } N_i > 0 \quad N_i &\leq N(C_i) = \sigma_0 S_i \left(1 - \frac{I_i C_i}{h_i} \right) \\ \cdot \text{Si } N_i = 0 \quad I_i C_i &\leq h_i \end{aligned}$$

La traduction graphique de cette condition est donnée à la figure 11.

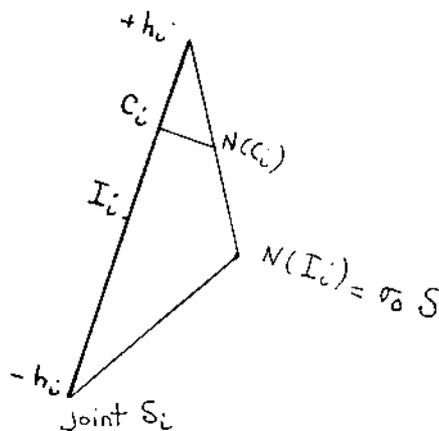


FIGURE 11

Effort normal extrême

En particulier, si σ_0 est infini, alors elle s'écrit $\frac{|M_i|}{N_i} \leq h_i$ et $N_i > 0$, ce qui signifie que le centre de pression doit se trouver à l'intérieur de la voûte et que l'effort normal sur le joint S_i doit être positif.

La deuxième condition 2.2. s'écrit :

$$(3.2.) \quad |T_i| \leq N_i \tan \varphi$$

Elle signifie que R_i ne doit pas être inclinée à plus de l'angle φ sur la normale \underline{n}_i au joint S_i .

La deuxième condition de stabilité affaiblie s'écrit alors : "pour que la voûte soit stable sous le chargement (Q) , il est nécessaire que pour une famille \mathcal{F} quelconque de joints, il existe au moins une ligne de centres de pression associée à cette famille qui satisfasse aux conditions 3.1. et/ou 3.2. (selon les joints)".

En particulier, si l'on ne s'intéresse qu'au critère de résistance en traction, il est nécessaire que cette ligne de centres de pression soit interne à la voûte sur chaque joint de la famille et que les efforts normaux correspondants soient tous des efforts de compression. Le chargement (Q) maximal pour lequel cette condition est satisfaite est à l'extérieur du domaine convexe des chargements potentiellement supportables.

Nous sommes donc amenés à nous intéresser aux propriétés des lignes de centres de pression associées à une famille de joints. C'est l'objet du chapitre suivant où nous montrerons qu'il est simple de répondre à la question :

Etant donné une voûte de géométrie fixée dont le matériau constitutif n'a pas de résistance à la traction et soumise à un chargement (Q) , est-il possible de trouver une ligne de centres de pression interne à la voûte ?

Si la réponse à cette question est positive, nous montrerons qu'il est possible de traiter le cas d'une résistance à la compression finie et du frottement aux joints de la maçonnerie.

4. PROPRIETES DES LIGNES DE CENTRES DE PRESSION

Nous présenterons dans un premier temps des propriétés générales qui résultent des équations d'équilibre de la voûte et ensuite nous utiliserons ces propriétés pour introduire les notions de poussées maximale et minimale et caractériser les lignes de centres de pression correspondantes. Ces propriétés seront établies comme il a déjà été dit au 1.13. pour des chargements symétriques ou non par rapport à la clé de voûte, tels que :

- Les charges verticales sont négatives,
- les charges horizontales sont négatives (resp. positives) pour la partie de voûte située à droite (resp. à gauche) de la clé.

A notre connaissance, certaines propriétés de caractérisation des lignes de poussée horizontale maximale et minimale ont été données par SCHEFFLER (1857) : il s'agit des propriétés de tangence à l'extrados et à l'intrados de ces lignes et leur démonstration n'a été donnée que dans le cas de charges verticales et de façon précise pour un chargement symétrique. La démonstration de ces propriétés est alors directe mais le problème est plus délicat lorsque l'on considère des chargements dissymétriques : nous avons donc abordé le problème de façon différente, ce qui permet d'obtenir des propriétés générales qui s'appliquent aux chargements symétriques. En outre, on obtient ainsi des algorithmes simples de calcul. C'est pourquoi nous présenterons ici l'ensemble de la démarche suivie.

Enfin, la famille de joints que nous considérerons pour établir ces propriétés sera la famille de joints indexée par le segment (seg, sed) (Cf.2.1.). En particulier, quand nous dirons qu'une ligne de centres de pression est interne à la voûte, cela signifiera qu'elle est interne aux joints de cette famille.

4.1 - Notion de poussée horizontale.

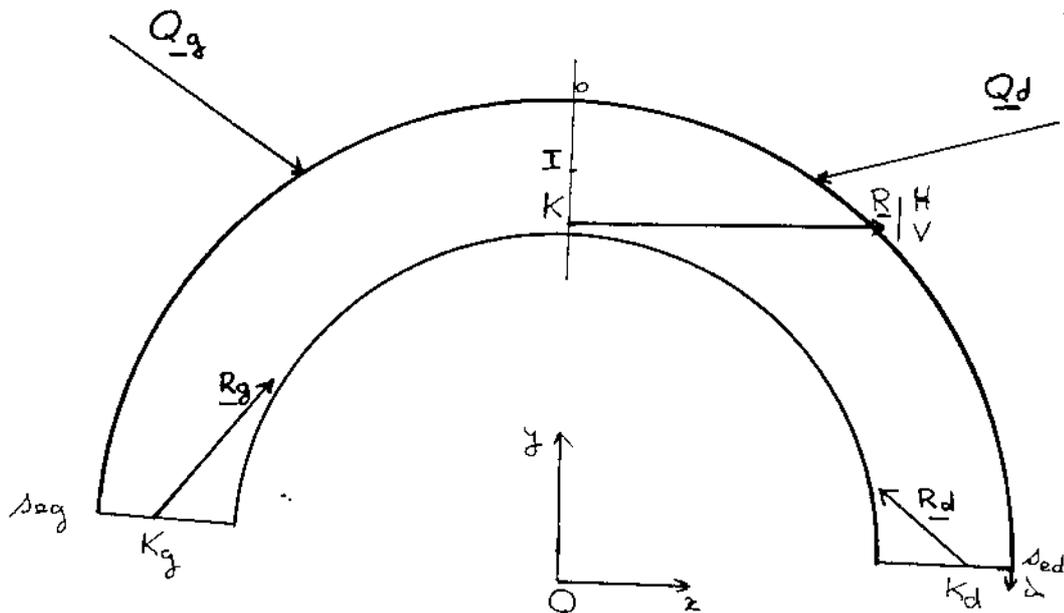


FIGURE 12

Equilibre de la voûte

Soit une voûte soumise à un chargement Q défini par sa densité (au sens des distributions) $q(s) = (q_h(s), q_v(s))$, où s est l'abscisse curviligne sur l'extrados. Les éléments de réduction en O :

.../

- du torseur des efforts appliqués sur la demi-voûte de gauche sont $\underline{Q}_g = (Q_{gh}, Q_{gv})$ et $M_{g_0} \underline{k}$.

- du torseur des efforts appliqués sur la demi-voûte de droite sont $\underline{Q}_d = (Q_{dh}, Q_{dv})$ et $M_{d_0} \underline{k}$,
soient $\underline{R}_g = (R_{gh}, R_{gv})$ la réaction d'appui sur la retombée de la demi-voûte de gauche, passant par K_g et $\underline{R}_d = (R_{dh}, R_{dv})$ la réaction d'appui sur la retombée de la demi-voûte de droite, passant par K_d .

L'équilibre des deux demi-voûtes de droite et de gauche s'écrit, si l'on appelle H , V , M les efforts normal et tangent et le moment fléchissant s'exerçant sur le joint de clé (où I est le milieu de ce joint)

$$\begin{array}{l} \text{Demi-voûte} \\ \text{de gauche} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} R_{gh} + Q_{gh} = H \\ R_{gv} + Q_{gv} = V \\ (\underline{I}K_g \wedge \underline{R}_g) \cdot \underline{k} + M_{g_0} + (\underline{I}O \wedge \underline{Q}_g) \cdot \underline{k} = -M \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{Demi-voûte} \\ \text{de droite} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} R_{dh} - Q_{dh} = -H \\ R_{dv} - Q_{dv} = -V \\ (\underline{I}K_d \wedge \underline{R}_d) \cdot \underline{k} - M_{d_0} - (\underline{I}O \wedge \underline{Q}_d) \cdot \underline{k} = M \end{array} \right.$$

On obtient donc un système de 6 équations linéaires à 9 inconnues : la voûte est donc une structure 3 fois hyperstatique, comme il est bien connu. Il suffit de se donner H , V , M à la clé pour définir un état d'équilibre et une ligne de centres de pression. Il revient au même de donner le centre de pression K à la clé et les efforts normal et tangent H et V .

La résultante des efforts à la clé, de composante H et V , sera notée \underline{R} .

L'effort normal à la clé est appelé poussée horizontale de la voûte.

Ces équations n'impliquent pas la nullité de l'effort tangent à la clé dans le cas d'un chargement symétrique. Ce n'est que par raison de symétrie que les auteurs annulent V . Nous ne ferons pas cette simplification.

.../

4.2. - Propriétés générales

4.2.1 - Points communs à deux lignes de centres de pression

L'ensemble des points d'intersection de deux lignes de centres de pression distinctes appartient à une droite.

DEMONSTRATION

Soient 2 lignes de centres de pression définies par K_1, H_1, V_1 et K_2, H_2, V_2 .

Deux cas sont à considérer :

1 - Il existe un point K appartenant au joint de clé tel que $\underline{KK_1} \wedge \underline{R_1} = \underline{KK_2} \wedge \underline{R_2}$ (soit $\underline{KK_1} \cdot H_1 = \underline{KK_2} \cdot H_2$)
Alors si les deux lignes ont un point d'intersection C , ce point vérifie nécessairement l'égalité.

$$\underline{CK_1} \wedge \underline{R_1} = \underline{CK_2} \wedge \underline{R_2}$$

$$\text{D'où } \underline{CK} \wedge \underline{R_1} = \underline{CK} \wedge \underline{R_2} \text{ ou } \underline{CK} \wedge (\underline{R_1} - \underline{R_2}) = \underline{0}$$

. Si $K_1 \neq K_2$, $\underline{R_1} \neq \underline{R_2}$ alors \underline{CK} est parallèle au vecteur $\underline{\Delta}$ différence entre $\underline{R_1}$ et $\underline{R_2}$ d'où la conclusion

. Si $K_1 = K_2 = K$, la conclusion est évidemment identique si les lignes sont distinctes

2 - Il n'existe pas de point K appartenant au joint de clé tel que $\underline{KK_1} \wedge \underline{R_1} = \underline{KK_2} \wedge \underline{R_2}$: dans ce cas, on a $K_1 \neq K_2$ et $H_1 = H_2$.

. Si $\underline{R_1} = \underline{R_2}$, les égalités précédentes montrent que s'il existe un point d'intersection C , $\underline{CK_1} \wedge \underline{R_1} = \underline{CK_2} \wedge \underline{R_1}$, et $\underline{K_1K_2} \wedge \underline{R_1} = \underline{0}$. On en déduit que $H_1 = H_2 = 0$ et que C se trouve sur la droite verticale portant le joint de clé. Donc il n'existe pas de point d'intersection.

. Si $\underline{R_1} \neq \underline{R_2}$, il existe un point K' n'appartenant pas au joint de clé où les lignes d'action de $\underline{R_1}$ et $\underline{R_2}$ se recoupent.

S'il existe un point d'intersection C des deux lignes, ce point vérifie nécessairement $\underline{CK'} \wedge (\underline{R_1} - \underline{R_2}) = \underline{0}$, $(\underline{R_1} - \underline{R_2})$ étant un vecteur $\underline{\Delta}$ de ligne d'action verticale passant par K' : C se trouve donc sur la verticale de K' .

REMARQUE 1 :

Nous serons amenés à ne considérer que des lignes compressives, c'est à dire vérifiant $H \gg 0$. Dans ces conditions, le point K considéré ici ne sera jamais entre K_1 et K_2 .

REMARQUE 2 :

Si le point K' se trouve sur la direction du joint de clé, alors le point C est unique s'il existe.

REMARQUE 3 :

Soient deux lignes de centres de pression (K_1, H_1, V_1) et (K_2, H_2, V_2) se coupant en un point C et telles que $R_2 = R_1 + \Delta$. Soient C1 et C2 les centres de pression sur un joint. Le point d'intersection K' des lignes d'action de R_1 et R_2 , résultantes sur ce joint, se trouve sur la droite (K, Δ) . En effet $K'C_1 \wedge R_1 = K'C_2 \wedge R_2 = 0$ par définition de C1 et C2.

$$\text{Or } K'C_1 \wedge R_1 = K'K \wedge R_1 + M \quad \text{et} \quad K'C_2 \wedge R_2 = K'K \wedge R_2 + M$$

$$\text{D'où } K'K \wedge (R_2 - R_1) = K'K \wedge \Delta = 0. \text{ CQFD.}$$

4.2.2. - Propriété de tangence à la clé - Distinction entre une ligne des centres de pression et une ligne des pressions

S'il n'existe pas de force horizontale concentrée appliquée au voisinage de la clé, (cette possibilité est exclue par les chargements que nous considérons) la ligne de centres de pression (K, H, V) est tangente à la droite de pente V/H et passant par K à la clé (joint vertical).

DEMONSTRATION

Cette propriété résulte directement de l'équation différentielle définissant la ligne des centres de pression au voisinage d'un de ses points C :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V_c}{H_c} - \left(\lim_{x \rightarrow x_c} \eta \right) \frac{dQ_H(x_c)}{dx} + \left(\lim_{x \rightarrow x_c} \xi \right) \frac{dQ_V(x_c)}{dx}$$

où ξ et η sont les coordonnées du point d'intersection de la ligne d'action des forces appliquées à la voûte avec la courbe extradoss (l'équation est écrite dans le repère (Ox, Oy)). Si le joint est vertical, $\lim_{x \rightarrow x_c} \xi = 0$ et si Q_H est constant, donc s'il n'y a pas de force horizontale appliquée au voisinage de C, alors $\frac{dy}{dx} = \frac{V_c}{H_c}$.

Ceci montre bien la différence entre la ligne des centres de pression et la ligne des pressions, enveloppe des résultantes sur les différents joints.

4.23 - Positions relatives de deux lignes de centres de pression distinctes

Soient deux lignes de centres de pression distinctes et compressives. Si elles ont au moins un point d'intersection, ceux-ci sont alignés sur la droite (K, Δ) définie au 4.21.

. Si $H_1 > H_2$, la ligne (K_1, H_1, V_1) se trouve plus proche de la droite (K, Δ) que la ligne (K_2, H_2, V_2) .

. Si $H_1 = H_2$ et $K_1 = K_2$, le seul point d'intersection est K_1 et si $V_1 > V_2$, la ligne (K_1, H_1, V_1) est au-dessus de la ligne (K_2, H_2, V_2) .

DEMONSTRATION

Soient deux lignes de centres de pression (K_1, H_1, V_1) et (K_2, H_2, V_2) qui ont au moins un point d'intersection.

Il est clair que si les deux lignes sont partout compressives :

- si la droite d'intersection (K, Δ) n'est pas tangente à l'une des lignes, les deux lignes ne sont pas tangentes au point d'intersection,
- si la droite d'intersection (K, Δ) est tangente à l'une des lignes, elle est tangente à l'autre ligne

En effet, si les deux lignes sont compressives, les deux lignes sont dans un même demi plan limité par la droite (K, Δ) .

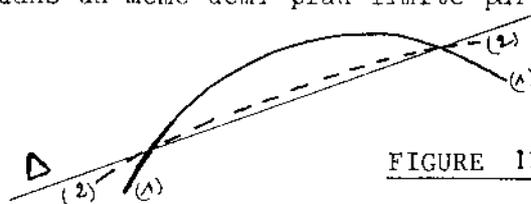


FIGURE 13

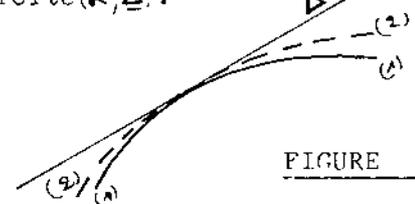


FIGURE 14

Il en résulte que les positions relatives de deux lignes par rapport à leur droite d'intersection Δ sont fixées par leurs positions relatives à la clé.

3 cas sont à distinguer :

1) - $K_1 \neq K_2$ et $H_1 \neq H_2$

Les deux lignes étant compressives à la clé, H_1 et H_2 sont positifs et on a par définition du point K.

$$\overline{KK_1} \cdot H_1 = \overline{KK_2} \cdot H_2$$

Il en résulte que la ligne la plus proche de la droite (K, Δ) est celle de plus grande poussée horizontale.

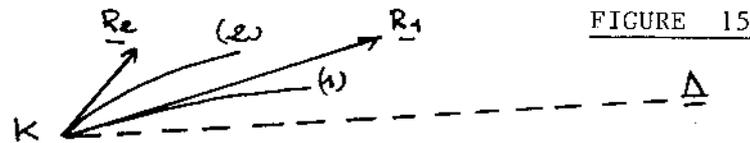
$$2) - K_1 = K_2$$

Alors $K_1 = K_2 = K$ et les droites (K, R_1) et (K, R_2) sont dans le même demi-plan limité par $(K, \underline{\Delta})$

En outre, on sait que la ligne (K, H_1, V_1) (resp. (K, H_2, V_2)) est tangente à la droite (K, R_1) (resp. (K, R_2))

Considérons $H_1 > H_2$: trois cas peuvent être distingués:

$$\cdot \frac{V_1}{H_1} < \frac{V_2}{H_2}$$



Il est clair que la ligne (K, H_1, V_1) est plus proche de la droite $(K, \underline{\Delta})$ que la ligne (K, H_2, V_2) .

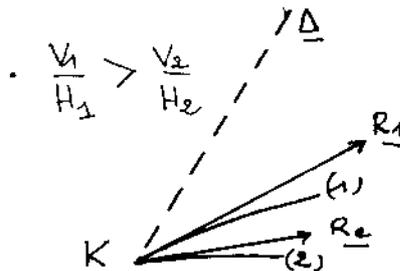


FIGURE 16

La conclusion est identique :

$$\cdot \frac{V_1}{H_1} = \frac{V_2}{H_2}$$

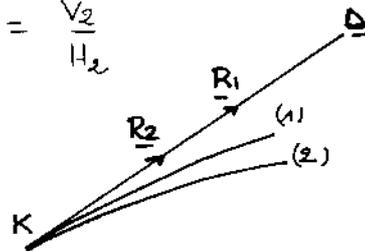


FIGURE 17

On montre que la position relative des deux courbes 1 et 2 est donnée par le rapport $(R_2 \cdot n) / (R_1 \cdot n)$ où R_1 et R_2 sont les résultantes sur un joint proche de la clé et n la normale à la résultante des efforts extérieurs. Si ce rapport est inférieur à 1, la ligne 1 est plus proche de $(K, \underline{\Delta})$ que la ligne 2.

Au voisinage de la clé, n est horizontale : il en résulte que si $H_1 > H_2$, la ligne (K, H_1, V_1) est plus proche de la droite $(K, \underline{\Delta})$ que la ligne (K, H_2, V_2) .

Donc dans tous les cas, la ligne de plus grande poussée horizontale est plus proche de la droite d'intersection.

$$3) - K_1 \neq K_2 \text{ et } H_1 = H_2$$

Dans ce cas la droite d'intersection est verticale. Si K_1 est plus haut que K_2 , la ligne 1 est au-dessus de la ligne 2 avant le premier point d'intersection à droite de la clé. On en déduit leurs positions relatives ensuite.

REMARQUE :

Dans ce cas, le nombre de points d'intersection est au maximum de 2 car il ne peut pas y avoir plus de deux centres de pression sur un joint. (il y en a 2 lorsque l'on a affaire à des efforts concentrés).

4.24. Propriété de contact avec l'extrados de la voûte

Si le chargement est tel que :

- Les forces verticales sont dirigées vers le bas (elles sont alors négatives),
- les forces horizontales sont dirigées vers la clé (elles sont positives à gauche de la clé et négatives à droite de la clé).

Alors, une ligne de centres de pression compressive ne peut pas rencontrer l'extrados au-dessus du point d'intersection de l'extrados avec la droite ($K, V/H$).

Nous renvoyons pour la démonstration de cette propriété à l'annexe 2.

4.2.5. Caractérisation d'une ligne de centres de pression compressive

Cette condition, utilisée dans la démonstration de la précédente propriété, s'écrit de façon évidente.

$$\forall s \quad \sin \varphi(s) (H - Q_h(s)) - \cos \varphi(s) (V - Q_v(s)) \geq 0$$

où s est l'abscisse curviligne et φ l'angle du joint avec l'horizontale.

Elle définit un domaine convexe \mathcal{C} dans le plan (H, V) dont on peut préciser la frontière.

A H fixé, cette condition s'écrit en effet :

$$\cdot \text{ Si } \varphi < \frac{\pi}{2} \quad (s > 0),$$

$$V \leq H \operatorname{tg} \varphi(s) - (Q_R(s) \operatorname{tg} \varphi(s) - Q_V(s))$$

$$\cdot \text{ Si } \varphi = \frac{\pi}{2} \quad (s = 0),$$

$$H \geq 0$$

$$\cdot \text{ Si } \pi > \varphi > \frac{\pi}{2} \quad (s < 0),$$

$$V \geq H \operatorname{tg} \varphi(s) - (Q_R(s) \operatorname{tg} \varphi(s) - Q_V(s))$$

On en déduit donc que $V(H)$ est nécessairement à l'intérieur du segment $[V_{\min}, V_{\max}]$ où :

$$V_{\min} = \max_{s < 0} [H \operatorname{tg} \varphi(s) - (Q_R(s) \operatorname{tg} \varphi(s) - Q_V(s))]$$

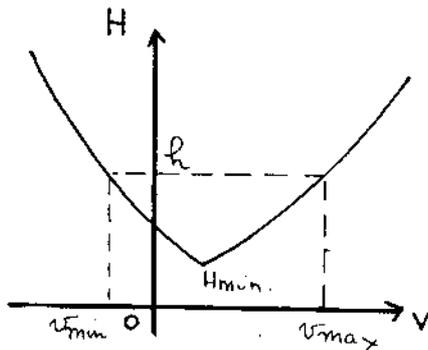
$$V_{\max} = \min_{s \geq 0} [H \operatorname{tg} \varphi(s) - (Q_R(s) \operatorname{tg} \varphi(s) - Q_V(s))]$$

Il est clair que la fonction $H \rightarrow V_{\min}(H)$ est décroissante et que la fonction $H \rightarrow V_{\max}(H)$ est croissante.

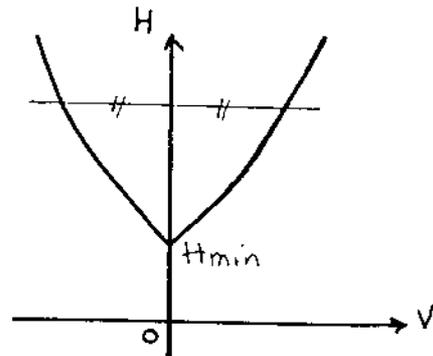
Il en résulte que nécessairement, il existe une valeur de H , H_{\min} , pour laquelle $V_{\min}(H_{\min}) = V_{\max}(H_{\min})$. Compte tenu de $H \geq 0$ pour $s = 0$, H_{\min} est positif.

On a les représentations suivantes dans le plan (H, V) .

Problème dissymétrique



Problème symétrique



Dans le cas d'un problème symétrique, il est clair que $\min(H) = -\sqrt{V_{max}}$ (H) et donc pour H_{min} , $V_{min} = -V_{max} = V_{max} = 0$. Nous verrons d'ailleurs que dans ce type de problème, les lignes de centres de pression intéressantes vérifient $V = 0$. La condition de compressivité s'écrit alors : si $\varphi \neq 0$ $H \geq H_{min} = \text{Max}_{s>0} (Q_n(s) - Q_0(s) \cos \varphi(s))$ et H_{min} est positif.

Si le chargement est en outre vertical, la condition se limite à $H \geq 0$.

4.3. CARACTERISATION DES LIGNES DE CENTRE DE PRESSION INTERNES A LA VOUTE DE POUSSEE HORIZONTALE MINIMALE ET MAXIMALE

L'objet de ce paragraphe est de montrer que parmi l'ensemble des lignes de centres de pression internes, il existe :

- une ligne de centres de pression de poussée horizontale minimale,
- une ligne de centres de pression de poussée horizontale maximale.

Ces lignes ont des propriétés particulières qui seront établies et qui permettent de définir un moyen simple de prouver leur existence (ou leur non existence) et donc de savoir "si la voûte est stable sous le chargement Q".

Nous montrerons d'abord que parmi les lignes de centres de pression internes à la voûte passant par le point K sur le joint de clé, il existe une ligne de poussée horizontale minimale et une ligne de poussée horizontale maximale.

4.31. Lignes de centres de pression internes et compressives passant par le point K

Une ligne de centres de pression étant définie par le point K et les valeurs des efforts normal et tangent H et V nous fixerons d'abord K et la valeur H et ferons varier V.

4.31.1.- Domaine admissible $\mathcal{V}(K, H)$ pour les lignes de centres de pression internes passant par K de poussée horizontale H

2 lignes distinctes, donc différant par la valeur de l'effort tangent à la clé, n'ont qu'un seul point d'intersection K.

En appliquant la propriété 4.23. il est alors évident que s'il existe au moins une ligne de centres de pression interne du type (K, H) il existe une valeur maximale et une valeur minimale de V correspondant à l'un des 6 cas de figures présentés à la figure 20.

REMARQUE :

On notera que lorsque le point où la ligne de centres de pression coupe l'extrados ou l'intrados appartient au "dernier" joint de la voûte, il n'y a pas nécessairement tangence à la courbe d'intrados ou d'extrados.

4.31.2.- Domaine admissible $\mathcal{L}(K)$ pour les lignes de centres de pression internes passant par K

Nous faisons maintenant varier la valeur H en maintenant K et nous regardons comment se "déforme" le domaine $\mathcal{V}(H, K)$.

Nous donnerons le détail des démonstrations uniquement pour la courbe $V_{max}(H, K)$, les démonstrations étant tout-à-fait analogues pour la courbe $V_{min}(H, K)$.

4.31.2.1. - Variation de $V_{max}(K, H)$ en fonction de H.

a) - Soit une ligne $V_{max}(H, K)$ du type 1.1. tangente à l'extrados à droite au-dessus de l'horizontale du point K.

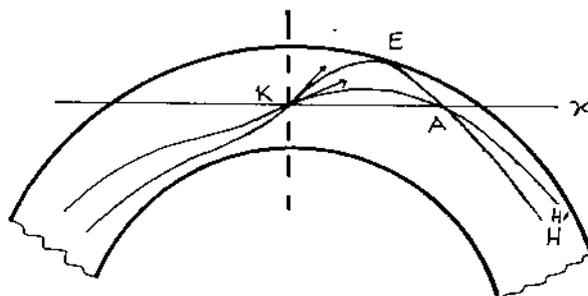
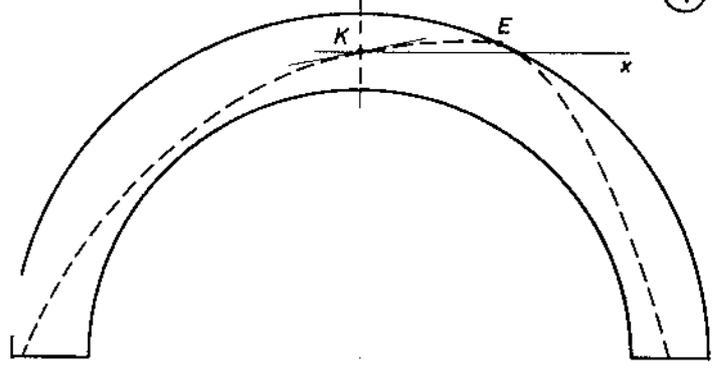
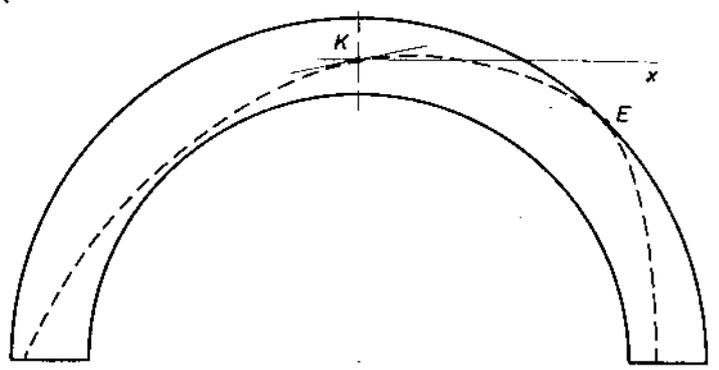


FIGURE 21

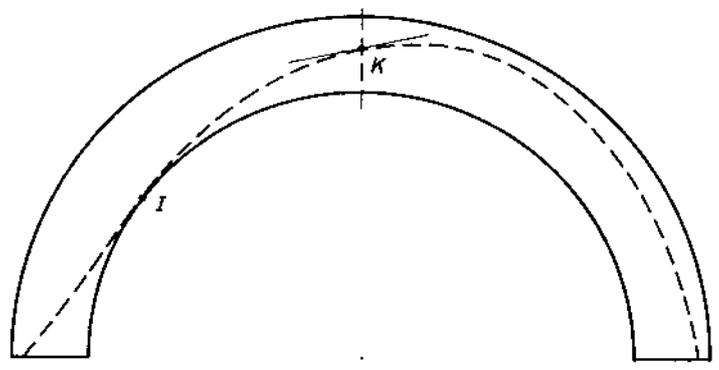
① V_{max}



Type 1.1

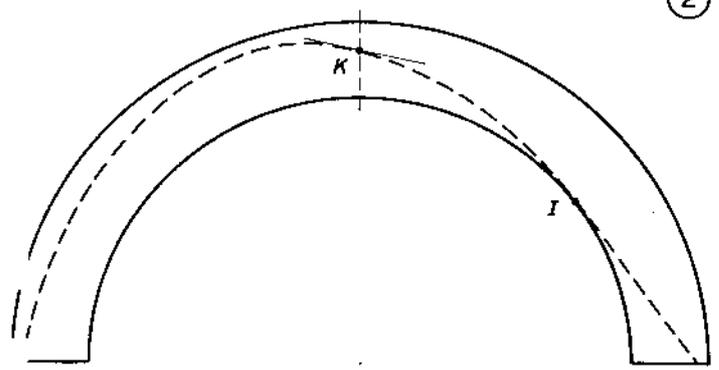


Type 1.2

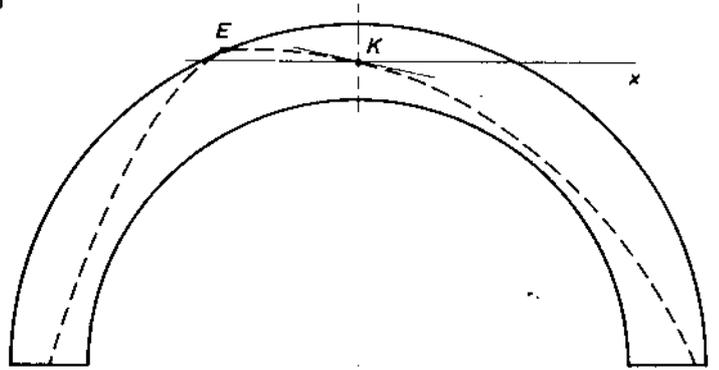


Type 1.3

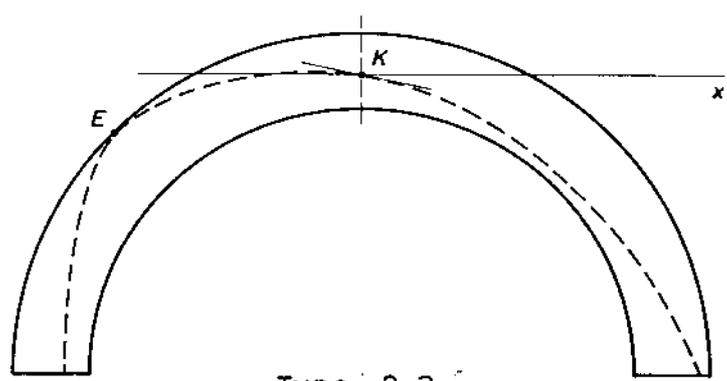
② V_{min}



Type 2.1



Type 2.2



Type 2.3

aa) - Une ligne (K, H', V'_{max}) vérifiant $H' > H$ recoupe la ligne (K, H, V_{max}) en K et A. Elle est au-dessus de cette ligne à gauche de la clé et à droite de la clé sous l'horizontale de K, en dessous de cette ligne entre K et A. (S'il y avait d'autres points d'intersection, en particulier à gauche de la clé, le raisonnement ne serait pas changé).

- . Si une telle ligne est interne, il faut augmenter V pour obtenir la ligne (K, H', V'_{max}) qui sera une ligne de type 1.1. ou 1.2. Si c'est une ligne de type 1.1., on obtient alors $V'_{max} > V_{max}$ pour $H' > H$
- . Si une telle ligne n'est pas interne, c'est que :
 - soit elle sort à droite de la clé par l'extrados sous l'horizontale de K : alors il faut diminuer V pour obtenir la ligne (K, H', V'_{max}) qui est nécessairement une ligne de type 1.2. puisqu'elle sera en-dessous de la ligne (K, H, V_{max}) au-dessus de l'horizontale de K et au-dessus de cette même ligne à gauche de la clé.
 - soit elle sort à gauche de la clé par l'extrados (sous la droite $(K, V_{max}/H')$) : il faut alors augmenter V pour obtenir une ligne interne. Deux cas peuvent se présenter :
 - soit en augmentant V , la ligne obtenue vérifie d'abord les conditions de tangence V_{max} (1.1., 1.2., 1.3.) et sort donc de la voûte à gauche de la clé : il n'est alors pas possible de trouver une ligne (K, H', V') interne,
 - soit en augmentant V , la ligne obtenue vérifie d'abord les conditions de tangence V_{min} (2.1., 2.2., 2.3.) : cette ligne est donc interne à la voûte. On obtient donc $V'_{min} > V_{max}$ et a fortiori $V'_{max} > V_{max}$. La ligne (K, H', V'_{max}) sera soit de type 1.1. soit de type 1.2.

CONCLUSION :

On obtient donc que $V'_{max} > V_{max}$ pour $H' > H$. En fait, on obtient aussi que tant que $V_{max}(K, H) > V_{min}(K, H)$, on peut trouver une ligne (K, H', V') interne avec $H' > H$

- ab - Une ligne (K, H', V_{max}) vérifiant $H' < H$ sort par l'extrados à droite de la clé au-dessus de l'horizontale de K. Il faut donc diminuer V pour essayer d'obtenir une ligne interne. Deux cas peuvent se présenter :

- soit la ligne obtenue en diminuant V recoupe d'abord l'intrados à droite de la clé ou l'extrados à gauche de la clé, avant de passer sous l'extrados à droite de la clé : il est alors impossible de trouver une ligne interne. Ce cas se produit lorsque $V_{\min}(K, H) > V_{\max}(K, H)$,
- soit la ligne obtenue passe sous l'extrados à droite et est interne. On obtient une ligne du type 1.1. et $V'_{\max} < V_{\max}$.

CONCLUSION :

Tant que $V_{\max}(K, H) > V_{\min}(K, H)$, on peut trouver une ligne (K, H', V') interne avec $H' < H$: cette ligne est du type 1.1. et $V_{\max}(K, H') < V_{\max}(K, H)$.

b) - Soit une ligne $V_{\max}(H, K)$ du type 1.2. tangente à l'extrados à droite de la clé en-dessous de l'horizontale du point

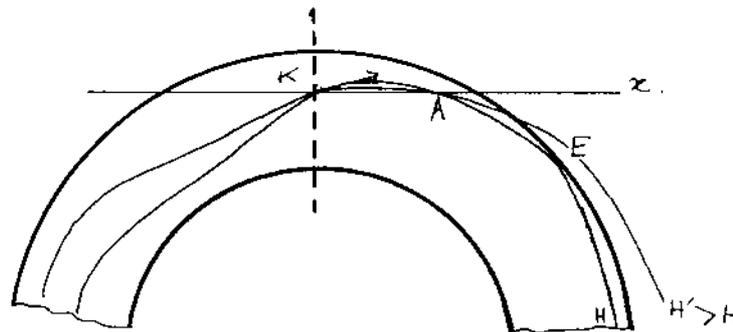


FIGURE 22

Une ligne (K, H', V_{\max}) vérifiant $H' > H$ est nécessairement au-dessus de la ligne (K, H, V_{\max}) au point E donc est externe à la voûte. Elle peut en outre sortir à gauche de la clé par l'extrados comme dans le cas aa).

- Si elle sort de la voûte à gauche de la clé, il est clair qu'il n'est pas possible de trouver une ligne interne à la voûte (K, H', V') .
- Si elle ne sort pas de la voûte à gauche de la clé, il faut diminuer V pour essayer d'obtenir une ligne interne :

- soit en diminuant V , la ligne obtenue recoupe d'abord l'extrados à gauche de la clé : il n'est pas possible de trouver une ligne interne.

Ces deux derniers cas se présentent dès que $V_{\min}(K, H) > V_{\max}(K, H)$

- soit en diminuant V , la ligne obtenue passe sous l'extrados avant de sortir à gauche de la clé : on obtient donc une ligne interne du type 1.2. et $V'_{\max} < V_{\max}$.

CONCLUSION :

Tant que $V_{\max}(K, H) > V_{\min}(K, H)$, on peut trouver une ligne interne avec $H' > H$. Cette ligne est du type 1.2. et on a $V_{\max}(K, H') < V_{\max}(K, H)$

- c) - Soit une ligne $V_{\max}(K, H)$ du type 1.3. tangente à l'intrados à gauche.

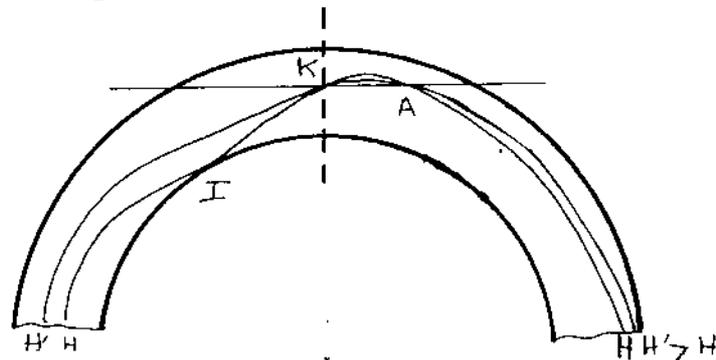


FIGURE 23

Une ligne (K, H', V_{\max}) vérifiant $H' > H$ coupe la ligne (K, H, V_{\max}) en K et A.

- . Si une telle ligne est interne, il faut augmenter V pour obtenir (K, H', V'_{\max}) qui sera une ligne de type 1.2. ou 1.1. ou 1.3. On a, en tout cas, $V'_{\max} > V_{\max}$ pour $H' > H$.
- . Si une telle ligne n'est pas interne, c'est que :
 - Soit elle sort à droite de la clé par l'extrados sous l'horizontale de K : il faut alors diminuer V pour obtenir la ligne (K, H', V'_{\max}) qui sera nécessairement du type 1.2.

- Soit elle sort à gauche de la clé par l'extrados : on retrouve le cas étudié aa).

CONCLUSION :

Tant que $V_{\max}(K, H) > V_{\min}(K, H)$ on peut trouver une ligne interne avec $H' > H$ et $V_{\max}(K, H') > V_{\max}(K, H)$ et pour $H' < H$, la ligne $V_{\max}(K, H')$ est du type 1.3.

4.31.2.2. Variation de $V_{\min}(K, H)$ en fonction de H

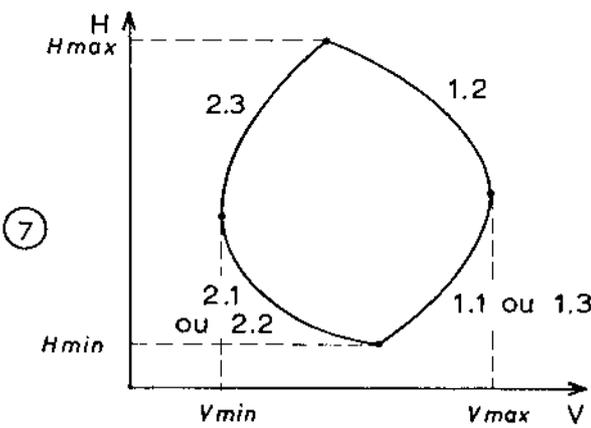
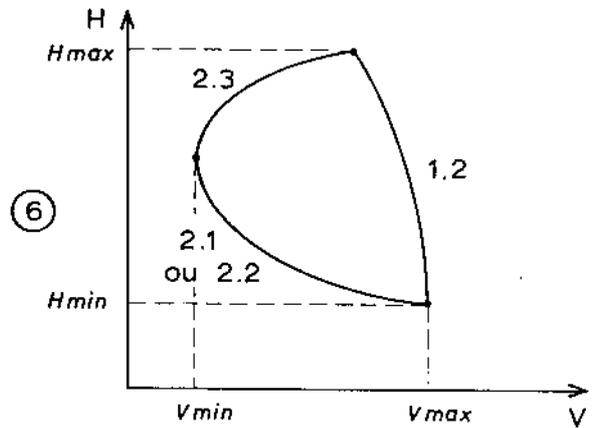
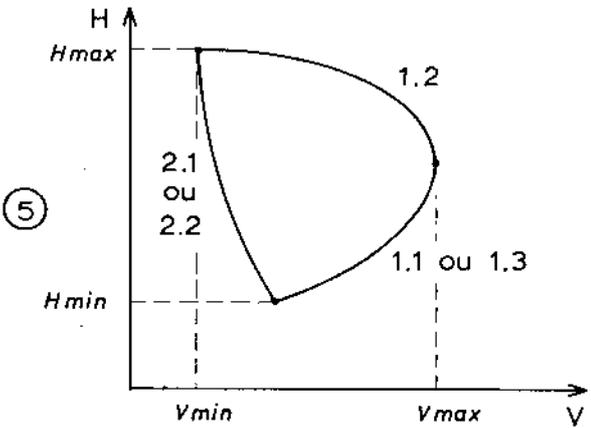
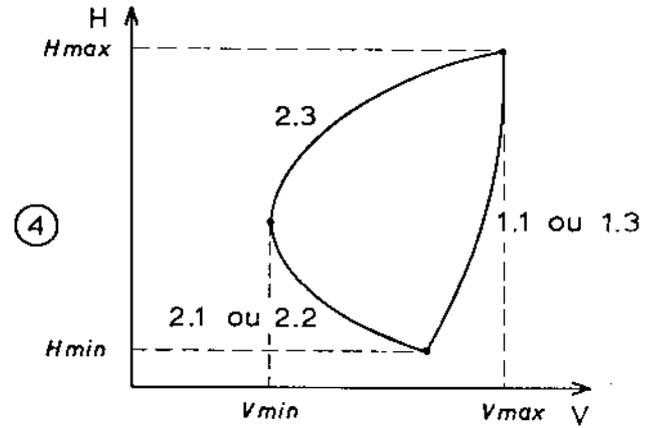
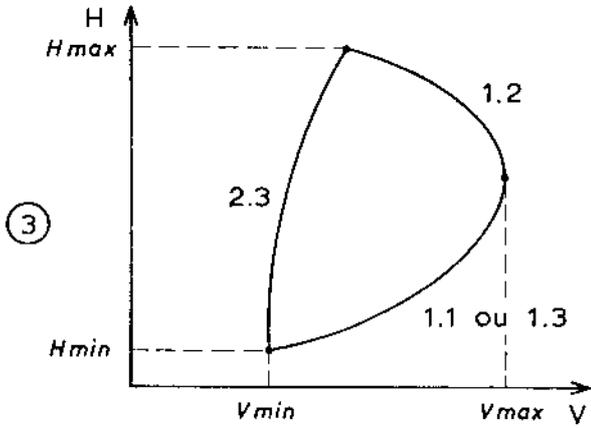
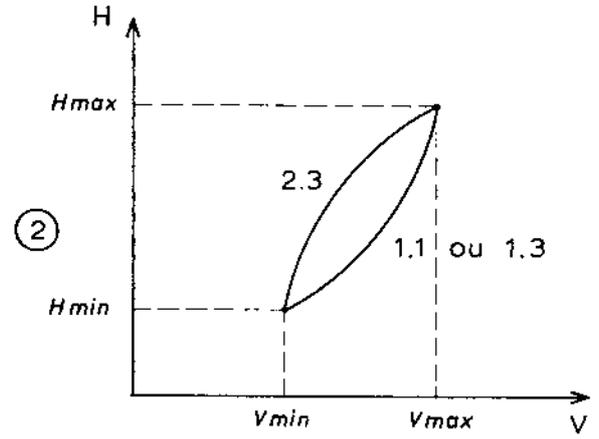
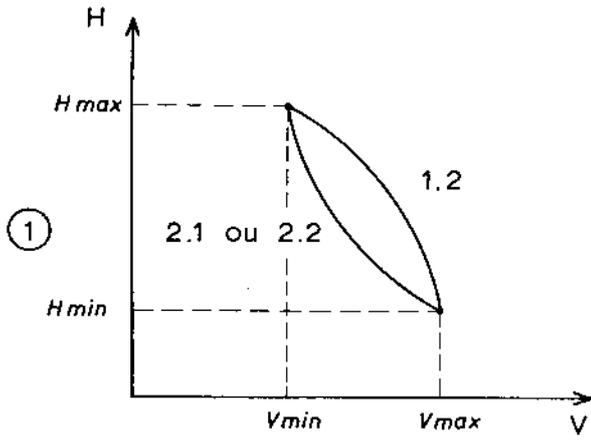
Les démonstrations sont analogues. Les résultats sont les suivants :

- Pour des lignes du type 2.1. et 2.2., tant que $V_{\max}(K, H) > V_{\min}(K, H)$, il existe $H' > H$, qui donne une ligne interne et $V_{\min}(K, H') < V_{\min}(K, H)$.
- Pour des lignes du type 2.3. tant que $V_{\max}(K, H) > V_{\min}(K, H)$, il existe $H' > H$, qui donne une ligne interne du type 2.3. et on a $V_{\min}(K, H') > V_{\min}(K, H)$.
- Si la ligne $V_{\min}(K, H)$ est du type 2.1. (resp. 2.2.), et s'il existe une ligne interne $V'_{\min}(K, H')$ avec $H' < H$, alors cette ligne est du type 2.1. (resp. 2.2.).

4.31.2.3. - Récapitulatif : domaine $\mathcal{H}(K)$

Les propriétés démontrées ci-dessus permettent d'obtenir pour le domaine $\mathcal{H}(K)$ des lignes de centres de pression internes tracées dans le plan (V, H) les formes données à la figure n° 24. Ces résultats sont rappelés dans le tableau ci-dessous.

V_{\max} / V_{\min}	1.1	1.2	1.3
2.1	Hmin	$\begin{array}{c} H_{\max} \\ H_{\min} \end{array}$	Hmin
2.2	Hmin	$\begin{array}{c} H_{\max} \\ H_{\min} \end{array}$	Hmin
2.3	$\begin{array}{c} H_{\max} \\ H_{\min} \end{array}$	Hmax	$\begin{array}{c} H_{\max} \\ H_{\min} \end{array}$



L'une de ces configurations est en fait impossible si les lignes sont compressives. En effet, une ligne interne compressive ne peut pas être tangente à l'extrados de la voûte au-dessus du point d'intersection de la droite $(K, V/H)$ avec l'extrados. Or les lignes de poussée extrême correspondent à l'égalité $V_{\min} = V_{\max}$: il en résulte que l'on ne peut pas avoir la tangence à l'extrados à droite et à gauche de la clé au-dessus de l'horizontale du point K. On ne peut donc pas avoir à la fois une ligne des types 1.1. et 2.2.

Il apparaît sur le tableau ci-dessus que dans certaines configurations, il n'est pas encore possible de distinguer entre une ligne de poussée horizontale minimale ou maximale. Nous allons donc étudier ces cas.

1) - Tangence à l'extrados droit au-dessous de l'horizontale de K et à l'intrados droit.

(La démonstration est la même pour le cas symétrique.). Nous traitons donc les cas 1.2.+ 2.1. et 1.3.+ 2.3.

Soit (K, H, V) la ligne tangente en A et B à l'extrados et à l'intrados. Nous distinguerons les deux cas suivants :

1.1.- La droite KA est au-dessus de la droite KB.

1.2.- La droite KA est au-dessous de la droite KB.

1.1. - La droite KA est au-dessus de la droite KB.

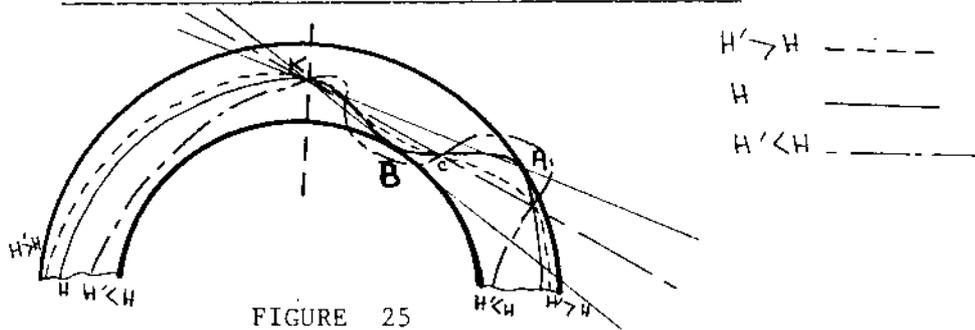


FIGURE 25

Montrons qu'il n'existe pas de ligne (K, H', V') passant par K et de poussée horizontale H' inférieure à H interne à la voûte.

Nous supposons que la ligne (K, H, V) ne recoupe pas la droite $(K, V/H)$ mais ceci ne change pas le raisonnement.

Si la ligne (K, H', V') est interne, elle recoupe la ligne (K, H, V) entre B et A : soit C ce point d'intersection. KC est en-dessous de KA.

Il en résulte que nécessairement V' est supérieur à V et que la droite $(K, V'/H')$ est au-dessus de la droite $(K, V/H)$ et KC est en dessous de ces deux droites. Compte tenu de 4.2.3., la ligne (K, H', V') est alors extérieure à la voûte au moins au point A.

C.Q.F.D.

. Montrons qu'il existe une ligne (K, H', V') passant par K et de poussée horizontale H' supérieure à H interne à la voûte.

Cette ligne recoupe donc en un point C situé entre B et A la ligne (K, H, V) . Il en résulte que nécessairement V' est inférieur à V et que la droite $(K, V'/H')$ est en-dessous de la droite $(K, V/H)$ et KC est en-dessous de ces deux droites. Compte tenu de 4.2.3., il est alors possible, tant que H' n'est pas "trop supérieur" à H (nous expliciterons par la suite ce terme), de trouver une ligne (K, H', V') interne à la voûte.

C.Q.F.D.

Dans la ligne (K, H, V) est une ligne de poussée horizontale minimale.

1.2. La droite KA est au-dessous de la droite KB .

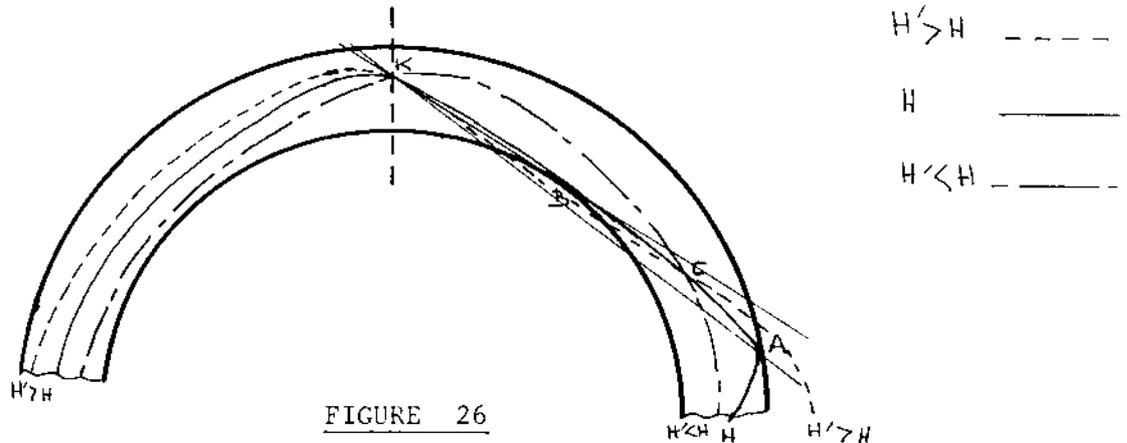


FIGURE 26

. Montrons qu'il n'existe pas de ligne (K, H', V') passant par K et de poussée horizontale H' supérieure à H interne à la voûte. Nous raisonnerons sur la figure ci-dessus mais le résultat ne dépend pas de cette configuration particulière.

Si la ligne (K, H', V') reste interne, elle recoupe la ligne (K, H, V) en un point C situé entre B et A . KC est au-dessus de KA . Il en résulte que V' est nécessairement inférieur à V et que la droite $(K, V'/H')$ est en-dessous de la droite $(K, V/H)$ et KC est en-dessous de ces deux droites. Compte tenu de 4.2.3., la ligne (K, H', V') est alors extérieure à la voûte au moins au point A.

C.Q.F.D.

. Montrons qu'il existe une ligne (K, H', V') passant par K et de poussée horizontale H' inférieure à H interne à la voûte.

Cette ligne recoupe la ligne (K, H, V) en un point C situé entre B et A. Nécessairement V' est supérieur à V et la droite $(K, V'/H')$ est au-dessus de la droite $(K, V/H)$ et KC est en-dessous de ces deux droites. Compte tenu de 4.2.3., il est alors possible, tant que H' n'est pas "trop inférieure" à H, de trouver une ligne (K, H', V') interne à la voûte.

Donc la ligne (K, H, V) est une ligne de poussée horizontale maximale.

2 - Tangence à l'extrados droit au-dessous de l'horizontale de K et à l'extrados gauche au-dessus de l'horizontale de K.

La démonstration est la même pour le cas symétrique. Nous traitons donc les cas 1.2. + 2.2. et 1.1. + 2.3.

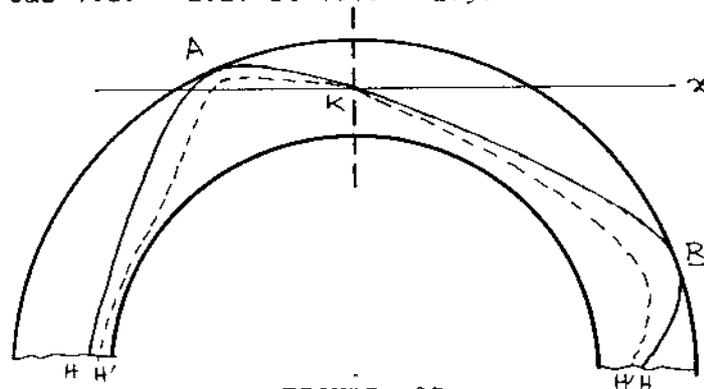


FIGURE 27

. Montrons qu'il n'existe pas de ligne (K, H', V') passant par K de poussée horizontale H' supérieure à H interne à la voûte.

Une ligne passant par K et vérifiant $H' > H$ se trouve au-dessus de l'arc KB si $V' > V$ ou au-dessus de l'arc KA si $V' < V$.

. Si $V' > V$, la droite d'intersection (K, Δ) est au-dessus des droites $(K, V/H)$ et $(K, V'/H')$ à droite de la clé donc au-dessus du point B : la ligne (K, H', V') est alors plus proche de (K, Δ) que la ligne (K, H, V) : la ligne (K, H', V') est alors au moins extérieure à la voûte en B.

- Si $V' < V$, la droite d'intersection, $(K, \underline{\Delta})$ est au-dessus des droites $(K, V/H)$ et $(K, V'/H')$ à gauche de la clé donc au-dessus du point A : la ligne (K, H', V') est plus proche de $(K, \underline{\Delta})$ que la ligne (K, H, V) : la ligne (K, H', V') est alors au moins extérieure à la voûte en A.

CQFD

- Montrons qu'il existe une ligne (K, H', V') passant par K et de poussée horizontale H' inférieure à H interne à la voûte.

Une ligne passant par K et vérifiant $H' < H$ se trouve au-dessous de l'arc KB et de l'arc KA si $V'/H' = V/H$ dans le cas de figure présenté, (c'est un cas où la ligne ne recoupe pas sa tangente à la clé mais le résultat est identique si elle la coupe car le nombre de points d'intersection entre K et B d'une part et K et A d'autre part est nécessairement pair.

Donc tant que H' n'est pas "trop inférieur" à H, on peut trouver une ligne (K, H', V') interne à la voûte.

CQFD

Donc la ligne (K, H, V) est une ligne de poussée maximale.

On obtient donc les caractérisations suivantes :

- Ligne de poussée horizontale minimale. (K, H, V)
- Tangence à l'intrados droit et à l'intrados gauche.
- Tangence à l'intrados droit en B et à l'extrados droit en A avec KA au-dessus de KB.
- Tangence à l'intrados gauche en B et à l'extrados gauche en A avec KA au-dessus de KB.
- Ligne de poussée horizontale minimale (K, H, V)
- Tangence à l'extrados droit et à l'extrados gauche sous l'horizontale de K.
- Tangence à l'extrados droit sous l'horizontale de K et à l'extrados gauche.
- Tangence à l'intrados droit en B et à l'extrados droit en A avec KB au-dessus de KA.
- Tangence à l'intrados gauche en B et à l'extrados gauche en A avec KB au-dessus de KA.

REMARQUE 1 :

On notera que les domaines représentés à la figure n° 24 ne donnent pas toutes les lignes internes à la voûte passant par le point K et que toutes les lignes définies par un point de ces domaines ne sont pas forcément internes et compressives.

En effet, d'une part, pour obtenir ces domaines nous avons parfois utilisé la propriété de "compressivité" des lignes donc il se peut que certaines lignes internes non compressives n'y soient pas représentées.

D'autre part, les lignes internes compressives sont définies par l'intersection de ce domaine $\mathcal{L}(K)$ avec le convexe \mathcal{C} défini par la condition de compressivité.

REMARQUE 2 :

Le cas particulier du problème symétrique est intéressant. En effet, il est évident que dans un tel problème $V_{\min}(K, H) = -V_{\max}(K, H)$. Il en résulte que les lignes de poussée horizontale minimale et maximale vérifient $V=0$ et qu'elles vérifient les conditions de tangence suivantes :

- . La ligne de poussée horizontale minimale passant K est tangente à l'intrados de la voûte en deux points symétriques par rapport à la clé (ligne de type 2.1.).
- . La ligne de poussée horizontale maximale passant par K est tangente à l'extrados de la voûte en deux points symétriques par rapport à la clé, situés sous l'horizontale du point K (ligne de type 1.2.).

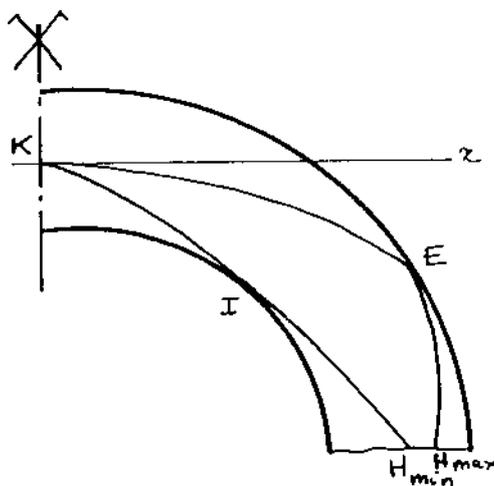


FIGURE 28

REMARQUE 3 :

On peut montrer que le domaine $\mathcal{L}(K)$ est un domaine convexe. La démonstration en est donnée à l'annexe 3. Ce résultat est intéressant car il permet l'approche du domaine $\mathcal{L}(K)$ par l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de sa frontière.

REMARQUE 4 :

On peut en fait obtenir toutes les lignes internes passant par le point K par un moyen simple.

En effet, soit K un point du joint de clé et soit un point C appartenant au joint d'abscisse curviligne s. Par les points K et C, il passe une ligne et une seule qui a pour poussée horizontale H.

- . Si X et Y sont les coordonnées de C et Z la côte du point K, la poussée verticale V de cette ligne vaut $V = \frac{H(Y-Z)+M}{X}$ où M est le moment des forces extérieures par rapport à C. Lorsque le point C décrit le joint d'abscisse curviligne s, V varie entre $V_{\min}(H, K, s)$ et $V_{\max}(H, K, s)$.
- . Si l'on fait ensuite varier le joint, on obtient que les valeurs de V qui donnent une ligne interne dans toute la voûte sont comprises entre les deux valeurs.

$$\underset{\wedge}{\text{Max}} V_{\min}(H, K, s) = V_{\min}(H, K)$$

$$\text{et : } \underset{\wedge}{\text{Min}} V_{\max}(H, K, s) = V_{\max}(H, K)$$

- . Si cet intervalle est non vide, il existe des lignes internes de poussée horizontale H et passant par K.
- . Si l'on fait ensuite varier la poussée H, on obtient l'ensemble de toutes les lignes internes passant par le point K.

Nous n'approfondirons pas plus cette méthode mais nous l'avons signalée car elle est analogue dans son principe à la méthode de A. DURAND CLAYE que nous développerons plus loin (6.4.).

4.32. Lignes de centres de pression internes et compressives

Nous avons donc décrit l'ensemble des lignes de centres de pression internes et compressives passant par le point K. Il ne reste plus qu'à faire varier le point K sur le joint de clé pour obtenir l'ensemble des lignes internes et compressives.

4.32.1 - Variations de $H_{\min}(K)$ et $H_{\max}(K)$

Nous allons donc examiner comment se déforme le domaine $\mathcal{L}(K)$ et plus précisément, comment varient les poussées horizontales minimales et maximales.

Les démonstrations ne seront exposées ici que pour les lignes de poussée horizontale minimale car elles sont analogues pour les lignes de poussée horizontale maximale.

Elles seront en outre présentées à l'aide de dessins qui sont bien entendu des cas particuliers mais ceci n'enlève rien à la généralité des résultats.

Nous montrerons que :

- Si la ligne (K, H, V) est une ligne de poussée horizontale minimale dont le premier point de tangence à partir de la clé se trouve à l'intrados, (resp. extrados) alors la ligne de poussée horizontale minimale passant par un point K' situé en-dessous de K , (resp. au-dessus de K) si elle existe, est une ligne dont le premier point de tangence se trouve à l'intrados (resp. extrados) et elle vérifie $H' \gg H$ (resp. $H' \ll H$).
- Si la ligne (K, H, V) est une ligne de poussée horizontale maximale dont le premier point de tangence à partir de la clé se trouve à l'extrados (resp. intrados), alors la ligne de poussée horizontale maximale passant par un point K' situé au-dessus de K (resp. au-dessous de K), est une ligne dont le premier point de tangence se trouve à l'extrados (resp. intrados) et elle vérifie $H' \ll H$ (resp. $H' \gg H$).

DEMONSTRATION :

Considérons donc la ligne (K, H, V) , la ligne de poussée horizontale minimale passant par le point K . Soit K' un point situé en-dessous de K sur le joint de clé : si $H_{\min}(K) \ll H_{\max}(K)$, il existe des lignes de centres de pression internes passant par K' . Cherchons s'il peut en exister qui aient une poussée horizontale H' inférieure à H .

- a) - Supposons que le premier point de tangence est situé à l'intrados droit. Deux cas sont possibles :
 - aa) - C'est une ligne du type tangence à l'intrados droit et à l'intrados gauche.

Une ligne (K, H', V) a nécessairement un point d'intersection avec la ligne (K, H, V) sinon elle serait extérieure à la voûte en A et en B .

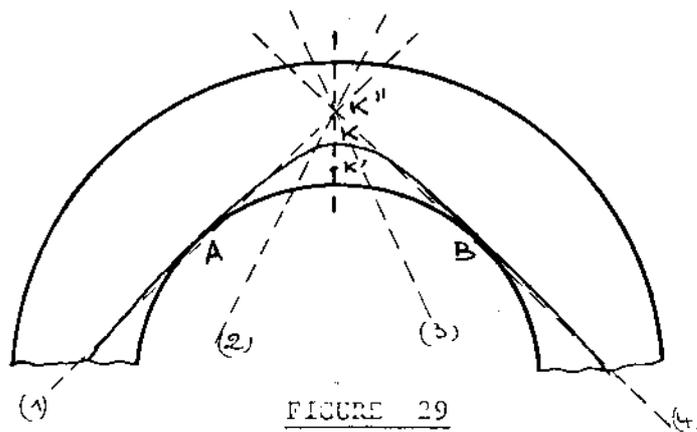


FIGURE 29

Comme H' est inférieur à H , la droite d'intersection $(K'', \underline{\Delta})$ recoupe le joint de clé au-dessus de K . Il est alors facile de vérifier que, quelle que soit la droite passant par un point K'' situé au-dessus de K que l'on choisisse, la ligne (K', H', V') est nécessairement extérieure à la voûte en au moins un point (voir figure n°29).

Par exemple :

- (1) et (2) sont extérieures en B,
- (3) et (4) sont extérieures en A.

Il en résulte donc que si K' est en-dessous de K $H_{\min}(K') \gg H_{\min}(K)$.

ab) - C'est une ligne du type tangence à l'intrados droit en B et extrados droit en A avec KA au-dessus de KB et A après B sur la ligne.

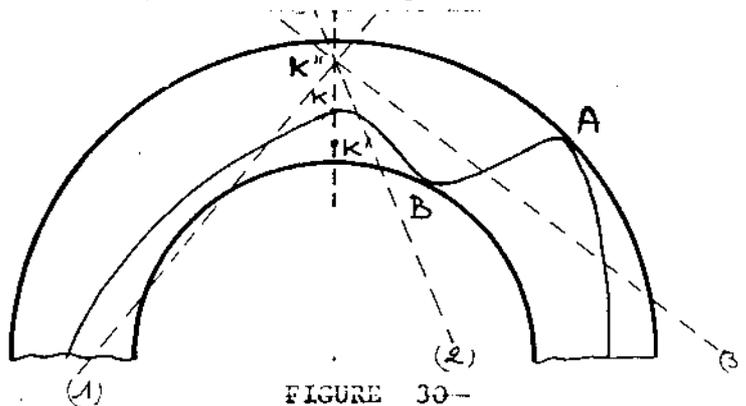


FIGURE 30-

Une ligne (K, H', V') a nécessairement un point d'intersection avec la ligne (K, H, V) entre K et B sinon elle serait extérieure à la voûte en B.

Comme H' est inférieur à H , la droite d'intersection $(K'', \underline{\Delta})$ recoupe le joint de clé au-dessus de K . Il est alors facile de voir que, quelle que soit la droite passant par un point K'' situé au-dessus de K que l'on choisisse, la ligne (K', H', V') est nécessairement extérieure à la voûte en au moins un point (voir figure 30).

Par exemple :

- (1) est extérieure en B,
- (2) est extérieure en A.
- (3) est extérieure en B.

Il en résulte que si K' est en-dessous de K , $H_{\min}(K') \gg H_{\min}(K)$.

- b) - Supposons que le premier point de tangence est situé à l'extrados droit. Un seul cas est possible : la ligne est du type tangence extrados droit en A et intrados droit en B avec KA au-dessus de KB et A avant B.

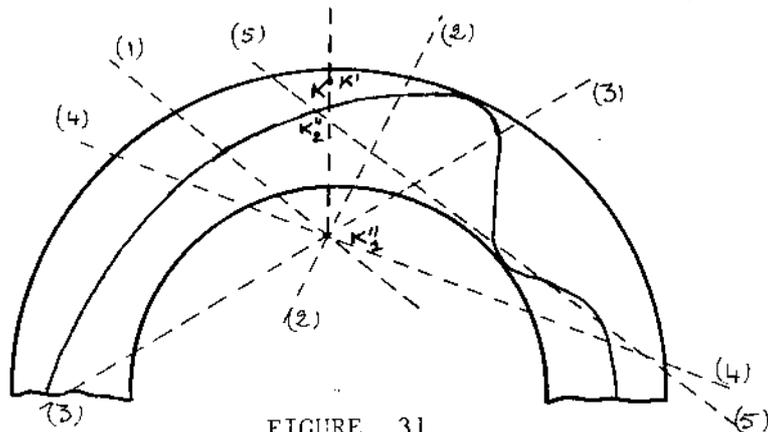


FIGURE 31

Soit K' un point situé au-dessus de K sur le joint de clé : si $H_{\min}(K') \leq H_{\max}(K')$. Il existe des lignes de centres de pression internes passant par K' . Cherchons s'il peut en exister qui aient une poussée horizontale H' inférieure à H .

Une ligne (K', H', V') a nécessairement un point d'intersection avec la ligne (K, H, V) entre K et A sinon elle serait extérieure à la voûte en A .

Comme H' est inférieure à H la droite d'intersection recoupe le joint de clé au-dessus de K . Il est alors facile de voir que, quelle que soit la droite passant par un point K'' situé au-dessus de K que l'on choisisse, la ligne (K', H', V') est nécessairement extérieure en au moins un point (voir figure 31).

Par exemple :

- (1), (3), (5) sont extérieures en A ,
- (2) est extérieure en B .

Il en résulte que $H_{\min}(K') \geq H_{\min}(K)$.

REMARQUE :

On notera que dans le cas d'une ligne de poussée horizontale maximale du type tangence extrados en A intrados en B avec KA au-dessous de KB , nécessairement le point A se trouve après le point B en suivant la ligne à partir de la clé.

4.32.2. - Domaine (z, H, V) des lignes de centres de pression internes et compressives

Nous avons vu que pour chaque point K de côte z appartenant au joint de clé, on peut définir un domaine $\mathcal{L}(K)$, donnant les lignes de centres de pression "internes" à la voûte, défini dans le plan (V, H) . Ce domaine permet de définir des poussées horizontales minimale $H_{\min}(z)$ et maximale $H_{\max}(z)$. Nous avons vu les variations des fonctions $z \rightarrow H_{\min}(z)$ et $z \rightarrow H_{\max}(z)$. Nous pouvons donc tracer le domaine (z, H, V) des lignes internes. Le domaine des lignes internes et compressives étant l'intersection de ce domaine avec le domaine convexe \mathcal{C} . Nous donnons à la figure n° 32 les différentes formes possibles du domaine (z, H) limité par les courbes H_{\min} et H_{\max} . Il faut remarquer que ces domaines peuvent être "tronqués" par les droites $z = z_{\max}$ (extrados) et $z = z_{\min}$ (intrados).

Nous n'étudierons pas en détail si toutes les configurations définies par ces domaines sont possibles. A priori, on peut en tirer les conclusions suivantes :

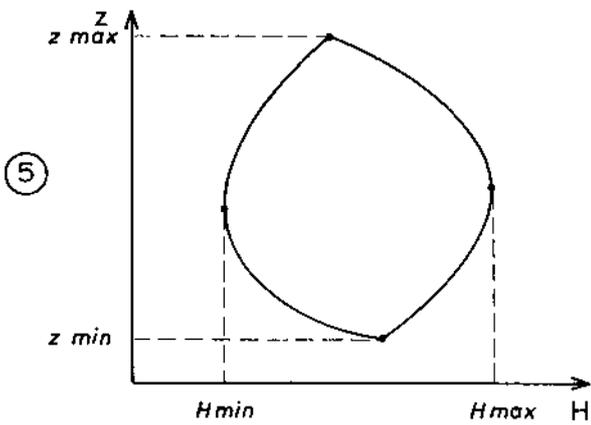
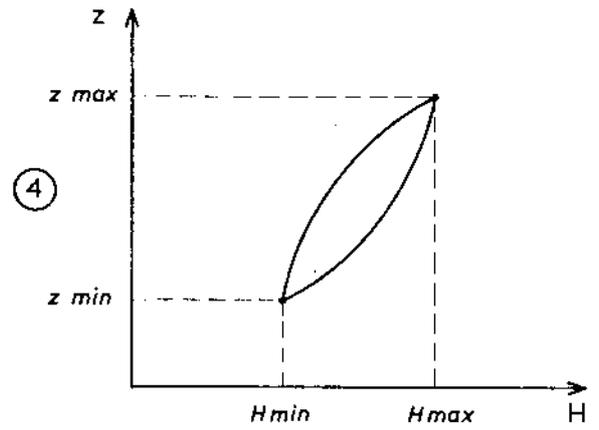
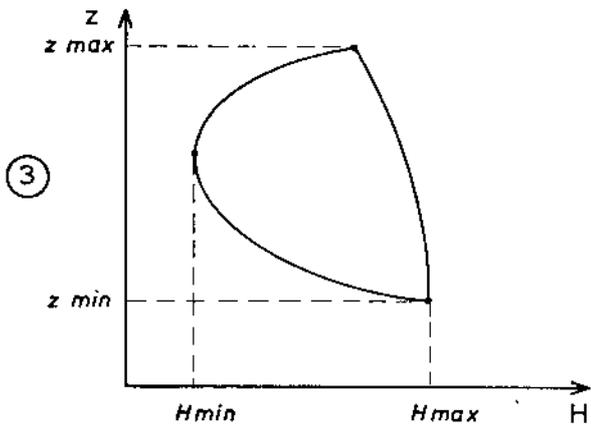
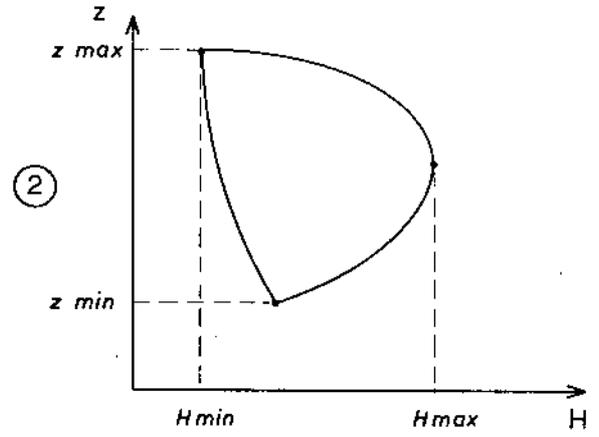
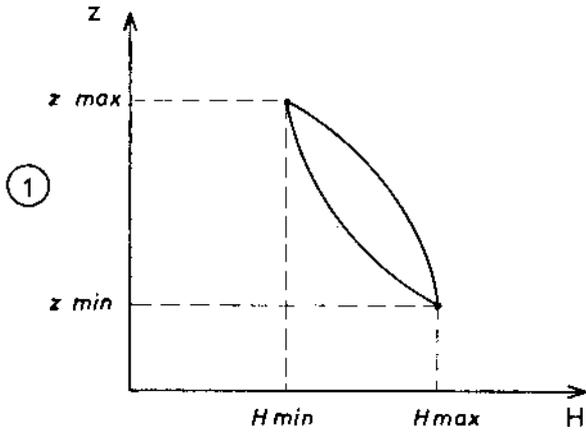
- . Il existe une ligne de poussée horizontale minimale et une ligne de poussée horizontale maximale. Ces lignes sont uniques si toutes les lignes du domaine (z, H) sont compressives.
- . Les lignes de poussée horizontale extrêmes traversent au moins deux fois l'épaisseur de la voûte (on retrouve ici une propriété énoncée par SCHEFFLER (1857)) et ont au moins trois points de tangence avec l'extrados et l'intrados.
- . Les lignes de poussée horizontale minimale et maximale ont l'une des propriétés de tangence présentées aux figures n° 33, 34.

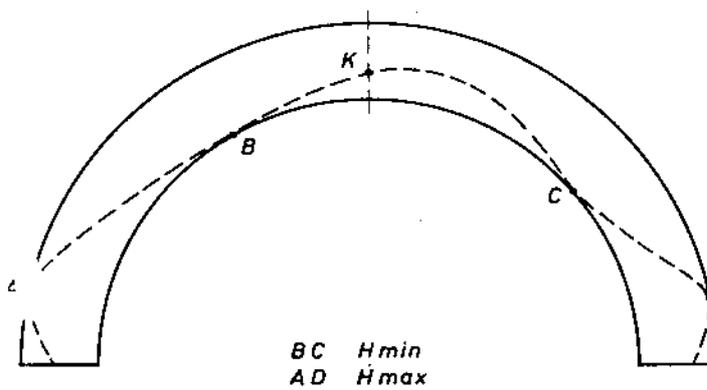
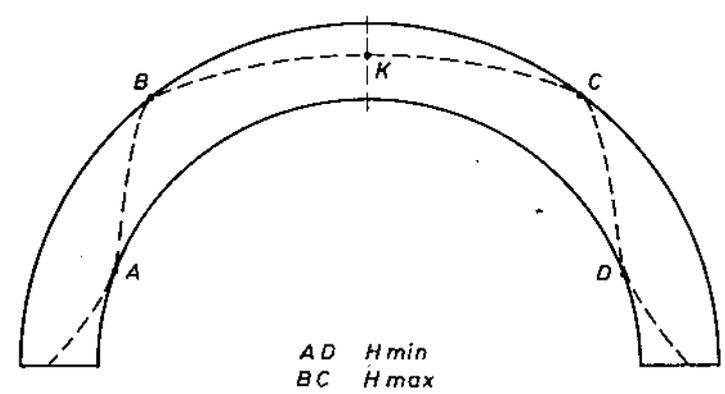
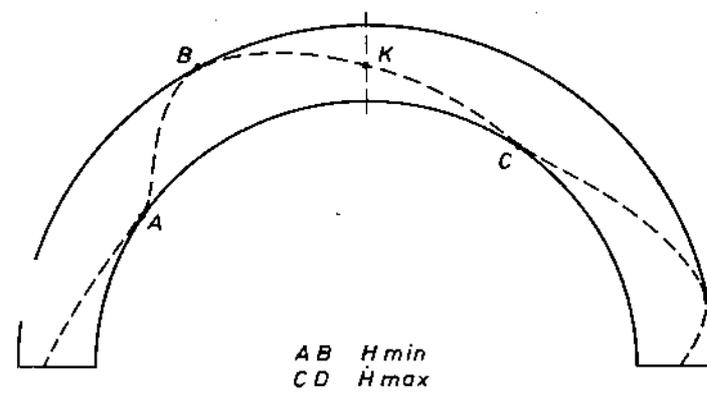
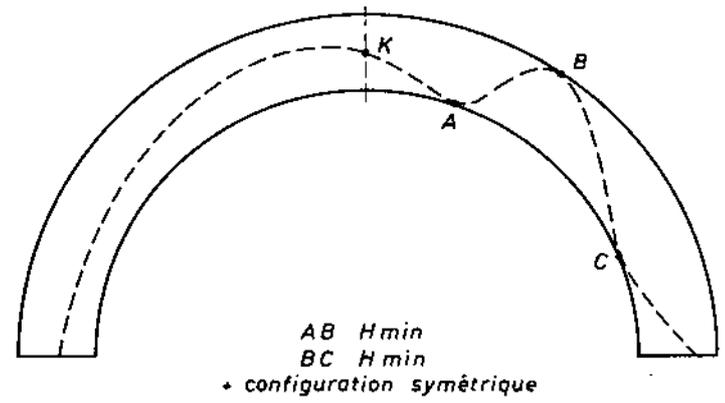
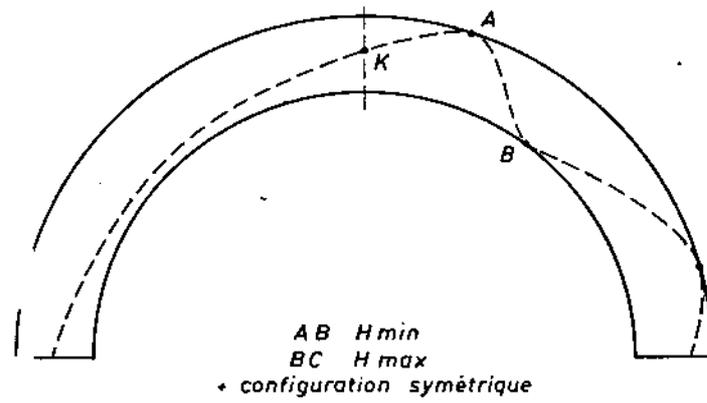
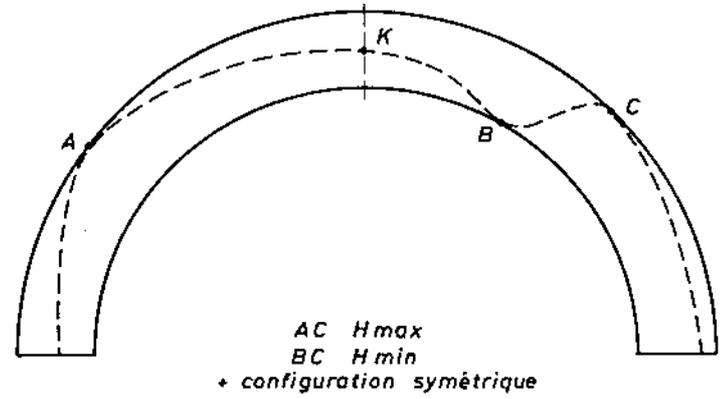
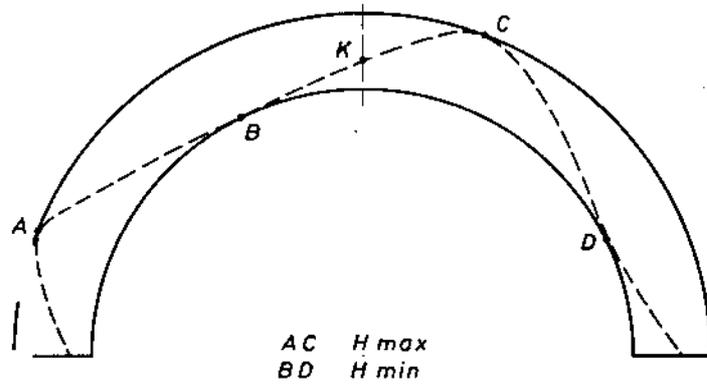
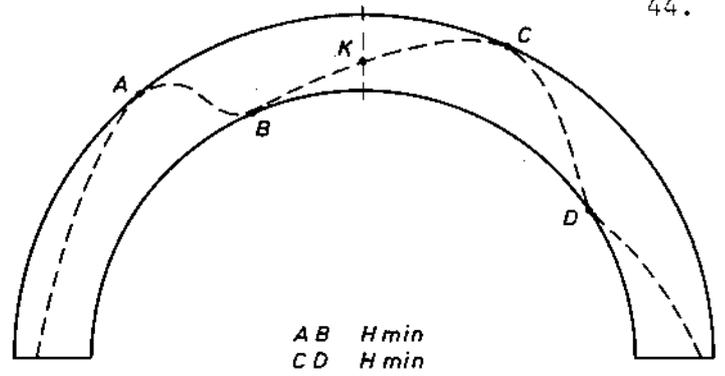
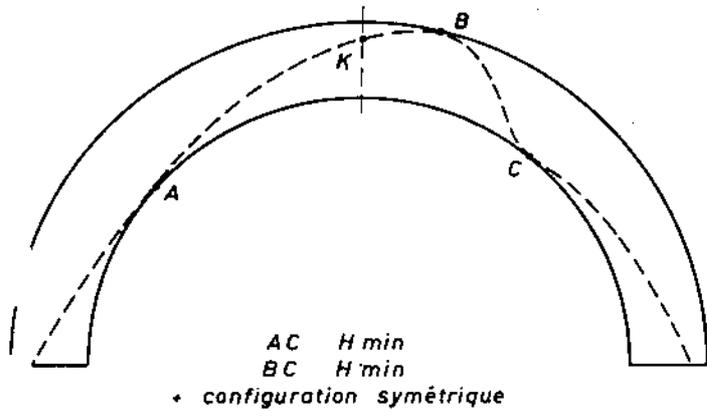
Lorsque les domaines sont tronqués, les lignes de centres de pression correspondant à la côte de troncature sont tangentes sur le joint de clé soit à l'extrados soit à l'intrados. Dans le cas où une telle ligne a une poussée horizontale extrême, cela modifie les schémas présentés mais une telle ligne a encore au moins trois points de tangence avec l'extrados et l'intrados.

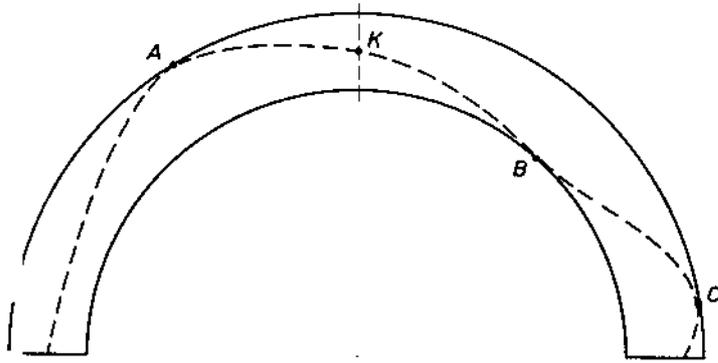
REMARQUE 1 :

Les domaines tracés dans le plan (z, H) sont des domaines convexes. La démonstration en est donnée à l'annexe n° 4.

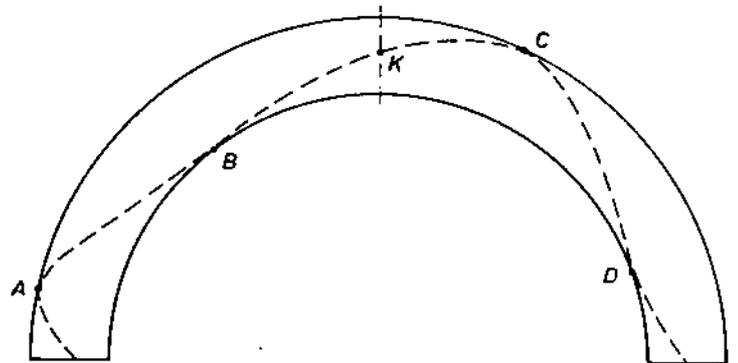
DOMAINES DE STABILITÉ (z,H)



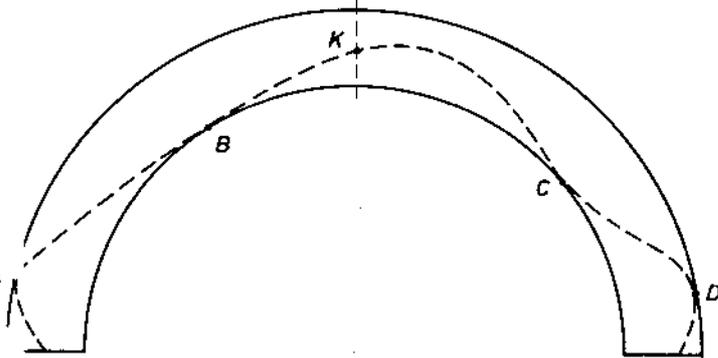




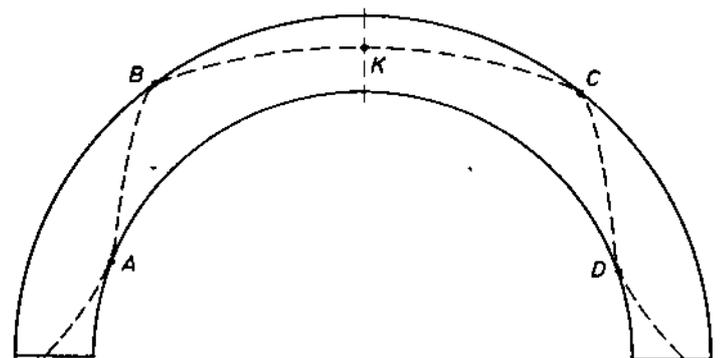
BC H_{max}
 AC H_{max}
 + configuration symétrique



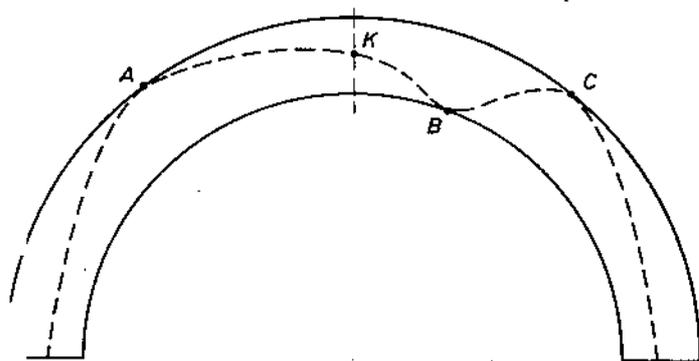
AC H_{max}
 BD H_{min}



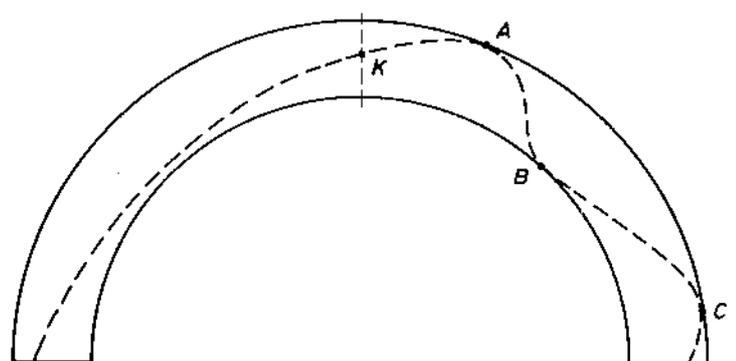
BC H_{min}
 AD H_{max}



AD H_{min}
 BC H_{max}



AC H_{max}
 BC H_{min}
 + configuration symétrique



AB H_{min}
 BC H_{max}
 + configuration symétrique

REMARQUE 2 :

On notera que lorsque le point où la ligne de centres de pression coupe l'extrados ou l'intrados appartient au "dernier" joint de la voûte, il n'y a pas nécessairement tangence à la courbe d'extrados ou d'intrados.

REMARQUE 3 :

Le cas particulier des charges symétriques est intéressant à étudier.

Nous savons que les lignes de poussée extrême à une côte z sont de deux types seulement :

- poussée minimale : tangence intrados-intrados,
- poussée maximale : tangence extrados-extrados à une côte inférieure à z .

Le domaine (z, H) a alors une seule configuration possible (sans tenir compte des troncatures de limitation en z) donnée à la figure n° 35.

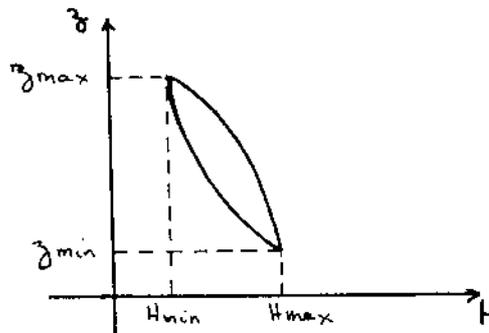


FIGURE 35

Les lignes de poussées horizontales extrêmes sont tangentes (ou sécantes s'il s'agit du dernier joint) par demi-voûte en un point à l'extrados sous la côte z et en un point à l'intrados. Le point d'extrados ou d'intrados est le joint de clé s'il y a troncature du domaine par la côte. Nous ne présenterons pas ici les démonstrations des propriétés de caractérisation de ces lignes, qui ont d'ailleurs été données par SCHEFFLER (1857), (dans le cas d'un chargement vertical). Ce sont les suivantes :

- La ligne de poussée horizontale minimale peut être de deux types : le point A de tangence à l'extrados est au-dessus du point B de tangence à l'intrados, lequel peut être situé avant ou après B en parcourant la ligne depuis la clé. En outre, elle passe à la côte maximale à la clé.

- La ligne de poussée horizontale maximale est d'un type unique : le point A de tangence à l'extrados est au-dessous du point B de tangence à l'intrados, lequel est toujours situé avant A en parcourant la ligne depuis la clé. En outre, elle passe à la côte minimale à la clé.

Ces propriétés sont d'ailleurs tout à fait analogues aux propriétés trouvées pour les lignes de poussée horizontale extrême passant par le point K du type de tangence extrados-intrados.

4.33. - Caractérisation de la ligne des centres de pression lorsque la deuxième condition de stabilité affaiblie est atteinte (critère de traction)

Lorsque la deuxième condition de stabilité affaiblie est atteinte, il n'existe plus qu'une seule ligne de centres de pression interne à la voûte. Cette ligne vérifie donc $H_{min} = H_{max}$: c'est une ligne de poussée horizontale minimale et maximale. Elle possède donc les caractères de tangence de ces deux types de ligne. Nous ne donnerons pas ici toutes les formes possibles de cette ligne mais un caractère essentiel en est qu'elle possède au moins quatre points de contact avec l'intrados et l'extrados, alternativement à l'intrados et à l'extrados.

L'interprétation de cette "forme" est très simple. Cette condition de "tangence" a été démontrée dans l'annexe 1 en utilisant un champ de vitesses simple : la section où se produit la tangence est en rotation relative par rapport à la section précédente. Le centre de rotation se trouvant sur l'extrados ou l'intrados. Il en résulte que le "mécanisme de ruine" de la voûte est un mécanisme par blocs au nombre de 5, tournant autour des 4 arêtes ainsi définies. Nous avons mis le mot "mécanisme de ruine" entre guillemets puisque théoriquement ce mécanisme n'a rien de réel. Il est néanmoins semblable à ce qui a été constaté lors de multiples expériences.

Le "schéma de ruine" est différent lorsque l'on a affaire à un problème symétrique où l'on a au moins 5 points de contact si l'un d'eux se trouve sur le joint de clé et 6 s'il n'y en a pas sur ce joint.

On retrouve donc que cette méthode d'approche consiste effectivement en une approche par l'extérieur : c'est la méthode duale de la méthode utilisant des champs de vitesses correspondant à des mouvements deblocs.

4.34. - Une propriété utile des lignes de poussée horizontale minimale et maximale passant par le point k appartenant au joint de clé

Nous avons vu que par un point K appartenant au joint de clé, s'il passe une ligne de centres de pression interne à la voûte, il passe une ligne de poussée horizontale minimale et une ligne de poussée horizontale maximale. Ces lignes ont au moins deux points de contact avec les contours de la voûte et nous avons différencié ces lignes suivant la position de leurs points de contact.

Nous allons montrer les propriétés suivantes :

- Toute ligne de centres de pression passant par le point K, tel que $H_{\min}(K) \leq H_{\max}(K)$, et rencontrant en deux points l'intrados et/ou l'extrados de la voûte,
- a une poussée horizontale inférieure à $H_{\min}(K)$ si ces deux points vérifient les propriétés de tangence d'une ligne de poussée minimale et est extérieure à la voûte en au moins un point,
- a une poussée horizontale supérieure à $H_{\max}(K)$ si ces deux points vérifient les propriétés de tangence d'une ligne de poussée maximale et est extérieure à la voûte en au moins un point.

DEMONSTRATION :

Nous ne présenterons la démonstration que dans un seul cas. Supposons que la ligne de poussée minimale passant par K soit une ligne du type tangence intrados droit-intrados gauche.

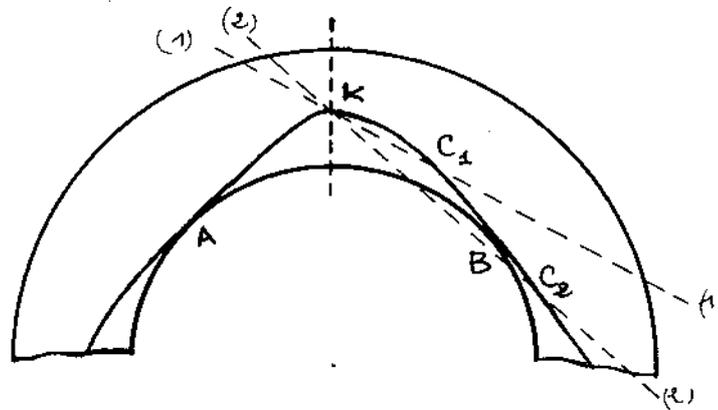


FIGURE 36

Soit (K, H, V) cette ligne et soit (K, H', V') une autre ligne passant par K vérifiant $H' > H$.

Comme H' est supérieur à H , la ligne (K, H', V') sera toujours plus proche que la ligne (K, H, V) de la droite d'intersection qui passe par K.

- Si les deux lignes ont un seul point d'intersection, donc K, il est clair que la ligne (K, H', V') est externe et qu'elle ne peut pas couper les contours de la voûte soit à droite et à gauche de la clé à l'intrados soit d'un même côté de la clé à l'intrados et à l'extrados.

- Si les deux lignes ont au moins deux points d'intersection, nous raisonnerons sur le cas particulier de la figure n° : mais le cas est général.

a) - soit la droite d'intersection est la droite KC_1 (cas 1)
 (K, H, V) est donc :

- au-dessus de (K, H, V) à gauche de la clé et ne peut donc pas couper l'intrados,
- entre KC_1 et (K, H, V) entre K et C_1 et peut donc couper l'intrados en D si KC_1 est en-dessous de l'intrados. Elle peut également couper l'extrados en E mais en-dessous de KC_1 après le point C_1 . Il en résulte que KD est au-dessus de KE et que cette ligne vérifie les propriétés de contact d'une ligne de poussée maximale.

b) - Soit la droite d'intersection est la droite KC_2 (cas 2)
 (K, H, V) est donc :

- au-dessus de (K, H, V) à gauche de la clé et ne peut donc pas couper l'intrados,
- entre KC_2 et (K, H, V) entre K et C_2 : elle coupe donc l'intrados en 2 points situés de part et d'autre de B et peut ensuite couper l'extrados après C_2 . La conclusion est alors identique au cas précédent.

Les conclusions sont évidemment semblables si l'on considère des droites d'intersection de pente négative.

Nous avons donc montré sur ce cas particulier la première partie de la propriété. La seconde partie est par ailleurs évidente. Si la ligne était tangente aux deux points, elle serait une ligne de poussée minimale qui est unique donc elle est sécante en au moins l'un des deux points.

CONSEQUENCE :

Supposons que la famille \mathcal{F} est la famille \mathcal{F}_3 de joints indexée par $I = (\text{seg}, \text{sed})$. (C'est, comme nous l'avons signalé, cette famille qui définit les lignes internes à la voûte dans cet exposé).

Soit K un point appartenant au joint de clé.

S'il existe une ligne interne à la voûte passant par K , il existe une ligne de poussée horizontale minimale et une ligne de poussée horizontale maximale. Il est facile de les encadrer comme suit : Par trois points, il passe une et une seule ligne de centres de pression (sauf si les trois points sont alignés) :

- Soit une sous famille finie \mathcal{F}_n indexée par $I = (1, n)$ de joints.
- Soit A un point du joint i appartenant soit à l'intrados soit à l'extrados.
- Soit B un point du joint j appartenant soit à l'intrados soit à l'extrados.

Le triplet (K, A, B) détermine une ligne (K, H, V) donc une poussée horizontale notée $H_{\mathcal{F}_n K}(A, B)$. Il résulte de ce qui précède que :

$$\bullet \text{Hmin}_{\mathcal{F}_n}(K) = \text{Max}_{\substack{i \in I \\ j \in I}} \left\{ H_{\mathcal{F}_n K}(A, B) \mid A \in \text{joint } i, B \in \text{joint } j, A \text{ et } B \right.$$

Vérifiant la propriété de "contact" d'une ligne de poussée horizontale minimale}

et $\text{Hmin}_{\mathcal{F}_n}(K) \leq \text{Hmin}(K) (= \text{Hmin}_{\mathcal{F}_0}(K))$.

$$\bullet \text{Hmax}_{\mathcal{F}_n}(K) = \text{Min}_{\substack{i \in I \\ j \in I}} \left\{ H_{\mathcal{F}_n K}(A, B) \mid A \in \text{joint } i, B \in \text{joint } j, A \text{ et } B \right.$$

Vérifiant la propriété de "contact" d'une ligne de poussée horizontale maximale}

et $\text{Hmax}_{\mathcal{F}_n}(K) \geq \text{Hmax}(K) (= \text{Hmax}_{\mathcal{F}_0}(K))$.

- Si $\text{Hmin}_{\mathcal{F}_n}(K) \leq \text{Hmax}_{\mathcal{F}_n}(K)$, il existe au moins une ligne interne à la famille de joints \mathcal{F}_n passant par K mais pas nécessairement à la famille de joints \mathcal{F} .
- Il en résulte que s'il n'existe pas de ligne interne à la sous famille \mathcal{F}_n , il n'existe pas de ligne interne à la famille \mathcal{F} et la voûte est certainement instable.

On dispose donc d'un moyen simple de "détermination" des lignes de poussées extrémales en n'omettant pas la condition de compressivité des lignes qui peut, éventuellement réduire le domaine (z, H, V) .

5 - METHODE DES LIGNES INTERNES POUR LA DETERMINATION DE LA "STABILITE D'UNE VOUTE"

Les développements présentés au chapitre 4 permettent de définir pour une voûte de géométrie donnée, soumise à un chargement Q donné le domaine (z, H, V) des lignes de centres de pression internes et compressives pour la famille de joints .

Nous avons vu au § 3.2. que pour que la voûte soit stable sous le chargement Q, il est nécessaire qu'il existe au moins une ligne de centres de pression associée à la famille \mathcal{F} qui satisfasse les conditions 3.1. et 3.2.

S'il existe une ligne qui satisfasse la condition 3.1, le domaine (z, H, V) est non vide. Dans ce cas, on peut rechercher sur l'ensemble des lignes "appartenant" à ce domaine les lignes qui satisfont la condition 3.1. complète.

S'il existe au moins une ligne qui vérifie le critère de résistance en compression, il existe alors une ligne de poussée horizontale minimale et une ligne de poussée horizontale maximale vérifiant ce critère. On peut raisonner de la même manière que pour les lignes internes, c'est-à-dire :

- Rechercher parmi les lignes qui passent par un point K appartenant au joint de clé et de poussée horizontale H fixée, les lignes de poussée verticale minimale $V_{\min_{\mathcal{F}}}(K, H, \sigma_0)$ et maximale $V_{\max_{\mathcal{F}}}(K, H, \sigma_0)$ qui respectent le critère de résistance à la compression. Tant que $V_{\min_{\mathcal{F}}}(K, H, \sigma_0) \leq V_{\max_{\mathcal{F}}}(K, H, \sigma_0)$, il existe de telles lignes. Ces lignes atteignent la contrainte de compression limite σ_0 en au moins un point.
- Les lignes passant par K et de poussées horizontales minimale et maximale vérifient $V_{\min_{\mathcal{F}}}(K, H_{\min_{\mathcal{F}}}(K), \sigma_0) = V_{\max_{\mathcal{F}}}(K, H_{\min_{\mathcal{F}}}(K), \sigma_0)$ et $V_{\min_{\mathcal{F}}}(K, H_{\max_{\mathcal{F}}}(K), \sigma_0) = V_{\max_{\mathcal{F}}}(K, H_{\max_{\mathcal{F}}}(K), \sigma_0)$. Ces lignes atteignent la contrainte de compression limite en au moins deux points dont les positions sont analogues à celles des points de tangence des lignes internes de poussées horizontales minimale et maximale.

Tant que $H_{\min_{\mathcal{F}}}(K) \leq H_{\max_{\mathcal{F}}}(K)$, il existe de telles lignes.

- Il suffit ensuite de faire varier le point K pour obtenir les lignes de poussées horizontales minimale $H_{\min_{\mathcal{F}}}$ et maximale $H_{\max_{\mathcal{F}}}$.

La méthode de calcul que nous proposons est la suivante :

- On définit le domaine (z, H, V) des lignes internes et compressives.
- Si ce domaine n'est pas vide, il faut s'assurer qu'il existe au moins une ligne de centres de pression interne et compressive vérifiant complètement la condition 3.1. On procède comme suit:
 - Soit une ligne de centres de pression $(M_i, N_i)_{i \in I}$ associée à la famille de joints \mathcal{F}_n et soit la fonction :

$$i \longrightarrow \frac{\sigma_i}{\sigma_0} = \frac{N_i R_i}{S_i \sigma_0} / \left(R_i - \frac{|M_i|}{N_i} \right)$$

Cette fonction a un maximum $\lambda_{\mathcal{F}_n}$ atteint pour au moins un joint de la famille pour la ligne considérée : $\lambda_{\mathcal{F}_n}$ est une fonction de z, H et V .

- Si le minimum de $\lambda_{\sigma_n}(z, H, V)$ sur le domaine (z, H, V) des lignes internes et compressives est inférieur à 1, alors il est possible de trouver une ligne qui satisfasse la condition 3.1. et la valeur minimale de λ_{σ_n} est l'inverse du coefficient de rupture relatif à la condition 3.1.

Il est en effet facile de voir que si une ligne de centres de pression (z, H, V) est définie pour un chargement (Q) la ligne (z, kH, kV) est relative au chargement (kQ) : ces deux lignes sont identiques et les valeurs de la fonction λ_{σ_n} relatives à ces deux lignes sont dans le rapport k .

Si donc ce minimum est inférieur à 1, il est ensuite facile de calculer les lignes de poussées horizontales minimale et maximale respectant le critère 3.1. : ce sont des lignes vérifiant $\lambda_{\sigma_n} = 1$.

Le traitement numérique d'une telle méthode est simple : dans ce traitement, on distinguera la discrétisation prévue par la théorie en joints et la discrétisation de calcul numérique, en particulier pour le calcul des chargements.

REMARQUE 1 :

Il est possible de traiter avec une telle méthode une voûte non homogène dans le sens des abscisses curvilignes. Il suffit en effet de considérer la fonction :

$$i \rightarrow \frac{\sigma_i}{\sigma_{0i}} = \frac{N_i h_i}{\sigma_{0i} S_i} / \left(h_i - \frac{|M_i|}{N_i} \right)$$

où σ_{0i} est la résistance à la compression sur le joint i .

REMARQUE 2 :

La méthode des lignes internes permet d'atteindre les lignes de centres de pression de poussée extrême, aussi bien pour le critère de traction seul que pour le critère de traction-compression. Ceci est d'un grand intérêt pour le calcul de la stabilité des appuis de la voûte.

REMARQUE 3 :

Une méthode analogue peut être développée pour prendre en compte le critère de frottement. Supposons déterminé le domaine des lignes de centres de pression satisfaisant à la condition 3.1. par la méthode décrite ci-dessus. Pour chaque ligne (z, H, V) on recherche le maximum t de la fonction :

$$i \rightarrow t_i = \frac{|T_i|}{N_i \tan \varphi_i}$$

où φ_i est l'angle de frottement associé au joint i . Ce maximum t est atteint pour au moins un joint de la famille \mathcal{F} : t est une fonction de z, H, V . Si le minimum de $t(z, H, V)$ sur le domaine des lignes satisfaisant à la condition 3.1. est inférieur à 1, alors il est possible de trouver au moins une ligne qui satisfasse la condition 3.2. On peut alors déterminer l'ensemble des lignes qui satisfont les deux conditions 3.1. et 3.2. simultanément: le minimum de t sur cet ensemble est l'inverse du coefficient de rupture. Il est en effet clair que si la ligne (z, H, V) relative au chargement (Q) vérifie la condition 3.2., pour un chargement (kQ) , on pourra considérer la ligne (z, kH, kV) et cette ligne vérifiera la condition 3.2., les deux fonctions $t \rightarrow t_i$ pour ces deux lignes étant égales.

6 ANALYSE DE QUELQUES METHODES DE CALCUL EXISTANTES

Nous n'examinerons que des méthodes s'apparentant au calcul à la rupture et nous exclurons des théories "inéfficaces" comme la théorie du coin (LAHIRE, ...).

6.1. - COULOMB (1773) Application des règles de maximis et de minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture

Rappelons ici brièvement l'esprit de cette théorie :

- Soit une portion de voûte ABCD où CD est le joint de clé (figure n°).

COULOMB fait intervenir le frottement et la cohésion du matériau (ou de l'interface) constituant les joints de la voûte.

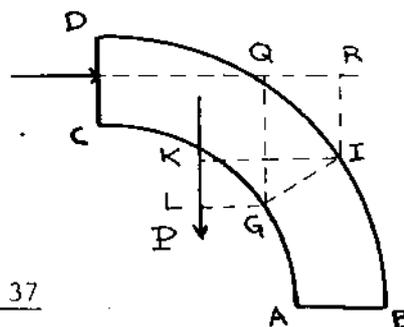


FIGURE 37

Il montre que la valeur de la poussée horizontale H à la clé (le chargement est symétrique) nécessaire pour "amorcer" le glissement le long d'un joint GI est telle que ce "mode de rupture" ne peut pratiquement pas se produire.

Il en conclut que si le critère de résistance est atteint sur le joint GI, la rupture se produit par rotation de la portion CDGI de la voûte autour de l'arête G ou de l'arête I.

. Soit P est le poids de cette portion CDGI :

- la rotation se produira en G si :

$$H = H_1 = P \frac{LG}{QG}$$

- la rotation se produira en I si :

$$H = H_2 = P \frac{PI}{RI}$$

COULOMB montre alors que :

- . La valeur minimale de la poussée horizontale H peut être obtenue en faisant varier le joint GI (c'est alors le maximum de H1) et le point d'application de H à la clé qu'il ne place qu'en C ou en D.
- . La valeur maximale de la poussée horizontale peut être obtenue en faisant varier le joint GI (c'est alors le minimum de H2) et le point d'application de H à la clé qu'il ne place qu'en C ou en D.

Il en déduit la position des "joints de rupture" et à la limite de stabilité, la division de la voûte en quatre portions.

COULOMB prend en compte également la résistance finie à la compression du matériau puisqu'il remarque que la résultante des pressions doit s'écarter assez de l'arête de rotation des joints, pour éviter l'écrasement de la partie avoisinante.

Nous ne partageons pas le sentiment de PONCELET (1852) qui, après avoir évoqué les règles établies par COULOMB pour éviter l'écrasement des maçonneries, écrit :

"La généralité et le vague dans lesquels COULOMB s'était renfermé sur ce point (à savoir : l'étendue de la surface réelle d'appui entre deux voussoirs et la répartition des pressions sur les joints qui restent indéterminées) et celui qui concerne la position de la poussée à la clé, le défaut même d'exemple ou de toute application des principes à des cas spéciaux, suffisent pour expliquer comment les belles et utiles conceptions de cet illustre Ingénieur étaient demeurées, jusque dans ces derniers temps, en un complet oubli, malgré leur valeur scientifique et pratique".

En fait, avec les moyens de son époque, COULOMB a fait exactement le raisonnement du calcul à la rupture en mêlant tout à la fois l'équilibre et la cinématique de la ruine mais son approche est correcte.

C'est cette approche que nous avons développée, en donnant une méthode de détermination des poussées horizontales minimale et maximale.

6.2. -Epure de Méry (1840)

Il existe de nombreuses variantes de la méthode dite de l'épure de MERY mais comme MERY a présenté sa méthode dans un article publié dans les Annales des Ponts et Chaussées en 1840, nous nous réfèrerons d'abord à cet article. Signalons comme le signale FOURNIE (1864), que cet article était déjà rédigé en 1833 : il n'a subi par la suite que quelques modifications.

L'hypothèse de base du mémoire de MERY est que la voûte est "découpée" en un nombre infini de joints plans et que les voussoirs n'ont aucune adhérence entre eux.

Les conclusions de MERY sont les suivantes dans le cas d'un problème symétrique :

- " L'intrados et l'extrados forment deux limites dont la courbe des pressions ne doit jamais sortir, et, lorsque cela arrive, l'équilibre est impossible" (critère de traction).
- " Il faut que la courbe des pressions (identique à la ligne des centres de pression) soit assez loin de l'extrados et de l'intrados (critère de compression). Nous expliciterons cette phrase ci-dessous.
- " La courbe des pressions donne la mesure de la tendance au glissement, par l'inclinaison sur chaque "joint" (la tangente de l'angle de frottement est prise égale à 0,50). MERY admet ici qu'il faudrait en fait examiner l'inclinaison de la résultante sur le joint et non l'inclinaison de la courbe mais il considère "l'approximation suffisante".
- " Il suffit, pour la solution du problème d'équilibre des voûtes, de considérer deux positions extrêmes (de la courbe des pressions), qui correspondent l'une au maximum de la poussée et l'autre au minimum".

Le tracé de ces courbes de pression limites est fait par tâtonnements. MERY donne, dans le cas où la résistance à la compression serait infinie, le nombre de points de tangence à l'extrados et à l'intrados de ces courbes. On notera qu'elles ne sont pas nécessairement tangentes à la clef à l'extrados ou à l'intrados, bien que ce soit un cas très fréquent.

Si en outre on tient compte de la résistance à la compression des matériaux, la courbe des pressions sera renfermée dans des limites plus resserrées que celles du contour de la voûte. La distance au contour de la voûte est fixée par MERY à partir de la prise en compte d'un comportement élastique des matériaux (répartition trapézoïdale ou triangulaire des contraintes normales au joint) : elle doit être telle qu'elle puisse supporter les deux tiers de la pression à laquelle est exposé le joint (c'est dans cet article que l'on trouve le "taux de travail" admissible des maçonneries égal au dixième de la résistance à la compression du matériau).

L'approche de MERY est donc identique dans l'esprit à celle de COULOMB et à celle que nous présentons.

- Si l'on ne considère que le critère de résistance à la traction, c'est une approche par l'extérieur mais la méthode n'est pas précisée suffisamment : la caractérisation des courbes de poussée maximale et minimale est surtout laissée au savoir faire et à l'intuition de l'Ingénieur.
- Si l'on considère le critère de résistance en traction-compression, la condition de stabilité donnée par MERY équivaut à dire que $\frac{|M|}{N} = e \leq R \left(1 - \frac{4}{3} \frac{N}{\sigma_s}\right)$, alors que nous avons montré que si l'on ne pouvait pas trouver une ligne de centres de pression vérifiant partout $e \leq h \left(1 - \frac{N}{\sigma_s}\right)$, alors la voûte était certainement instable. La condition donnée par MERY étant plus défavorable, son approche n'est plus une approche par l'extérieur. Remarquons cependant que cette "perte de signification" n'est due qu'à une mauvaise appréciation de l'effort normal "limite" en fonction de la résistance à la compression. En outre, la résistance "admissible" adoptée par MERY est égale au dixième de la résistance à la compression mais c'est là un autre problème que nous n'évoquerons pas ici.

La méthode de l'œuvre de MERY, (qui doit son nom à la construction graphique de la courbe des pressions qui lui est associée) a par la suite été dénaturée puisqu'elle est généralement présentée comme suit :

- . Soit une voûte de géométrie fixée soumise à un chargement (Q) et dont le matériau n'a pas de résistance à la traction et a une résistance à la compression .

Il est toujours possible de trouver une ligne de centres de pression passant par deux ou trois points fixés à l'avance selon que le problème est symétrique ou dissymétrique. Les points choisis sont les suivants, en général :

- Dans le cas d'un problème symétrique :

- . le tiers central supérieur à la clé,
- . le tiers central inférieur aux "reins", c'est à dire une position dépendant de la forme de la voûte et fixée pour les voûtes en plein cintre à 60° par rapport au joint de clé.

- Dans le cas d'un problème dissymétrique :

- . le milieu du joint à la clé,
- . le tiers central inférieur aux reins situés du côté surchargé.

Ces points de passage imposés, autres que celui de la clé, sont situés sur les "joints de rupture". Dans certaines méthodes, ils sont situés aux naissances (Ecole Allemande de la fin du XIXème siècle), dans d'autres (par exemple CROIZETTE-DESNOYERS 1885) leur position n'est pas fixée à l'avance : elle est déterminée comme suit :

- Dans le cas d'un problème symétrique :

- . On peut tracer à l'intérieur de la voûte le fuseau du tiers central. On cherche la ligne passant par le point supérieur de ce fuseau à la clé et tangente à l'intrados de ce fuseau. Le point de tangence fixe la position du joint de rupture et la poussée horizontale correspondante est celle qui sera prise en compte dans les calculs.

La voûte est ensuite découpée en un certain nombre de voussoirs plus grands que les voussoirs réels afin de ne pas trop compliquer les calculs. Elle sera déclarée stable si :

- . La ligne de centres de pression déterminée ci-dessus reste à l'intérieur du tiers central à l'exception toutefois de quelques points.
- . La contrainte normale aux joints ne dépasse pas le dixième de la contrainte de rupture en compression simple du matériau. La contrainte normale maximale est calculée par un calcul élastique du type béton armé, c'est à dire avec une répartition de contraintes trapézoïdale ou triangulaire.

On voit apparaître dans cette méthode d'approche de la stabilité d'une voûte des considérations d'élasticité, ce qui n'est pas étonnant étant donné le développement de la théorie de l'élasticité au XIXème siècle. On peut lui faire les critiques suivantes :

- 1) - La ligne de centres de pression considérée n'est pas nécessairement une "bonne" ligne : le fait d'imposer le point de passage à la clé fausse la méthode. On ne pourra pas prouver qu'il n'existe pas de lignes de centres de pression vérifiant Néanmoins, il faut souligner qu'à l'époque où l'on construisait encore des voûtes, c'était une méthode utilisée pour la mise au point d'un projet : dans ce cas, cette ligne existe. Par contre, on utilise encore cette méthode pour la vérification des voûtes : alors cette méthode pourra conduire à des conclusions d'instabilité dans des cas où la voûte serait stable.

- 2) - La condition de ligne interne au tiers central est souvent invoquée pour respecter le critère de résistance à la traction (NAVIER 1816 par exemple). Elle résulte évidemment de la théorie de l'élasticité. C'est une condition qui fait également perdre le caractère d'approche par l'extérieur à la méthode.

- 3) - La condition de résistance à la compression résulte aussi de la théorie de l'élasticité. Elle fait aussi perdre le caractère d'approche par l'extérieur à la méthode. Une fois encore, nous n'évoquerons pas ici le problème de la résistance admissible considérée. On ne peut en tout cas pas lui donner la signification d'un coefficient de rupture.

Ces trois points doivent conduire à l'élimination de la méthode de l'épure de MERY comme "mesure" de la stabilité potentielle d'une voûte.

6.3. - SCHEFFLER : Traité de la stabilité des constructions - (1857)

SCHEFFLER considère dans un premier temps que le matériau constitutif de la voûte n'a pas de résistance à la traction et a une résistance à la compression infinie. Il traite également de la condition de frottement mais la considère comme peu importante, comme le font en général tous les auteurs.

Il affirme alors que pour que la voûte puisse demeurer en équilibre, il faut que la ligne des centres de pression soit intérieure à la voûte sur des joints fixés au préalable et que la résultante sur chacun de ces joints fasse avec la normale un angle inférieur à l'angle de frottement. Il s'agit donc bien d'une approche par l'extérieur.

L'intérêt du traité de SCHEFFLER réside dans les caractérisations qu'il donne pour les lignes de centres de pression de poussée minimale et maximale qu'il donne dans le cas des problèmes symétrique et dissymétrique pour des chargements verticaux. Mais il ne donne pas de méthode pratique simple (les moyens de calcul n'étaient pas alors les mêmes que ceux d'aujourd'hui !) pour leur tracé et de plus, dans le cas de problème dissymétrique, cette caractérisation est insuffisante. En fait, il n'est pas passé par l'intermédiaire des lignes de poussée horizontale extrême passant par un point donné à la clé et le problème devenait alors trop complexe.

SCHEFFLER évoque aussi le critère de résistance à la compression "qui fait reculer la ligne des centres de pression dans l'intérieur de la voûte" mais il ne traite de la question que pour rejeter l'hypothèse de comportement élastique.

Signalons, pour la petite histoire, que SCHEFFLER énonce dans ce traité un principe de la moindre résistance "qui lorsqu'il l'applique aux voûtes, lui fait dire que c'est la ligne de poussée minimale qui s'instaure.

6.4. - A. DURAND-CLAYE (1867 ET 1880)

La méthode trouvée par A. DURAND-CLAYE est sans doute la méthode la plus intéressante du XIXème siècle. Avant de la décrire, nous rappellerons quelques réflexions qu'il a présentées en 1867 dans les Annales des Ponts et Chaussées : "Mais pour que le tracé de cette courbe (la courbe des centres de pression) ait quelque valeur, ... il convient de définir rationnellement la poussée qui lui sert d'origine A chaque valeur prise par la poussée, à chaque point d'application correspond une courbe de pression : on cherche si parmi ces courbes il s'en trouve une correspondant à l'équilibre ... Ainsi, recherche de la possibilité d'une solution d'équilibre, voilà quel est le véritable sens de la construction et des tâtonnements indiqués par M. MERY ". (Equilibre est pris au sens respect des critères de résistance du matériau constitutif).

Notons également : "On n'a aucune idée du degré de stabilité de la voûte puisqu'on s'arrête dès qu'une courbe d'équilibre est trouvée et que la voûte peut en contenir une infinité"...

Ce sont ces tâtonnements et ces hypothèses arbitraires (joints de rupture prédéterminés) que nous cherchons à supprimer...Nous déterminerons toutes les solutions d'équilibre que peut comporter la voûte".

Il ne manque dans ces considérations que le mot d'"approche par l'extérieur" et que la conclusion d'instabilité certaine pour retrouver la théorie du calcul à la rupture.

La méthode est la suivante. (Elle n'est donnée que pour un problème symétrique et des charges verticales). Nous ne parlerons pas du critère de frottement bien qu'il ait été traité mais il est d'importance moindre.

DURAND-CLAYE part de l'affirmation suivante : si le matériau n'a pas de résistance à la traction et si sa résistance à la compression est σ_0 , l'effort normal N sur un joint est limité et cette limite dépend de l'excentrement de la résultante. Il calcule cette valeur limite $N(e)$ en adoptant un comportement élastique du matériau et en considérant que la maçonnerie tendue ne reprend aucun effort (calcul de béton armé par exemple). On obtient classiquement, pour une voûte d'épaisseur $2h$:

$$\begin{aligned} \bullet \quad |e| \geq h/3 \quad N_e &= \frac{3}{4} \sigma_0 S \left(1 - \frac{|e|}{R}\right) \\ \bullet \quad |e| \leq h/3 \quad N_e &= \frac{\sigma_0 S}{1 + 3\frac{|e|}{R}} \end{aligned}$$

Si donc une voûte est en équilibre, sur aucun joint, cet effort limite n'est dépassé.

Or, il est simple, connaissant le centre de pression et l'effort normal sur un joint S , de déterminer la ligne des centres de pression correspondante et donc le centre de pression K correspondant. Il montre alors que l'ensemble des extrémités des vecteurs, (K, H) correspondant aux efforts normaux limites sur le joint S se trouve sur une courbe composée de branches d'hyperboles.

On peut bien entendu faire la même construction pour le joint de clé et on trouve ainsi une seconde courbe pour les extrémités des vecteurs (K, H) correspondant aux efforts normaux limites sur le joint de clé.

Les extrémités des vecteurs (K, H) admissibles pour le joint S et le joint de clé se trouvent donc dans une aire $A(S)$ limitée par ces deux courbes.

L'ensemble des extrémités des vecteurs (K, H) admissibles pour une famille \mathcal{F} de joints (S_i) , $i \in I$ est donc constitué par l'intersection des aires $A(S_i)$, appelé par DURAND-CLAYE, aire-résidue. "Si la superposition ne donne pas d'aire-résidue, la stabilité est impossible".

Il montre ensuite que l'aire-résidue donne les joints faibles ou de rupture définis par les courbes de pression issues des "sommets" de l'aire comme nous l'avons montré pour les lignes internes.

Enfin, DURAND-CLAYE définit un coefficient de stabilité comme suit : s'il existe des solutions d'équilibre possibles, c'est-à-dire si l'aire-résidue est non nulle, pour la contrainte de rupture à la compression σ_0 , il existe une valeur σ'_0 de cette contrainte de rupture pour laquelle l'équilibre limite est atteint. Le coefficient de stabilité est alors le rapport $\frac{\sigma'_0}{\sigma_0}$.

En fait, σ_0 est une contrainte admissible de compression que l'on se fixe a priori.

Nous avons obtenu que pour que la voûte soit stable sous le chargement (Q), il faut que sur chaque joint d'une famille \mathcal{F} l'effort normal défini par une ligne de centres de pression associée à \mathcal{F} vérifie :

$$0 \leq N_i \leq N(C_i) = \sigma_0 S \left(1 - \frac{|e|}{R} \right)$$

ou : $|e| \leq R$ si $N_i = 0$

A l'exception de la mise en oeuvre des calculs, c'est là que réside la seule différence entre la méthode de DURAND-CLAYE et celle présentée dans cet exposé.

Il est clair que si une voûte est déclarée instable par la méthode de DURAND-CLAYE elle le sera aussi par la méthode des "lignes internes" exposée ici mais que l'inverse est faux : Si N est supérieur à N_q , et inférieur à $N(C_i)$, on peut trouver une répartition de contraintes σ sur le joint correspondant équilibrant M et N .

Cette méthode doit donc être modifiée en considérant comme effort normal limite $N(C_i)$. Elle nécessite cependant des calculs préalables à un programme informatique assez importants dans le cas de problème dissymétrique.

7.- COMPARAISON DES RESULTATS FOURNIS PAR LE CALCUL A LA RUPTURE AVEC LES RESULTATS EXPERIMENTAUX

Nous analyserons ici deux exemples :

- Le premier concerne des essais effectués sur des voûtes plein cintre avec piédroits verticaux au CEBTP à SAINT-REMY-LES-CHEVREUSE, essais réalisés pour le compte de la SNCF, de la RATP et du CETU en 1979-1980. (TAIK M. MARHRAOUI M. 1980, et article à paraître).
- Le second concerne des essais réalisés par PIPPARD et ASHBY sur des arcs en voussoirs de béton en 1939.

7.1. - Essais du CEBTP

Le but de ces essais est d'apprécier la stabilité de voûtes en maçonnerie de tunnels et le renforcement apporté par des coques en béton projeté.

La géométrie des voûtes et les types de chargements sont donnés à la figure n°

La densité de charge q_0 est fonction de l'effort P_v appliqué par des vérins à la voûte.

Les surcharges latérales, normales à l'intrados, représentent la poussée des terres.

Les surcharges appliquées à la voûte, les résultats des essais et les résultats du calcul (coefficient de rupture et position des joints de rupture) sont donnés ci-après.

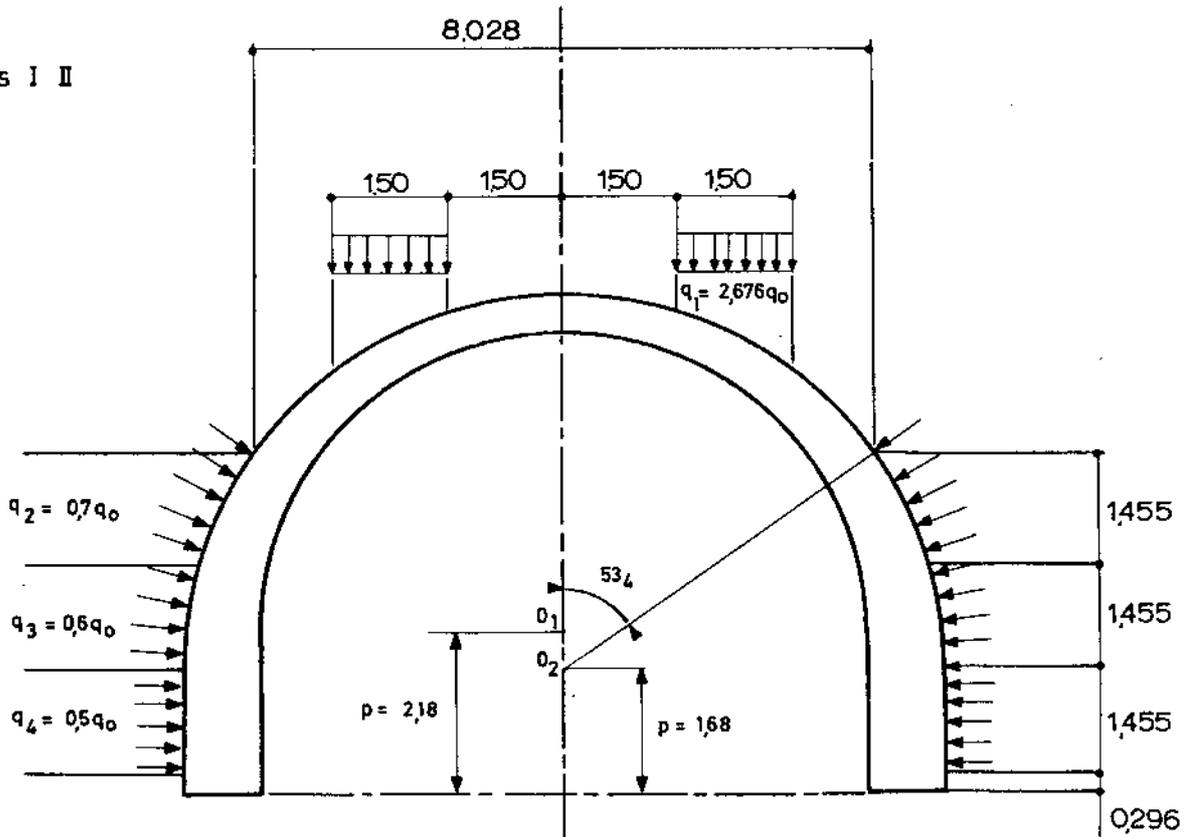
On notera que dans les essais, la rupture des voûtes non renforcées n'a jamais été atteinte puisque l'on voulait conserver la voûte pour la renforcer par une coque en béton projeté. Les charges de ruine correspondantes sont certainement sous estimées.

Ces résultats appellent les remarques suivantes :

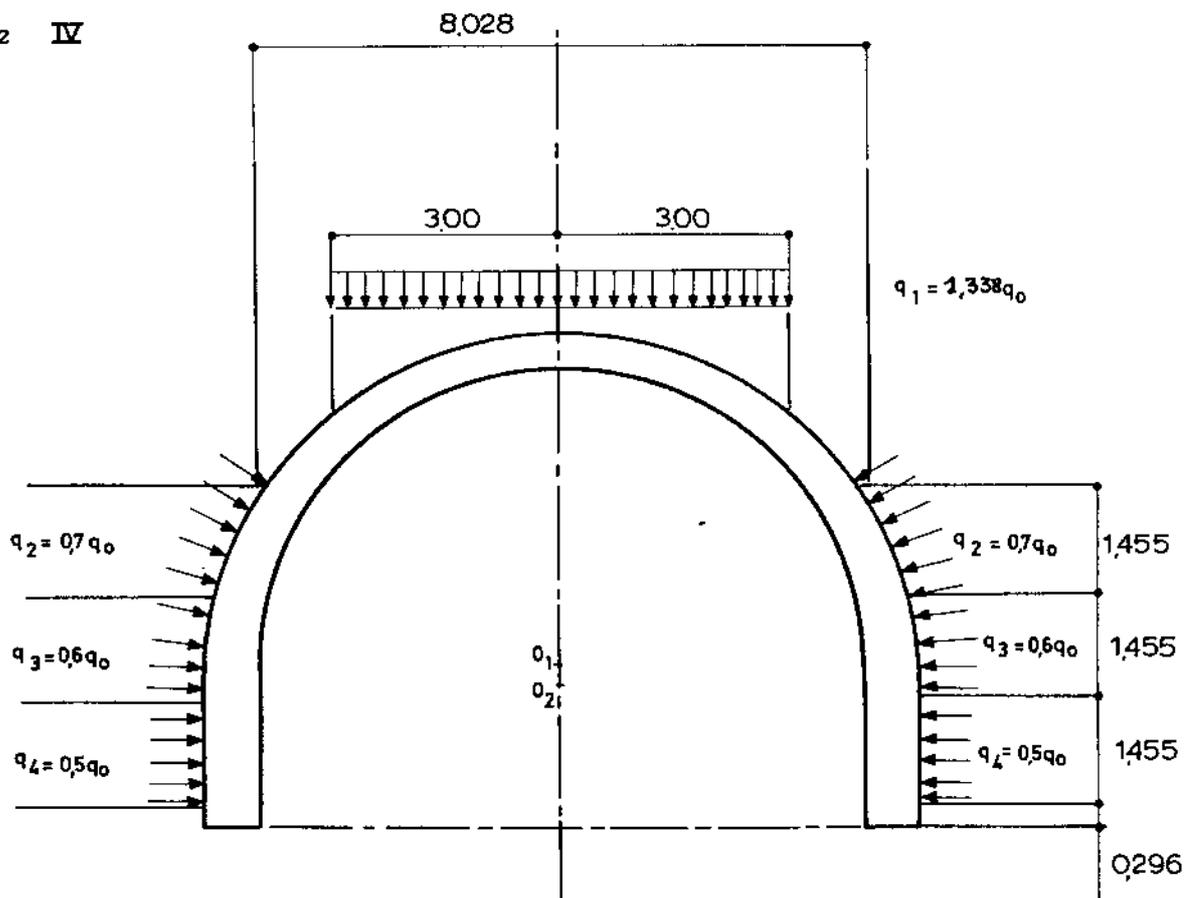
- On obtient un très bon accord entre la position des joints de rupture expérimentaux et la position des joints de rupture calculés dans tous les cas.
- Les charges de rupture calculées sont nettement supérieures aux charges de rupture mesurées (indépendamment de la remarque faite ci-dessus) pour les voûtes 1 et 2. On a donc bien une approche par l'extérieur et ceci malgré la résistance à la traction du mortier des joints et du béton qui ne sont pas négligeables (mortier : 2,8 MPa et béton 5 MPa).
- Par contre, pour la voûte 4, les charges de rupture calculées pour une résistance à la compression de 1,73 MPa sont nettement inférieures à la charge de rupture expérimentale. On peut se demander si la résistance à la traction du mortier n'intervient pas ici de façon plus importante en raison de la faible qualité de la maçonnerie ou si cette résistance à la compression n'est pas un peu sous estimée. Il a été possible de "caler" le calcul sur le résultat expérimental en prenant une résistance à la compression de la maçonnerie de 5 MPa.
- Dans tous les cas, on obtient un bon accord (compte tenu de la remarque susvisée sur les charges de ruine sous estimées pour la voûte non renforcée) pour les coefficients de renforcement qui "mesurent le gain de sécurité" apporté par la coque en béton projeté.

Définition du chargement

Voûtes I II



Voûte IV



V O U T E n° 1CALCUL DES SURCHARGES (en KN)

$$q_1 = 2,16022 P_v$$

$$q_2 = 0,56508 P_v$$

$$q_3 = 0,48435 P_v$$

$$q_4 = 0,40363 P_v$$

1. Voûte non renforcée $\sigma_M = 5 \text{ MPa}$

P_v (Ruine estimée) = 150 KN (expérience)

Calcul

P_v (KN)	90	120	150	300	430
Coef. rupture	4,14	3,25	2,67	1,39	0,994

2. Voûte renforcée $\sigma_M = 5 \text{ MPa}$

$$\sigma_B = 20 \text{ MPa}$$

$$e_B = 14,4 \text{ cm}$$

P_v (Ruine estimée) = 500 KN (expérience)

Calcul

P_v (KN)	150	270	500	1100
Coef. rupture	6,76	4,02	2,18	1*

* - Valeur estimée par interpolation.

Rapport des charges de rupture des voûtes renforcée et non renforcée :

$$R_1 = \frac{1100}{430} = 2,56$$

Rapport des coefficients de rupture des voûtes renforcée et non renforcée pour $P_v = 150 \text{ KN}$:

$$R_2 = \frac{6,76}{2,67} = 2,53$$

CALCUL DES SURCHARGES (en KN)

$$q_1 = 2,26022 P_v$$

$$q_2 = 0,56508 P_v$$

$$q_3 = 0,48435 P_v$$

$$q_4 = 0,40363 P_v$$

1. Voûte non renforcée $\sigma_M = 4,2 \text{ MPa}$

P_v (Ruine estimée) = 100 KN (expérience)

Calcul

P_v (KN)	90	120	150	300	350
Coef. rupture	3,48	2,73	2,24	1,17	1,02

2. Voûte renforcée $\sigma_M = 4,2 \text{ MPa}$

$$\sigma_B = 23,2 \text{ MPa}$$

$$e_B = 10,8 \text{ cm}$$

P_v (Ruine estimée) = 400 KN (expérience)

Calcul

P_v (KN)	150	270	500	895
Coef. rupture	6,14	3,40	1,82	1*

* - Valeur estimée par interpolation.

Rapport des charges de rupture des voûtes renforcée et non renforcée :

$$R_1 = \frac{895}{350} = 2,56$$

Rapport des coefficients de rupture des voûtes renforcée et non renforcée pour $P_v = 150 \text{ KN}$:

$$R_1 = \frac{6,14}{2,24} = 2,74$$

CALCUL DES SURCHARGES (en KN)

$$q_1 = 1,08011 \text{ Pv}$$

$$q_2 = 0,56508 \text{ Pv} + 5$$

$$q_3 = 0,48435 \text{ Pv} + 5$$

$$q_4 = 0,40363 \text{ Pv} + 5$$

$$\sigma_M = 1,73 \text{ MPa}$$

Pv (Ruine estimée) = 70 KN (expérience).

Calcul

Pv (KN)	10	35	59	60	65	70
Coef. rupture $\sigma_M = 1,73$	4,02	1*	0,41*	0,38	0,35*	0,28*
Coef. rupture $\sigma_M = 4,2$	9,76	2,43*	1*	0,91	0,84*	0,67*
Coef. rupture $\sigma_M = 5,0$	11,62	2,89*	1,19 *	1,09	1*	0,80

* - Valeur estimée par interpolation. (Soit sur une même ligne, soit entre deux lignes).

CALCUL DES SURCHARGES (KN)

$$q_1 = 1,08011 \text{ Pv}$$

$$q_2 = 0,56508 \text{ Pv}$$

$$q_3 = 0,48435 \text{ Pv}$$

$$q_4 = 0,40363 \text{ Pv}$$

$$\sigma_M = 1,73 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = 27 \text{ MPa}$$

$$e_B = 10,8 \text{ cm}$$

Pv (Ruine estimée) = 320 KN (expérience).

Calcul

Pv (KN)	106	150	300	308
<hr/>				
Coef. rupture				
$\sigma_M = 1,73 \text{ MPa}$	1*	0,74	0,42	-
$\sigma_B = 27 \text{ MPa}$				
<hr/>				
Coef. rupture				
$\sigma_M = 5,0 \text{ MPa}$	-	1,81	1,02	1*
$\sigma_B = 27 \text{ MPa}$				
<hr/>				

* - Valeur estimée par interpolation.

POSITION DES JOINTS FAIBLESVoûtes 1 et 2 non renforcées :

<u>CALCUL</u>	<u>EXPERIENCE</u>
I 28°	I 23°
E 54°	E entre 54° et 64°
I base du piédroit	I base du piédroit

voûtes 1 et 2 renforcées :

<u>CALCUL</u>	<u>EXPERIENCE</u>
E joint de clé	E joint de clé
I 28°	I 23°
E 59°	E entre 54° et 64°

Voûte 4 non renforcée :

$$(\sigma_M = 5 \text{ MPa})$$

<u>CALCUL</u>	<u>EXPERIENCE</u>
I joint de clé	I joint de clé
E 49°	E 49°
I base du piédroit	I base du piédroit

Voûte 4 renforcée :

$$(\sigma_M = 5 \text{ MPa})$$

<u>CALCUL</u>	<u>EXPERIENCE</u>
I joint de clé	I joint de clé
E 54°	E 54°
I base du piédroit	I base du piédroit

I : ouverture du joint à l'intrados.

E : ouverture du joint à l'extrados.

Des essais complémentaires sont prévus pour :

- Evaluer la charge de ruine d'une voûte non renforcée en pour-suivant le chargement jusqu'à la ruine,
- analyser le comportement d'une telle voûte sous un chargement dissymétrique.

7.2. - ESSAIS DE PIPPARD-ASHBY (1939)

PIPPARD et ASHBY ont fait dans un premier temps des essais sur voûtes constituées de voussoirs en acier, à joints secs. En 1939, ils ont procédé à des essais sur des voûtes constituées de voussoirs en béton, à joints secs ou à joints de mortier. Plusieurs séries d'essais ont été conduites, en faisant varier la position du chargement et/ou la nature des voussoirs et des joints. Tous les chargements considérés sont des chargements dissymétriques.

La voûte est un arc circulaire d'épaisseur constante (0,25 m), de rayon 1,906 m et de demi ouverture angulaire 53° environ (portée 3,05m et flèche 0,7624 m). Elle est constituée de 23 voussoirs.

Nous donnons ci-après les résultats comparés de cinq essais et des calculs effectués pour les cas de charge correspondants.

Ces résultats appellent les remarques suivantes :

- La charge de rupture calculée est toujours inférieure à la charge de rupture expérimentale. Ceci est dû, sans aucun doute, au fait que l'on néglige la résistance à la traction (comme l'avait déjà remarqué PIPPARD). On constate en effet que pour des charges inférieures à la charge de rupture expérimentale, il n'est pas possible de trouver une ligne interne à la voûte.
- On note une concordance assez bonne entre les joints faibles calculés et les joints de rupture constatés pendant les essais.
- On retrouve l'allure de la variation de la charge de rupture en fonction de la position du point de chargement : décroissance du voussoir 7 au voussoir 6 et croissance ensuite.
- PIPPARD et ASHBY ont procédé à un essai de chargement avec des pierres de résistance à la compression supérieure (46,2 MPa au lieu de 11,9 MPa). Alors que théoriquement, si l'on ne tient pas compte de la résistance à la traction, le rapport des coefficients de rupture, pour une même valeur du chargement, est égal au rapport des résistances à la compression (soit ici environ 3,85), on ne retrouve pas ce résultat expérimentalement.

Le voussoir chargé étant le voussoir 6, on devrait trouver une charge de rupture de l'ordre de 38,5 KN, soit un rapport des charges de ruine de 1,05 au lieu de 1,71, résultat expérimental. On retrouve ici l'influence de la résistance à la traction des joints.

PIPPARD-ASHBY : Voûte chargée dissymétriquement

- $\sigma_0 = 11,9$ MPa
- Chargement léger (voir article 1939, référence 10)
- Série 1 : joints de mortier - pierre calcaire
- Série 2 : joints secs - pierre calcaire
- Les voussoirs sont numérotés de - 11 (naissance gauche) à 0 (voussoir de clé) et de 0 à 11 (naissance droite).

ESSAIS Serie 1

<u>Point de charge</u>	<u>1ère fissuration</u>	<u>2ème fissuration</u>	<u>3ème fissuration</u>	<u>Rupture</u>
Voussoir 7	36,49	68,95	72,19	81,28
Voussoir 3	37,98	64,59	64,59	91,20

ESSAIS Série 2

<u>Point de charge</u>	<u>1ère fissuration</u>	<u>2ème fissuration</u>	<u>3ème fissuration</u>	<u>Rupture</u>
Voussoir 6	41,23	56,81	56,81	76,27
Voussoir 5	35,51	63,43	69,92	76,42
Voussoir 4	24,67	57,13	86,35	86,35

JOINTS FAIBLES

SERIE 1

SERIE 2

<u>SERIE 1</u>		<u>SERIE 2</u>		
<u>Voussoir 7</u>	<u>Voussoir 3</u>	<u>Voussoir 6</u>	<u>Voussoir 5</u>	<u>Voussoir 4</u>
I - 12,-11	I - 12,-11	I - 10,-9	I - 10,-9	I - 12,-11
E - 4,- 3	E - 4,- 3	E - 4,-3	E - 2,-1	E - 4,- 3
I 7,8	I 2,3	I 5,6	I 4,5	I 3,4
E 11,12	E 10,11	E 10,11	E 11,12	E 9,10

PIPPARD-ASHBY : VOUTE CHARGEE DISSYMETRIQUEMENT

- CALCULS I - COEFFICIENT DE RUPTURE -

POINT DE CHARGE	VOUSSOIR 7	VOUSSOIR 6	VOUSSOIR 5	VOUSSOIR 4	VOUSSOIR 3
CHARGE					
24,67	-	-	-	21,90	-
30	-	10,225	-	-	-
33	-	5,69	-	-	-
35	-	3,425	4,675	-	-
56,48	3,24	1,305	3,70	-	-
38	aucune li- gne interne	-	2,555	-	10,65
40	-	-	aucune li- gne interne	-	-
45	-	-	aucune li- gne interne	1,59	-
50	aucune li- gne interne	-	-	-	4,5
57	-	-	-	aucune li- gne interne	1,92
64,6	-	-	-	-	aucune ligne interne

- CALCULS II - CHARGE DE RUPTURE ESTIMEE ET JOINTS FAIBLES -

<u>POINT DE CHARGE</u>	<u>CHARGE DE RUPTURE</u>	<u>JOINTS FAIBLES</u>			
VOUSSOIR 7	38	I -12,-11	E - 3,-2	I 6,7	E 11,12
VOUSSOIR 6	37	I -12,-11	E - 3,-2	I 5,6	E 11,12
VOUSSOIR 5	39,5	I -12,-11	E - 4,-3	I 4,5	E 11,12
VOUSSOIR 4	48	I -12,-11	E - 4,-3	I 3,4	E 10,11
VOUSSOIR 3	61	I -12,-11	E - 5,-4	I 2,3	E 9,10

7.3. - INFLUENCE DE LA RESISTANCE A LA COMPRESSION SUR LES POUSSEES EXTREMALES

L'exemple exposé ci-dessous est celui du pont de Gignac sur l'Hérault et plus précisément de sa voûte centrale. Le calcul a été conduit sur une voûte en anse de panier à trois centres, qui a été considérée d'épaisseur 1,95 m constante, de portée 45,50 m, de flèche 16,13 m et de demi ouverture angulaire 65°.

Le chargement considéré est :

- le poids propre,
- un remblai d'épaisseur 2,05 m à la clé,
- une densité surfacique égale à 17,23 KN/m² sur 9,425 m de part et d'autre de la clé, représentant un convoi exceptionnel.

Les résultats du calcul, correspondant à trois résistances à la compression de la pierre : 5,10 MPa et 50 MPa sont consignés dans le tableau ci-dessous.

CRITERE	TRACTION SEULE	5 MPa	10 MPa	50 MPa
Coefficient de rupture	-	1,18	2,36	11,8
Poussée minimale (KN)	2939	3319	3115	2972
Poussée maximale (KN)	4295	3581	4047	4249
Cote maximale (excentricité)	-1 (extrados)	-0,66	-0,84	-0,97
Cote minimale (excentricité)	+1 (intrados)	-0,15	-0,79	-0,96

On notera également que dans chaque cas, les lignes de poussée extrême ne sont pas en même temps les lignes de cote extrême.

On remarque que, dès que la résistance à la compression du matériau devient faible, les différences sont notables selon que l'on prend en compte un critère de traction seule ou un critère de traction-compression.

HEYMAN (1966) indique qu'une ligne de centres de pression ne peut pas approcher à moins de 5 % le contour de la voûte, si l'on tient compte d'une résistance finie à la compression : cela correspond ici à

peu près au cas d'une résistance de la pierre égale à 50 MPa, résistance d'une pierre de bonne qualité. Il sera donc prudent de procéder à un calcul complet en traction-compression lorsque les matériaux seront de qualité médiocre.

7.4. - ETUDE DU CAS DU PONT DE TESTON : AUTRES COEFFICIENTS DE "SECURITE"

HEYMAN (1977) introduit la notion d'un coefficient de "sécurité géométrique" fondé sur l'existence d'une épaisseur minimale de la voûte pour laquelle le coefficient de rupture vis-à-vis du critère de traction seul vaut 1. Pour le chargement considéré et pour cette épaisseur, il existe une et une seule ligne de centres de pression interne à la voûte. Le coefficient de "sécurité géométrique" est alors défini par le rapport de l'épaisseur réelle de la voûte et de l'épaisseur minimale.

Cette notion, très simple d'emploi pour des voûtes circulaires extradossées parallèlement, peut être étendue sans difficulté à des voûtes de formes quelconque et d'épaisseur variable. En introduisant le critère de compression, on peut l'étendre en définissant ce coefficient de "sécurité géométrique" par :

$$F_g = \frac{e_r}{e_m(\sigma_c, Q)}$$

où - e_r est l'épaisseur réelle de la voûte (à la clé par exemple),
- $e_m(\sigma_c, Q)$ est l'épaisseur minimale sous le chargement Q pour laquelle le coefficient de rupture relatif à la résistance vaut 1.

Si σ_c est infini, on retrouve le coefficient proposé par HEYMAN et il sera le plus souvent suffisant, la résistance à la compression des maçonneries étant élevée. On peut également définir un autre coefficient de sécurité portant sur la charge variable P appliquée à la voûte, les charges permanentes Q étant maintenues constantes. Cela revient à considérer la section du convexe des chargements potentiellement supportables par le "plan" $g = \text{constante}$.

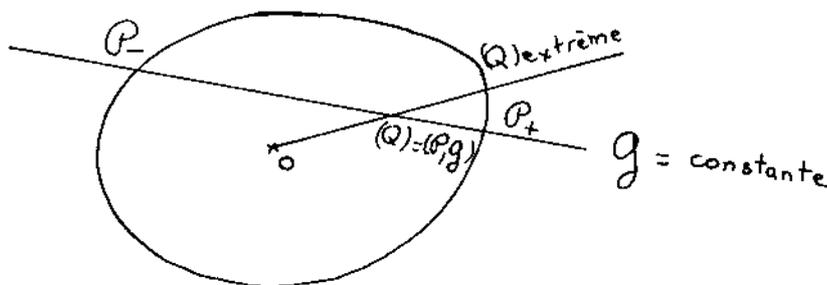


FIGURE 39

On obtient alors deux valeurs extrêmes pour la charge variable P , P_+ et P_- : nous ne considérerons que la charge maximale P_+ .

Le coefficient de "sécurité" sera défini par : $F_p = \frac{P_+}{P}$

Ces deux coefficients sont intéressants car l'utilisation du coefficient de rupture que nous avons défini peut être trompeuse si on n'y porte pas assez attention. C'est ce que nous montrons ci-dessous sur l'exemple du pont de Teston présenté par HEYMAN, HOBBS et JERMY (1980).

Il s'agit d'un pont en maçonnerie à 6 arches, constituées d'une douelle d'environ 200 à 250 mm d'épaisseur, surmontée elle-même de pierres plus ou moins bien maçonnées sur 200 mm d'épaisseur.

Les calculs ont été menés sur une seule arche dont les caractéristiques, correspondant avec une bonne précision au profil donné par points par HEYMAN, sont les suivantes :

- La voûte est ogivale symétrique, l'angle de brisure à la clé étant faible.
- Rayon de l'intrados de la demi-voûte de droite : 4,313 m.
- Epaisseur radiale : 0,40 m.

Afin de tester l'influence de l'ouverture angulaire, deux ouvertures ont été prises en compte :

	Angle polaire du joint de clé	Angle polaire du joint de naissance
Géométrie 1	5,12°	67,51°
Géométrie 2	5,12°	57,73°

Enfin, le joint des naissances est normal à l'intrados alors que HEYMAN a considéré ce joint vertical.

La résistance à la compression a été prise, en l'absence de données, égale à 50 MPa. On constate au vu des résultats que tant que cette "résistance" est supérieure à 10 MPa, son influence est faible.

La voûte est surmontée d'un remblai de 0,60 m d'épaisseur à la clé et soumise à une charge variable qui est une force verticale concentrée dont le module est fixé au départ à 40 KN. HEYMAN a trouvé les résultats suivants :

- Position la plus défavorable de la charge $x = -1,20$ m.
- Epaisseur minimale : 239 mm.
- Charge extrême $P = 72$ KN.
- Joints de rupture :

I	E	I	E
-3,2 m	-1,20 m	0	+3,60 m

EVALUATION DE L'ÉPAISSEUR MINIMALE

- CAS n° 1 : Géométrie 1 et point d'application de la force $x = -1,20$ m
CAS n° 2 : Géométrie 2 et point d'application de la force $x = -1,20$ m
CAS n° 3 : Géométrie 2 et point d'application de la force $x = -1,80$ m

<u>Épaisseur en mm</u> :	400	270	250	245	244	243	240	239
1 :	68	-	3,5	-	-	-	$I^* = 0,1$	$I^* = 9,4$
<u>Coefficient de</u>	81	-	-	1,2	$I^* = 0,01$	$I^* = 0,1$	-	-
<u>rupture</u>	67	5,44	$I^* = 2,4$	$I^* = 3,8$	$I^* = 4$	$I^* = 4,3$	-	-

NOTA : I représente l'écart entre la poussée horizontale minimale et la poussée horizontale maximale lorsque la poussée minimale est supérieure à la poussée maximale (il n'y a alors pas de lignes internes à la famille de joints considérée).

Les épaisseurs minimales estimées sont donc les suivantes :

- 1 : 240 mm en traction, 242 mm en traction-compression.
 2 : 244 mm en traction, 245 mm en traction-compression.
 3 : 260 mm environ.

EVALUATION DE LA CHARGE MAXIMALE

- CAS n° 1 : Géométrie 1 et point d'application de la force $x = -1,20$ m
CAS n° 2 : Géométrie 1 et point d'application de la force $x = -1,80$ m
CAS n° 3 : Géométrie 2 et point d'application de la force $x = -1,20$ m
CAS n° 4 : Géométrie 2 et point d'application de la force $x = -1,80$ m

<u>Charge KN :</u>	40	70	75	80	90	93	95	101
1	68	23	13	-	2,7	1*	-	-
2	52	4,3	I* = 3	-	-	-	-	-
3	81	31	-	21	11	-	-	1*
4	67	25	-	16	4,3	-	1*	-

VARIATION DU COEFFICIENT DE RUPTURE AVEC LA POSITION x DE LA CHARGE DE 40 KN
(DISTINCTION SUIVANT GEOMETRIE)

x_m	-0,6	-1,20	-1,50	-1,80	-2,10
<u>Coefficient de rupture</u>	79	68	65	52	63
1	-	81	-	67	-
2	-	-	-	-	-

<u>POSITION DES JOINTS DE RUPTURE</u>		
	I	E
$x = -1,2$ m géométrie 2	-3,15 m	-1,20 m
		0,42 m
		3,60 m
$x = -1,8$ m géométrie 2	-3,37 m	-1,60 m
		0
		3,60 m

Nous présentons nos résultats dans les tableaux ci-contre. Ils appellent les remarques suivantes :

- Le cas de charge le plus défavorable n'est pas au tiers de la demi-portée mais à la moitié ($x = -1,80$ m et non $x = -1,60$ m) mais la différence dans les résultats est faible.
- La charge extrême obtenue vis-à-vis des critères de traction-compression ou de traction seule est supérieure à celle obtenue par HEYMAN vis-à-vis du critère de traction seul pour $x = -1,20$ m quelle que soit la géométrie adoptée ($P_e > 90$ KN au lieu de $P_e = 72$ KN)
- La position des joints de rupture n'est pas très différente : les écarts proviennent certainement de l'adoption des découpages différents en voussoirs.
- L'ouverture angulaire (ici la variation entre les deux géométries adoptées est de 10° environ) a une influence non négligeable sur les résultats, en particulier sur les coefficients de rupture.
- Le coefficient de rupture varie très rapidement avec l'épaisseur de la voûte et avec le module de la charge appliquée. Dans ces conditions afin d'évaluer la "réserve de stabilité" d'un ouvrage, il est insuffisant de se contenter de la position du coefficient de rupture par rapport à 1 ou même par rapport à une valeur fixée arbitrairement (par exemple 10 pour se rapprocher des contraintes de compression admissibles). Il paraît intéressant de reprendre un critère analogue à celui adopté par HEYMAN, en plus du coefficient de rupture, à savoir:
 - Soit le rapport $\frac{e}{e_m} = F_d$, entre l'épaisseur réelle et l'épaisseur minimale supérieur à 2.
 - Soit le rapport $\frac{P_e}{P} = F_p$ entre la charge extrême variable et la charge réelle supérieur à 2. On définit ainsi un état-limite de service par : $F \geq 10$ et $(\frac{P_e}{P} \geq e$ ou $\frac{e}{e_m} \geq e)$

8. CONCLUSION

Le calcul des voûtes en maçonnerie ou en béton non armé ressort du calcul à la rupture. Nous avons montré que les méthodes traditionnelles de calcul de ces structures correspondent à une approche par l'extérieur dans leur esprit et nous avons exposé la démarche à suivre pour faire correctement une telle approche, en considérant un critère de traction-compression pour le matériau (ou les matériaux) constitutif et un critère de frottement sec à l'interface entre deux voussoirs.

Nous avons ensuite exposé une méthode pratique pour "évaluer" le coefficient de rupture d'une voûte soumise à un chargement donné et pour évaluer un majorant de la charge extrême de la voûte, sa géométrie étant fixée.

Un programme de calcul informatique a été mis au point et a permis de comparer les résultats obtenus par cette méthode avec des résultats expérimentaux.

Il est clair que la méthode utilisée, relevant d'une part d'une approche par l'extérieur, ne prenant pas en compte d'autre part tous les paramètres du problème, ne permet pas de retrouver ces résultats expérimentaux. Néanmoins, les comparaisons semblent satisfaisantes. En particulier, la méthode permet de retrouver (bien que cela ne découle pas de la théorie du calcul à la rupture) le mécanisme de ruine de la voûte par rotation de blocs rigides les uns par rapport aux autres. On peut donc envisager l'application d'une telle méthode à la vérification d'ouvrages soumis à des chargements exceptionnels, de préférence à une épure de MERY traditionnelle. Ces résultats sont à compléter par des recherches sur de nombreux autres problèmes parmi lesquels on peut citer :

- évaluation de la résistance à la compression d'un ensemble composite pierres et joints de mortier (influence de l'épaisseur des joints par exemple),
- évaluation des charges au niveau de l'extrados des voûtes (diffusion à travers le remblai, densité de charge due au remblai lui-même),
- évaluation de la participation des superstructures à la "résistance" de l'ouvrage ainsi que du remblai,
- évaluation du coefficient de rupture d'une voûte vis-à-vis d'un déplacement d'appui : l'approche sera ici toute différente puisqu'elle devra faire intervenir le comportement des matériaux constitutifs de la voûte.

- A N N E X E 1 -

- APPROCHE PAR L'EXTERIEUR D'UNE SECTION S -

Soit une section S constituée d'un matériau obéissant au critère de résistance :

$$f(\underline{\sigma}) = \sup_{i=1,2,3} \sigma_i (\sigma_i - \sigma_0) \quad (\text{ou } \underline{\sigma} \in G(\underline{x}))$$

où les contraintes de compression sont comptées positivement (la normale à la facette considérée est orientée vers l'intérieur).

Cette section a pour hauteur $2h$, a un axe de symétrie horizontal qui est donc axe principal d'inertie. La largeur sera notée $b(y)$, y étant l'ordonnée à laquelle on la considère.

Cette section est soumise à un chargement quelconque.

1) - Calcul de la fonction d'appui du convexe $G(\underline{x})$

. Si le champ de vitesses est continu et dérivable, Π est définie par :

$$\Pi(\underline{x}, \underline{d}(\underline{x})) = \sup_{\underline{\sigma} \in G(\underline{x})} \{ \text{tr}(\underline{\sigma} \underline{d}) \mid \underline{\sigma} \in G(\underline{x}) \}$$

Il en résulte de façon immédiate que :

$$\Pi(\underline{x}, \underline{d}(\underline{x})) = \sigma_0 (\sup(d_1, 0) + \sup(d_2, 0) + \sup(d_3, 0))$$

où les d_i sont les valeurs principales du tenseur des vitesses de déformation au point \underline{x} .

. Si le champ de vitesses présente une discontinuité de vitesses $\underline{v}(\underline{x})$ le long d'une surface Σ de normale \underline{n} (orientée de 2 vers 1 vers l'intérieur) au point \underline{x} .

$$\Pi(\underline{x}, \underline{v}(\underline{x}), \underline{n}(\underline{x})) = \Pi(\underline{x}, \underline{D}(\underline{x})) \quad \text{avec}$$

$$\underline{D}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} u_n & \frac{u_{t1}}{e} & \frac{u_{t2}}{e} \\ \frac{u_{t1}}{e} & 0 & 0 \\ \frac{u_{t2}}{e} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

u_n est la discontinuité normale.

u_{t1} et u_{t2} sont les discontinuités tangentielles.

Les valeurs principales de \underline{D} sont :

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = \frac{u_n - \|u_n\|}{e} \quad \lambda_3 = \frac{u_n + \|u_n\|}{e}$$

Seul λ_3 est positive d'où :

$$\Pi(\underline{x}, \underline{v}(\underline{x}), \underline{n}(\underline{x})) = \sigma_0 \frac{u_n + \|u_n\|}{e}$$

2) - Approche par l'extérieur de la section S

Il y aura incompatibilité entre l'équilibre dans la section et le critère de résistance s'il existe un champ de vitesses cinématiquement admissible \underline{v} tel que la puissance des forces extérieures dans ce champ excède la puissance dissipable.

Considérons le champ de vitesses suivant : (mouvement par blocs rigides)

$\underline{v} = \underline{0}$ partout avant S.

$\underline{v} = \omega \underline{k} \wedge \underline{OM}$ pour tout point M situé après S et sur S, où O a pour ordonnée e par rapport au milieu I de la section S.

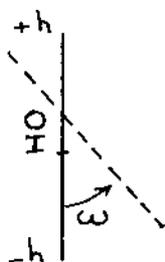


FIGURE 1

La discontinuité de vitesses s'écrit donc dans la section S.

$$v_x = \omega (y - e)$$

$$v_y = v_z = 0$$

On en déduit les valeurs suivantes pour π quand $\omega \geq 0$

$$1) - \text{Si } e \geq h \quad \pi = 0 \quad -h \leq y \leq h$$

$$2) - \text{Si } -h \leq e \leq h \quad \pi = \sigma_0 \omega (y - e) \quad e \leq y \leq h$$

$$3) - \text{Si } e \leq -h \quad \begin{aligned} \pi &= 0 & y \leq e \\ \pi &= \sigma_0 \omega (y - e) & -h \leq y \leq h \end{aligned}$$

Nous adopterons par la suite $\omega \geq 0$

La puissance dissipable peut donc prendre les valeurs suivantes :

$$1) - \text{Si } e \geq h \quad \mathcal{P}(\underline{v}) = 0$$

$$2) - \text{Si } -h \leq e \leq h$$

$$\mathcal{P}(\underline{v}) = \int_e^h \sigma_0 \omega (y - e) b(y) dy$$

Soit

$$\mathcal{P}(\underline{v}) = \sigma_0 \omega (S(e) - e A(e))$$

où $S(e)$ est le moment statique par rapport à l'axe d'inertie principal de la partie de section située au-dessus de O et $A(e)$ son aire.

3) Si $e \leq -h$

$$P(\underline{v}) = \int_{-h}^h \sigma_0 \omega (y-e) b(y) dy$$

Soit $P(\underline{v}) = -e \sigma_0 \omega A$ où A est l'aire de la section.

La puissance des forces extérieures est égale à :

$$Q\dot{q} = \int_{-h}^h \sigma_{xz} v_z b(y) dy \quad \text{où } v_{xz} \text{ est la composante horizontale de la discontinuité de vitesse.}$$

Soit de façon classique :

$$Q\dot{q} = \omega (M - Ne)$$

Il en résulte que la section sera certainement instable si :

$$Q\dot{q} > P(\underline{v})$$

Soit :

- 1) $M - Ne > 0$ si $e \geq h$
- 2) $M - Ne > \sigma_0 (S(e) - eA(e))$ si $-h \leq e \leq h$
- 3) $M - Ne > -e \sigma_0 A$ si $e \leq -h$

Ces inéquations définissent une famille de demi-plans dans l'espace (N, M) limités par des droites paramétrées en e . Ces droites admettent une "courbe" enveloppe dont l'équation est la suivante :

- 1) - Si $e \geq h$ $N = M = 0$ point fixe
- 2) - Si $-h \leq e \leq h$ $N = -\frac{d}{de} [\sigma_0 (S(e) - eA(e))]$

Soit :

$$\begin{aligned} N &= \sigma_0 A(e) \\ M &= \sigma_0 S(e) \\ 3) - \text{Si } e &\leq -h \\ N &= \sigma_0 A \\ M &= 0 \end{aligned}$$

Quand $\omega \leq 0$, on obtient la courbe symétrique par rapport à l'axe des N .

Dans le cas d'une section rectangulaire de largeur b , on obtient :

- 1) - $e \geq h$ $N = M = 0$
- 2) - $-h \leq e \leq h$ $N = \sigma_0 b (h - e)$
 $M = \sigma_0 b (h - e) \left(\frac{h + e}{2} \right)$

Soit : $\frac{M}{N} = \frac{h+e}{e}$

Soit $\frac{M}{N} = h \left(1 - \frac{N'}{2\sigma_0 b h}\right) = h \left(1 - \frac{N}{\sigma_0 S}\right)$

3) - $e \leq -h$
 $N = \sigma_0 S$
 $M = 0$

On obtient donc un arc de parabole représenté avec l'arc symétrique sur la figure 2 dans le système de coordonnées $N^* = \frac{N}{\sigma_0 S}$, $M^* = \frac{M}{\sigma_0 S h}$

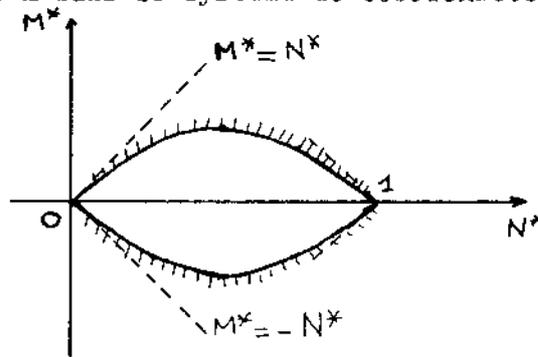


FIGURE 2

Les inéquations traduisent que la section est certainement instable si le point (N^*, M^*) est en dehors du domaine délimité par ces deux arcs de parabole.

REMARQUE 1 :

Lorsque la résistance à la compression σ_0 devient infinie, la condition nécessaire de stabilité se réduit à :

$$-N^* \leq M^* \leq N^*$$

Les droites $M^* = \pm N^*$ sont tangentes en 0 aux arcs de parabole.

REMARQUE 2 :

A chaque point (N^*, M^*) intérieur au domaine limité par les arcs de parabole, on peut associer une répartition de contraintes normales qui équilibre N et M et respecte le critère de traction-compression.

Elle est définie par l'excentricité $e' = \frac{M}{N}$ et la contrainte normale constante σ telles que :

$$N = 2\sigma b (h - |e'|)$$

$$M = N e'$$

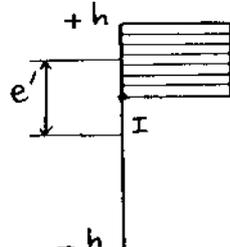


FIGURE 3

- . Lorsque (N^*, M^*) est sur la frontière du domaine, $\sigma = \sigma_0$
- . Entre e et e' , on a alors la relation $e' = \frac{h+e}{2}$

Il faut bien noter qu'une telle approche ne peut pas constituer une approche par l'intérieur pour le milieu continu tridimensionnel ni pour la section S qui est soumise aux contraintes généralisées N, M, T

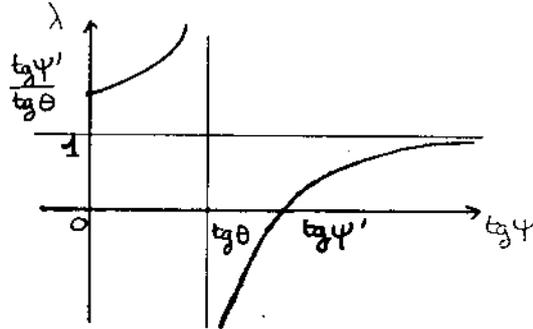
REMARQUE 3 :

La même méthode de calcul permet de traiter le cas d'une résistance à la compression variable dans le sens de la hauteur de la section.

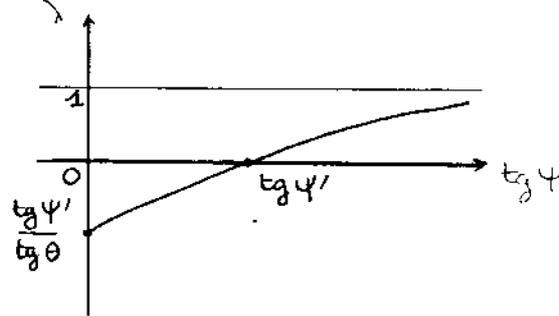
5 cas sont à distinguer.

$$2.1.1.) \quad \varphi \leq \varphi' \leq \frac{\pi}{2} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

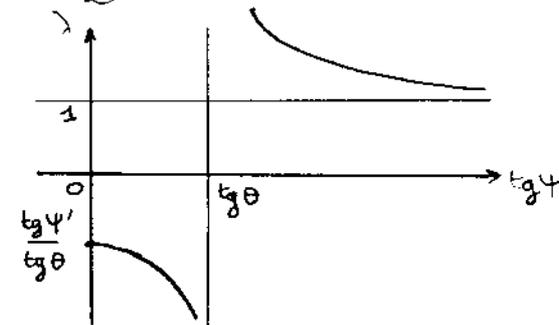
Nécessairement $\operatorname{tg} \varphi' \geq \operatorname{tg} \theta$



$$2.1.2.) \quad \varphi \leq \varphi' \leq \frac{\pi}{2} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$$

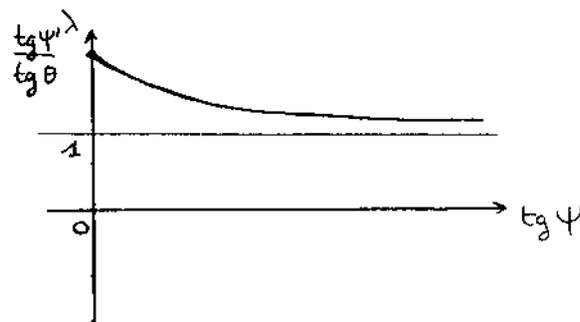


$$2.1.3.) \quad \varphi \leq \frac{\pi}{2} \leq \varphi' \leq \frac{3\pi}{2} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

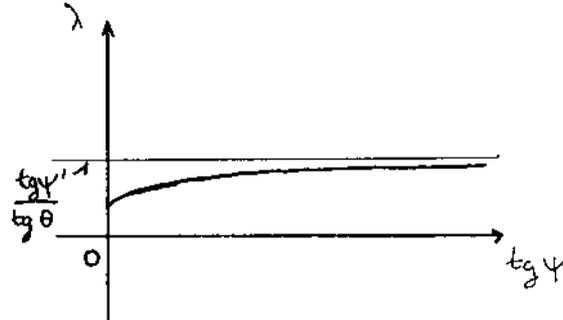


$$2.1.4.) \quad \varphi \leq \frac{\pi}{2} \leq \varphi' \leq \frac{3\pi}{2} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$$

$$2.1.4.1.) \quad \operatorname{tg} \varphi' \leq \operatorname{tg} \theta \leq 0$$



2.1.4.2.) $\text{tg} \theta < \text{tg} \psi' \leq 0$

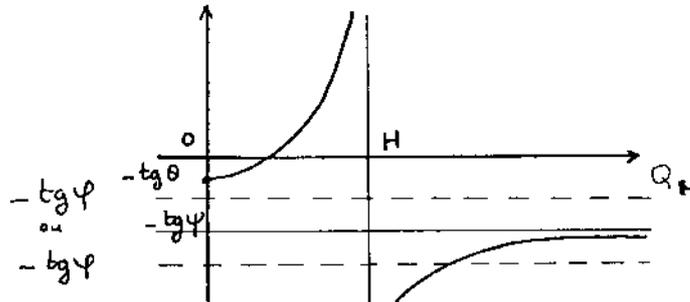


2.2.) Soit la fonction $Q_H \rightarrow t = \frac{Q_V - V}{H - Q_H}$ à ψ fixé (c'est à dire à Q_V/Q_H fixé). Elle est définie sur le domaine $[0, +\infty[$

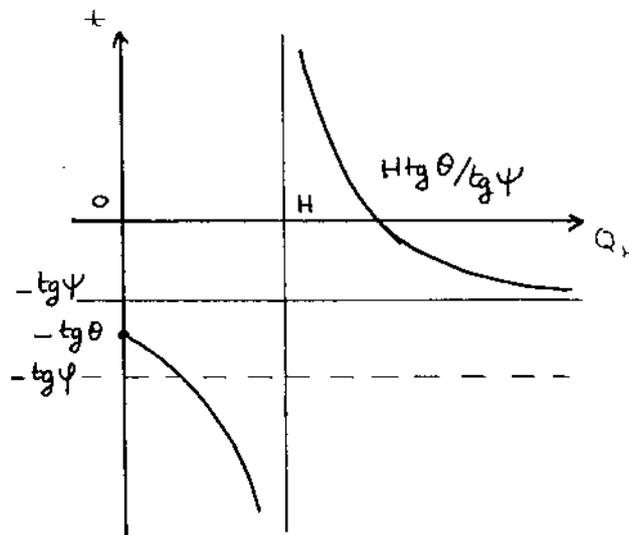
$$t = \frac{Q_H \text{tg} \psi - V}{H - Q_H} \quad \text{et} \quad \frac{dt}{dQ_H} = \frac{H(\text{tg} \psi - \text{tg} \theta)}{(H - Q_H)^2}$$

2 cas sont à distinguer :

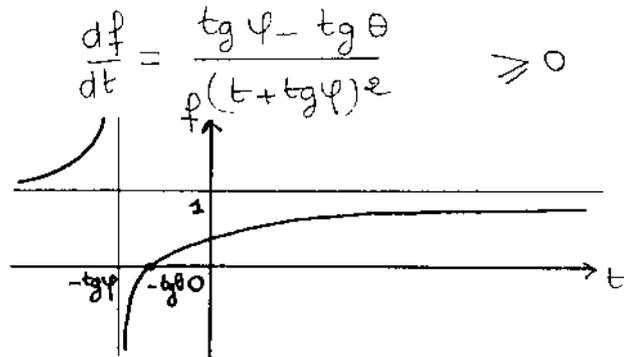
2.2.1.) $\text{tg} \psi \geq \text{tg} \theta \quad \text{tg} \psi \geq 0$



2.2.2.) $0 \leq \text{tg} \psi \leq \text{tg} \theta$



2.3.) $t \rightarrow f(t) = \frac{t + \operatorname{tg} \theta}{t + \operatorname{tg} \varphi}$ est une fonction définie sur \mathbb{R}



2.4.) - Condition de compressivité

Elle s'écrit : $\varphi = \frac{\pi}{2} \quad H \geq 0$

$$0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2} \quad \operatorname{tg} \varphi (H - Q_H) \geq V - Q_V$$

Soit :

- Si $H > Q_H$ $- \operatorname{tg} \varphi \leq t$
- Si $H < Q_H$ $- \operatorname{tg} \varphi \geq t$
- Si $H = Q_H$ $Q_V \geq V$

3) - Nous étudierons les différents cas possibles compte tenu des valeurs prises par les fonctions λ , t et f .

3.1.) - Cas où $x_A \geq 0$

On a vu que $x_A = x_T \lambda (\operatorname{tg} \varphi)$

$$x_A \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_T \geq 0 \text{ et } \lambda \geq 0 \text{ (alors } \varphi' \leq \frac{\pi}{2}) \\ \text{ou} \\ x_T \leq 0 \text{ et } \lambda \leq 0 \text{ (alors } \varphi' \geq \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Ces cas se produisent dans les quatre circonstances suivantes :

$$x_T \geq 0 \text{ et } \lambda \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi' \leq \frac{\pi}{2} \text{ et} \\ \theta \geq 0 \text{ et } \operatorname{tg} \varphi \leq \operatorname{tg} \theta \\ \text{ou } \theta \geq 0 \text{ et } \operatorname{tg} \varphi \geq \operatorname{tg} \varphi' \\ \text{ou } \theta \leq 0 \text{ et } \operatorname{tg} \varphi \geq \operatorname{tg} \varphi' \end{cases}$$

$$x_T \leq 0 \text{ et } \lambda \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi' \geq \frac{\pi}{2} \text{ et} \\ \theta \geq 0 \text{ et } \operatorname{tg} \varphi \leq \operatorname{tg} \theta \end{cases}$$

3.1.1.) $\psi' \leq \frac{\pi}{2}$, $\theta \geq 0$ et $0 \leq \text{tg } \psi \leq \text{tg } \theta \leq \text{tg } \psi$

Le point T est entre G et P;

Q_H	0	H	$+\infty$
t	$-\text{tg } \theta$	$+\infty$	$-\text{tg } \psi$

Or d'après 2.4. Si $Q_H \geq H$ $t \leq -\text{tg } \psi$
 en conséquence Q_H ne peut pas être supérieur à H

Si $Q_H \leq H$ $t \geq -\text{tg } \psi$
 Donc t varie entre $-\text{tg } \psi$ et $-\text{tg } \theta$

t	$-\text{tg } \psi$	$-\text{tg } \theta$
f(t)	$-\infty$	0

Il en résulte que $f \leq 0$ et que $x_c \leq 0$

⇒ C ne peut pas se trouver au-dessus du point K sur le joint.

3.1.2.) $\psi' \leq \frac{\pi}{2}$, $\theta \geq 0$ et $\text{tg } \theta \leq \text{tg } \psi \leq \text{tg } \psi' \leq \text{tg } \psi$

Le point T est entre G et P.

Q_H	0	H	$+\infty$
t	$-\text{tg } \theta$	$+\infty$	$-\text{tg } \psi$

La condition de compressivité est vérifiée pour toute valeur de Q_H .

3.1.2.1.) $0 \leq Q_H \leq H \Rightarrow t \in]-\text{tg } \theta, +\infty[$

Il en résulte que $0 \leq f(t) < 1$ donc $x_c \geq 0$.

$\lambda(\text{tg } \psi)$ est maximal lorsque $\text{tg } \psi \rightarrow \infty$ et tend vers 1 donc la valeur maximale de x_c est atteinte lorsque $Q_H = H$ et $\psi = \frac{\pi}{2}$ soit $H = Q_H = 0$: cette valeur vaut x_T .

Donc le centre de pression ne peut être le point G que si $T = G$: or le chargement étant constitué dans ce cas uniquement de charges verticales dont le poids propre, il faut, pour que $T = G$, que Q_V soit infini. Donc ce cas est impossible.

3.1.2.2.) $Q_H \geq H \Rightarrow t \in]-\infty, -\text{tg } \psi[$

Il en résulte que : $1 < f(t) \leq f(-\text{tg } \psi)$
 D'où $x_c \leq x_T \lambda(\text{tg } \psi) f(-\text{tg } \psi)$ à $\text{tg } \psi$ fixé
 Soit $x_c \leq x_T \frac{\text{tg } \psi - \text{tg } \psi'}{\text{tg } \psi - \text{tg } \theta} \frac{\text{tg } \theta - \text{tg } \psi}{\text{tg } \psi - \text{tg } \psi'}$

Soit $x_C \leq x_T \frac{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \psi'}{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \psi} \leq x_T$
 C peut donc être confondu avec G si $T = G$ auquel cas $\psi' = \psi = \varphi$ et $Q_H = Q_V$ sont infinis. Ce cas est donc impossible.

3.1.3.) $\psi' \leq \frac{\pi}{2}$, $\theta \leq 0$ et $0 \leq \operatorname{tg} \psi' \leq \operatorname{tg} \psi$
 Le point T est entre G et P.

Q_H	0	H	$+\infty$
t	$-\operatorname{tg} \theta$	$+\infty$ $-\infty$	$-\operatorname{tg} \psi$

Il n'y a pas de différence avec le cas précédent.

3.1.4.) $\psi' \geq \frac{\pi}{2}$, $\theta \geq 0$ et $0 \leq \operatorname{tg} \psi \leq \operatorname{tg} \theta \leq \operatorname{tg} \psi'$
 Le point T est au-dessus du point P.

Q_H	0	H	$+\infty$
t	$-\operatorname{tg} \theta$	$+\infty$ $-\infty$	$-\operatorname{tg} \psi$

On a vu qu'alors t varie entre $-\operatorname{tg} \psi$ et $-\operatorname{tg} \theta$ donc f est négatif.
 En outre $\lambda \leq 0$ et $x_C \leq 0$

Conclusion de 3.1.

Donc si $x_A \geq 0$, il est impossible que la ligne des centres de pression passe par le point G.

3.2.) Cas où $x_A \leq 0$
 Ce cas se produit dans les circonstances suivantes :

$$x_T \geq 0 \quad \text{et} \quad \lambda \leq 0 \quad (\psi' \leq \frac{\pi}{2})$$

ou :

$$x_T \leq 0 \quad \text{et} \quad \lambda \geq 0 \quad (\psi' \geq \frac{\pi}{2})$$

C'est-à-dire :

$$x_T \geq 0 \quad \text{et} \quad \lambda \leq 0 \iff \begin{cases} \psi' \leq \frac{\pi}{2}, \theta \geq 0 \text{ et } \operatorname{tg} \theta \leq \operatorname{tg} \psi \leq \operatorname{tg} \psi' \\ \psi' \leq \frac{\pi}{2}, \theta \leq 0 \text{ et } 0 \leq \operatorname{tg} \psi \leq \operatorname{tg} \psi' \end{cases}$$

$$x_T \leq 0 \quad \text{et} \quad \lambda \geq 0 \iff \begin{cases} \psi' \geq \frac{\pi}{2}, \theta \geq 0 \text{ et } \operatorname{tg} \psi \geq \operatorname{tg} \theta \\ \psi' \geq \frac{\pi}{2} \text{ et } \theta \leq 0 \end{cases}$$

3.2.1.) $\psi \leq \frac{\pi}{2}$, $\theta \geq 0$ et $\operatorname{tg} \theta \leq \operatorname{tg} \psi \leq \operatorname{tg} \psi'$
 Le point T est entre G et P.

Q_H	0	H	$+\infty$
t	$-\operatorname{tg} \theta$	$+\infty$ $-\infty$	$-\operatorname{tg} \psi$

La condition de compressivité est vérifiée pour $0 \leq Q_H \leq H$ et l'est pour $Q_H \geq H$ si $\operatorname{tg} \psi \geq \operatorname{tg} \varphi$.
 Si $\operatorname{tg} \psi < \operatorname{tg} \varphi$, doit rester inférieur à une valeur telle que $t = -\operatorname{tg} \varphi$, cette valeur étant supérieure à H .

Dans tous les cas, il est clair que f est positive : donc $x_c \leq 0$

Le point C ne peut pas être au-dessus du point K' sur le joint.

$$3.2.2.) \quad \psi' \leq \frac{\pi}{2} \quad \theta \leq 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq \operatorname{tg} \psi \leq \operatorname{tg} \psi'$$

$$3.2.3.) \quad \psi' \geq \frac{\pi}{2} \quad \theta \geq 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \psi \geq \operatorname{tg} \theta$$

$$3.2.4.) \quad \psi' \geq \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \theta \leq 0$$

Dans ces 3 cas on a $\operatorname{tg} \psi \geq \operatorname{tg} \theta$: il en résulte immédiatement, compte tenu de la condition de compressivité que f est positive : donc $x_c \leq 0$ et la conclusion est inchangée.

- A N N E X E 3 -

CONVEXITE DU DOMAINE $\mathcal{L}(K)$ DES LIGNES DE CENTRES DE PRESSION INTERNES
PASSANT PAR LE POINT K APPARTENANT AU JOINT DE CLF

Nous montrerons que :

$$\forall H_1, H_2 \text{ tels que } \begin{matrix} V_{\min}(K, H_1) \leq V_{\max}(K, H_1) \\ \text{et} \\ V_{\min}(K, H_2) \leq V_{\max}(K, H_2) \end{matrix}$$

$$\forall \lambda \in]0, 1[$$

les points $(\lambda H_1 + (1-\lambda) H_2, \lambda V_{\min}(K, H_1) + (1-\lambda) V_{\min}(K, H_2))$
et $(\lambda H_1 + (1-\lambda) H_2, \lambda V_{\max}(K, H_1) + (1-\lambda) V_{\max}(K, H_2))$
sont intérieurs au domaine $\mathcal{L}(K)$

Il suffira de le montrer pour chacune des frontières V_{\min} et V_{\max} : nous ne le ferons que pour la frontière $H \rightarrow V_{\max}(H, K)$, les démonstrations étant analogues pour l'autre.

Ces courbes sont de deux types suivant leurs propriétés de tangence :

- . Tangence à l'extrados droit au-dessus de l'horizontale de K ou à l'intrados gauche.
- . Tangence à l'extrados droit sous l'horizontale de K.

1) - Tangence à l'extrados droit au-dessus de l'horizontale de K ou à l'intrados gauche

Nous montrerons que les lignes (K, H_1, V_1) et (K, H_2, V_2) de ce type, la ligne (K, h, v) où :

$$h = \lambda H_1 + (1-\lambda) H_2$$

$$v = \lambda V_1 + (1-\lambda) V_2$$

où : $0 < \lambda < 1$
est une ligne interne.

Si ces deux lignes sont compressives, il est évident que la ligne (K, h, v) le sera aussi. La ligne (K, H_1, V_1) est notée (1), la ligne (K, H_2, V_2) (2).

1.1) - Supposons que les lignes (1) et (2) sont toutes deux tangentes à l'extrados droit au-dessus de l'horizontale de K en E1 et E2 et supposons $H_1 > H_2$

Il en résulte que $V_1 > V_2$ puisque la fonction $H \rightarrow V_{max}(H, K)$ est croissante.

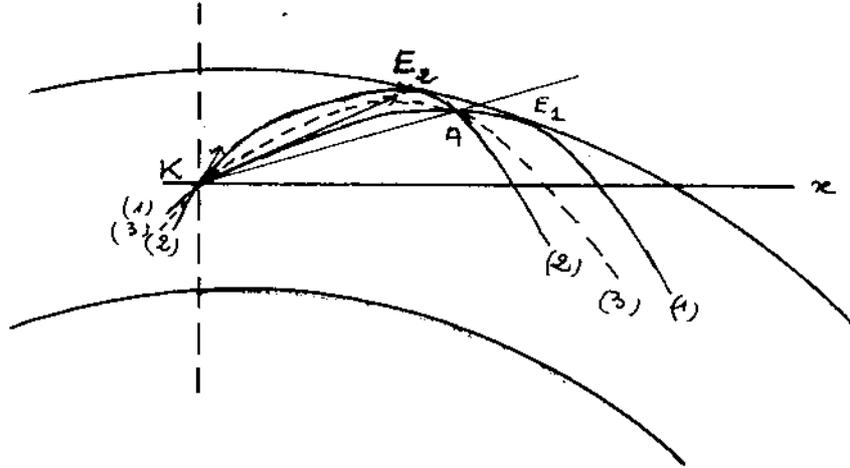


FIGURE 1

Nécessairement la ligne (2) recoupe la ligne (1) entre K et E1 sinon :

- Soit $\frac{V_2}{H_2} \leq \frac{V_1}{H_1}$: la ligne (2) ne pourrait pas atteindre l'extrados à droite de la clé, E1 étant en-dessous de la droite d'intersection.
- Soit $\frac{V_2}{H_2} \geq \frac{V_1}{H_1}$: la ligne (2) serait extérieure à la voûte en E1.

Il en résulte que E2 est au-dessus de E1 et que $\frac{V_2}{H_2} \geq \frac{V_1}{H_1}$. Au point d'intersection A de coordonnées x et y par rapport au point K, on a les égalités suivantes :

$$H_1 y - V_1 x = H_2 y - V_2 x = h y - v x$$

donc la ligne (K, h, v) passe par A et comme $H_2 \leq h \leq H_1$,

cette ligne est entre les lignes (1) et (2) partout, donc elle est interne à la voûte. Il en résulte que :

$$V_{max}(h, K) \geq v$$

1.2) - Supposons que les lignes (1) et (2) sont toutes deux tangentes à l'intrados gauche en I1 et I2 : la démonstration est directement calquée sur la précédente, nous ne la referons donc pas.

- A N N E X E 4 -

CONVEXITE DU DOMAINE (z, H) DETERMINANT LES LIGNES DE CENTRES DE
PRESSION INTERNES ET COMPRESSIVES (OU PLUTOT LA COTE z DE LEUR POINT
DE PASSAGE A LA CLE ET LEUR POUSSEE HORIZONTALE)

Nous montrerons que :

$$\forall z_1, z_2 \text{ tels que } H_{\min}(z_1) \leq H_{\max}(z_1)$$

$$H_{\min}(z_2) \leq H_{\max}(z_2)$$

$$\forall \lambda \in]0, 1[$$

Les points $(\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2, \lambda H_{\min}(z_1) + (1-\lambda)H_{\min}(z_2))$
et $(\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2, \lambda H_{\max}(z_1) + (1-\lambda)H_{\max}(z_2))$

sont intérieurs au domaine (z, H).

Nous le montrerons pour le premier type de point. La frontière est alors formée de courbes qui peuvent être de deux types :

- La fonction $z \rightarrow H_{\min}(z)$ est décroissante.
- La fonction $z \rightarrow H_{\max}(z)$ est croissante.

Il suffit de démontrer la propriété pour chacun de ces deux types.

1.) - La fonction $z \rightarrow H_{\min}(z)$ est décroissante.

C'est le cas lorsque le premier point de tangence à partir de la clé se trouve sur l'intrados. Nous ne considérerons que le cas des lignes tangentes à l'intrados droit et à l'intrados gauche.

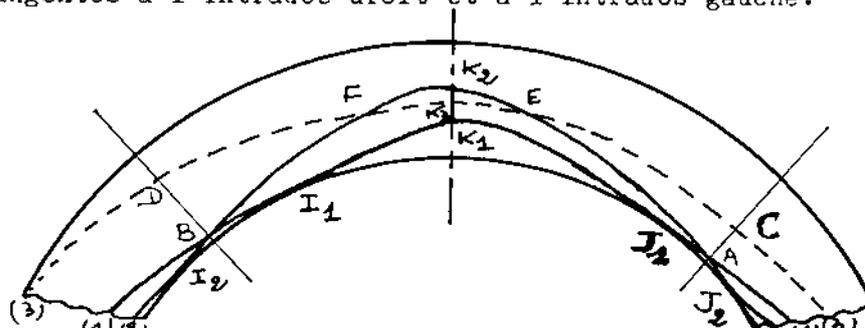


FIGURE 1

Soit donc deux lignes (z_1, H_1, V_1) et (z_2, H_2, V_2) de ce type, internes et supposons $z_2 > z_1$ il en résulte $H_2 < H_1$.

Nécessairement (1) coupe (2) en A avant J2 et en B avant I2.

Soit la ligne (g, R, v) notée (3) telle que :

$$\begin{aligned} z &= \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 \\ h &= \lambda H_1 + (1-\lambda)H_2 \\ v &= \lambda V_1 + (1-\lambda)V_2 \end{aligned} \quad \text{avec } \lambda \in]0, 1[$$

Recherchons la position du centre de pression C de (3) sur le joint passant par A. Pour cela, il faut calculer le moment fléchissant M_{A3} correspondant à cette ligne en fonction de $M_{A1} = M_{A2} = M_A$; il est facile de trouver

$$M_{A3} = M_A + \lambda(1-\lambda)(H_1 - H_2)(z_1 - z_2) < M_A$$

Il en résulte que C est situé au-dessus de A et de même, que le centre de pression D de (3) sur le joint de B est situé au-dessus de B.

Il en résulte que nécessairement (3) coupe (2) entre K3 et A en E et entre K3 et B en F : EF est la droite d'intersection associée à ces deux lignes.

Comme $H_3 > H_2$, il en résulte que la ligne (3) est entre (1) et (2) entre F et E et au-dessus de (2) en dehors de cet arc. Elle ne peut donc pas toucher l'intrados.

Dans la mesure où K1 et K2 sont suffisamment proches, il est clair que la ligne (3) ne touchera pas non plus l'extrados : elle est donc interne.

Donc si $\Delta z = z_2 - z_1$ est faible, on a bien

$$(\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2, \lambda H_{\text{mii}}(z_1) + (1-\lambda)H_{\text{mii}}(z_2))$$

2) - La fonction $z \rightarrow H_{\text{mii}}(z)$ est croissante

C'est le cas lorsque le premier point de tangence à partir de la clé se trouve à l'extrados.

Sort donc deux lignes (z_1, H_1, V_1) et (z_2, H_2, V_2) internes et tangentes à l'extrados droit en E1 et E2 et à l'intrados droit en I1 et I2, ces points vérifiant :

- K E1 au-dessus de KI1, E1 avant I1.

- K E2 au-dessus de KI2, E2 avant I2.

Supposons $z_2 > z_1$: il en résulte $H_2 > H_1$.

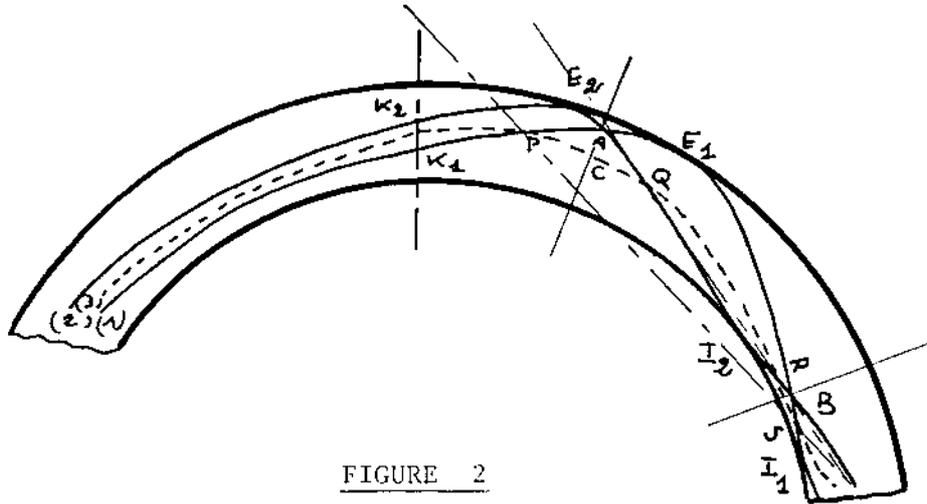


FIGURE 2

Il est facile de voir que nécessairement :

E1 est en-dessous de E2.

I1 est en-dessous de I2.

et que les lignes (1) et (2) se coupent en au moins deux points A situés entre K1 et E1 et après E2 et B situé entre E1 et I1 et après I2.

Les notations étant les mêmes qu'au 1), soit la ligne (z, h, v) passant par K3 à la clé. On a

$$M_{A3} = M_A + \lambda(1-\lambda)(H_1 - H_2)(z_1 - z_e)$$

Il en résulte que le centre de pression C de la ligne (3) est en-dessous de A sur le joint de A et de la même manière, que le centre de pression D de la ligne (3) est en-dessous de B sur le joint de B.

C étant en-dessous de A, nécessairement (3) coupe (1) entre K1 et A1 en P.

D'une façon générale, il est facile de montrer que

$$M_3 = \lambda M_1 + (1-\lambda) M_2 + \lambda(1-\lambda)(H_1 - H_2)(z_1 - z_e)$$

Donc sur le joint de E1, on a

$$M_3/E_1 = (1-\lambda) M_2/E_1 + \lambda(1-\lambda)(H_1 - H_2)(z_1 - z_e)$$

Or, $M_2/E_1 > 0$ et $(H_1 - H_2)(z_1 - z_e) > 0$

En outre, M_2/E_1 est du 1er ordre par rapport à $\Delta H, \Delta v, \Delta z$ alors que $M_3/E_1 - (1-\lambda)M_2/E_1$ est du 2ème ordre en $\Delta H \Delta z$.

On peut donc trouver un intervalle suffisamment petit Δz_1 tel que $0 < M_3 < M_2$, donc tel que la ligne (3) se trouve entre les lignes (1) et (2) sur le joint de E1.

Si l'on considère un tel intervalle Δz_1 , la ligne (3) recoupe donc la ligne (2) en Q entre A et I2.

Plaçons nous sur le joint de B : ici aussi on peut trouver un intervalle Δz_e suffisamment petit pour que la ligne (3), qui passe en-dessous de B reste à l'intérieur de la voûte. En outre, il existe un autre point d'intersection R de (3) avec (2) entre I2 et B.

Plaçons nous sur le joint de I1 : on peut refaire le même raisonnement qu'en E1 :

$$M_3 / I_1 = (1-\lambda) M_2 / I_2 + \lambda (1-\lambda) \Delta H \Delta z$$

où $M_2 < 0$ et $\Delta H \Delta z > 0$

On peut trouver un intervalle Δz_3 suffisamment petit pour que la ligne (3) soit au-dessus de I1 et reste interne : dans ce cas, elle coupe la ligne (1) entre B et I1 en S.

Si l'on considère donc un intervalle Δz plus petit que les intervalles $\Delta z_1, \Delta z_e, \Delta z_3$, on obtiendra donc une ligne (3) interne à la voûte et ayant avec la ligne (1) la droite d'intersection PS et avec la ligne (2) la droite d'intersection QR.

Il est clair que si Δz est suffisamment petit, la ligne (3) sera interne à la voûte, en particulier sur les arcs \overline{PQ} et \overline{RS} .

$$\text{Donc } H_{\min} (\lambda z_1 + (1-\lambda) z_e) \leq \lambda H_{\min}(z_1) + (1-\lambda) H_{\min}(z_e)$$

tant que $(z_e - z_1)$ est petit.

3.) - Conclusion

Nous avons montré que, tant que l'on prend un intervalle Δz petit,

Si Δz est plus grand, on n'est pas a priori assuré que la ligne combinaison sera interne.

On peut de même montrer que pour Δz petit :

$$H_{\max} (\lambda z_1 + (1-\lambda) z_e) \geq \lambda H_{\max}(z_1) + (1-\lambda) H_{\max}(z_e)$$

La combinaison de ces deux propriétés, associée aux inégalités :

$$H_{\min}(z_1) \leq H_{\max}(z_1) \text{ et } H_{\min}(z_e) \leq H_{\max}(z_e)$$

assure que les deux propriétés sont vérifiées pour Δz quelconque.

B I B L I O G R A P H I E

DE COULOMB C.A.

Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture (Mémoire de Mathématiques et Physiques présenté à l'Académie Royale des Sciences, P. 343, 1773).

COUSSY ET SALENCON

Analyse de la stabilité des ouvrages en terre par le calcul à la rupture (Annales des Ponts et Chaussées - 4ème Trimestre - 1979 PP.7-35).

CROIZETTE DESNOYERS Ph.

Cours de Construction des Ponts - PARIS Vve CHARLES DUNOD Editeur 1885.

DURAND-CLAYE.A.

1. Stabilité des voûtes en maçonnerie (Annales des Ponts et Chaussées 1867 - I PP 6396).
2. Stabilité des voûtes et des arcs (Annales des Ponts et Chaussées 1880 - I PP. 416-440).

HEYMAN. J.

1. The Stone Skeleton (Int. Journ. of Solids and structures, Vol. 2 PP 249-279, 1966).
2. Equilibrium of shell structures (Oxford Engineering Science Series 1977).

HEYMAN J., HOBBS N.B., JERMY B.S.

The rehabilitation of Teston Bridges (Proc. Instn. Civ. Engrs. Part 1, 1980, 68, Aug., 489, 497).

KOOHARIAN. A.

Limit Analysis of voussoir (segmental) and concrete arches (Journ. Amer. Concrete Institution. Vol 89, PP. 317-328, 1953).

MASSONNET ET SAVE

Calcul plastique des constructions Tome I - PP; 460-476.

MERY. E.

Sur l'équilibre des voûtes en berceau (Annales des Ponts et Chaussées 1840 I, PP. 50-70).

NAVIER (Voir PONCELET)

PIPPARD A.J.S - ASHBY.R.J.

An experimental study of the voussoir arch (J. Inst. Civ. Engrs. Vol 10, PP. 383-404, 1939).

PIPPARD A.J.S. - TRANTER. E. - CHITTY. L.

The Mechanics of the voussoir arch (J. Inst. Civ. Engrs. Vol.4, PP 281-306, 1936).